八元数と回転

中嶋 慧

January 27, 2020

Abstract

x を純八元数, q を単位八元数とすると、$x' = R(q)x \overset{\text{def}}{=} qxq^*$ は純八元数で、x を回転させたものであることをまず示す。$R(q^*)$ は $R(q)$ の逆回転である。$R(q_2)R(q_1)$ も 7 次元回転である。ただし、八元数の非結合性より、

$$R(q_3)[R(q_2)R(q_1)] \neq [R(q_3)R(q_2)]R(q_1)\,, \quad R(q_2)R(q_1) \neq R(q_2q_1) \tag{0.1}$$

である。また、一般の 7 次元回転は 21 個のパラメーターで記述されるが、$R(q)$ は 7 つのパラメーターしか含まない。

次に、鏡映変換を使うことで、八元数を用いて、一般の SO(8) 回転が記述できることを示す。

この記事の最後では、以下のことを示す。$e_0 = 1$ とし、$\{e_k\}_{k=1}^7$ を八元数の虚数単位とする。このとき、

$$e_\mu e_\nu = f^\lambda_{\ \mu\nu} e_\lambda \ \ (\mu, \nu, \lambda = 0, 1, \cdots, 7) \tag{0.2}$$

と書き、$(\Gamma_\mu)^\lambda_{\ \nu} \overset{\text{def}}{=} f^\lambda_{\ \mu\nu}$ で行列 Γ_μ を定めると、

$$\Gamma_i\Gamma_k + \Gamma_k\Gamma_i \,=\, -2\delta_{ik}1_8 \tag{0.3}$$

となる。

Contents

1　八元数を使った回転

1.1　八元数の復習

$\mathbb{O}$ を八元数の集合, $\mathrm{Im}(\mathbb{O})$ を純八元数の集合とする。$e_0 = 1$ とし、$\{e_k\}_{k=1}^{7}$ を八元数の虚数単位とする。$x \in \mathbb{O}$, $v \in \mathrm{Im}(\mathbb{O})$ は、

$$x = x^\mu e_\mu, \quad v = v^i e_i \ \ (x^\mu, v^i \in \mathbb{R}) \tag{1.1}$$

と書かれる。この記事では、特に断りのない限り、ギリシャ小文字の添え字は $0, 1, \cdots, 7$ を表し、ラテン小文字の添え字は $1, 2, \cdots, 7$ を表す。虚数単位の積は、

$$e_i e_k = f^l{}_{ik} e_l - \delta_{ik} \tag{1.2}$$

であり、$f_{lik} \stackrel{\mathrm{def}}{=} f^l{}_{ik}$ は完全反対称である。特に、1 になるのは、

$$f_{123},\ f_{145},\ f_{176},\ f_{246},\ f_{257},\ f_{347},\ f_{365} \tag{1.3}$$

である。また、

$$\mathrm{Re}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} x^0, \tag{1.4}$$

$$\mathrm{Im}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} x^i e_i =: \boldsymbol{x} \tag{1.5}$$

とする。x を $(x^0, \boldsymbol{x})$ と書くと、

$$xy = (x^0 y^0 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}, x^0 \boldsymbol{y} + y^0 \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} \stackrel{\mathrm{def}}{=} f^l{}_{ik} x^i y^k e_l \tag{1.6}$$

となる。ここで、$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x^i y^i$ である。これより、

$$\mathrm{Re}(xy) = \mathrm{Re}(yx) \tag{1.7}$$

である。x の共役を、

$$x^* = x^0 - x^i e_i = 2\mathrm{Re}(x) - x \tag{1.8}$$

とする。このとき、

$$(xy)^* = y^* x^* \tag{1.9}$$

である。特に、

$$x x^* = x^* x = (x^0)^2 + x^i x^i \tag{1.10}$$

である。八元数 x のノルム $|x|$ を、

$$|x| \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt{x x^*} = \sqrt{x^* x} \tag{1.11}$$

で定める。ただし、ノルムが 1 の八元数を単位八元数という。単位八元数の集合を $\mathrm{Unit}(\mathbb{O})$ と書く。$v \in \mathrm{Im}(\mathbb{O})$ のとき、

$$e^v = \cos|v| + \frac{v}{|v|} \sin|v| \in \mathrm{Unit}(\mathbb{O}) \tag{1.12}$$

である。

　八元数は非結合的である。つまり、

$$(a,b,c) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (ab)c - a(bc) \neq 0 \tag{1.13}$$

である。(a,b,c) を結合子という。ただし、

$$(aa)b = a(ab), \tag{1.14}$$
$$(ab)b = a(bb), \tag{1.15}$$
$$(ab)a = a(ba)(=: aba) \tag{1.16}$$

である。これらと (1.8) より、

$$(a^*a)b = a^*(ab), \tag{1.17}$$
$$(ab)b^* = a(bb^*), \tag{1.18}$$
$$(ab)a^* = a(ba^*)(=: aba^*) \tag{1.19}$$

である。(1.14), (1.15), (1.16) はそれぞれ、

$$(a,b,c) = -(b,a,c), \tag{1.20}$$
$$(a,b,c) = -(a,c,b), \tag{1.21}$$
$$(a,b,c) = -(c,b,a) \tag{1.22}$$

と等価である。(1.14), (1.15), (1.16) より、

$$(ab)(ca) = a(bc)a \tag{1.23}$$

を得る。また、上式と (1.8) より

$$(ab)(ca^*) = a(bc)a^* \tag{1.24}$$

を得る。

1.2　回転 $R(q)x \stackrel{\mathrm{def}}{=} qxq^*$

　$x \in \mathrm{Im}(\mathbb{O})$, $q \in \mathrm{Unit}(\mathbb{O})$ に対して、

$$R(q)x \stackrel{\mathrm{def}}{=} qxq^* \tag{1.25}$$

とする。(1.19) より、この積は順番によらない。また、

$$\mathrm{Re}[R(q)x] = \mathrm{Re}[q^*qx] = \mathrm{Re}[x] = 0 \tag{1.26}$$

より、$R(q)x \in \mathrm{Im}(\mathbb{O})$ である。また、(1.8) と $x^* = -x$ より、

$$(qxq^*)^* = qx^*q^* \tag{1.27}$$

である。また、

$$\langle x, y\rangle \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Re}(xy^*) \tag{1.28}$$

とすると、

$$\begin{aligned}\langle R(q)x, R(q)y\rangle &= \mathrm{Re}[(qxq^*)(qy^*q^*)]\\ &= \mathrm{Re}[q(xq^*)(qy^*)q^*]\\ &= \mathrm{Re}[q^*q(xq^*)(qy^*)]\\ &= \mathrm{Re}[(xq^*)(qy^*)]\\ &= \mathrm{Re}[(qy^*)(xq^*)]\\ &= \mathrm{Re}[q(y^*x)q^*]\\ &= \mathrm{Re}[q^*q(y^*x)]\\ &= \mathrm{Re}[y^*x]\\ &= \mathrm{Re}[xy^*]\\ &= \langle x, y\rangle \end{aligned} \tag{1.29}$$

である。よって、$R(q)x$ は x を回させたものである。

$$R(q)x = [\rho(q)]^i{}_k x^k e_i \tag{1.30}$$

と書くと、

$$[\rho(q)]^i{}_k \in \mathrm{SO}(7) \tag{1.31}$$

である。一般の 7 次元回転は 21 個のパラメーターで記述されるが、$R(q)$ は 7 つのパラメーターしか含まない。よって、

$$\rho(\mathrm{Unit}(\mathbb{O})) \subsetneq \mathrm{SO}(7) \tag{1.32}$$

である[1)] 。

$R(q_2)R(q_1)x$ も x を回転させたものである。一般に回転の合成は回転となる。しかし、八元数の非結合性より、

$$R(q_3)[R(q_2)R(q_1)] \neq [R(q_3)R(q_2)]R(q_1), \tag{1.33}$$

$$R(q_2)R(q_1) \neq R(q_2q_1) \tag{1.34}$$

[1)]なお、四元数の場合は、SO(3), SO(4) の任意の回転を表すことができる (4 次元回転については [1] を参照)。SO(3) の任意の回転を表すことができるのは、

$${}_3C_2 = 3$$

であることによる。八元数では、

$${}_7C_2 = 21 \neq 7$$

である。また、四元数で SO(4) の任意のを表すことができるのは、

$${}_4C_2 = 6 = 3 + 3$$

による。

である。ただし、

$$R(q^*)R(q) = 1 = R(q)R(q^*) \tag{1.35}$$

である。実際、

$$\begin{aligned} R(q^*)R(q)x &= q^*(qxq^*)q \\ &= (q^*(qx))(q^*q) \\ &= q^*(qx) \\ &= (q^*q)x \\ &= x \end{aligned} \tag{1.36}$$

である。

1.3　8 次元の鏡映

一般の SO(n) 回転は偶数回の鏡映で表すことができる。この小節では、八元数を使って 8 次元の鏡映が記述できることを見る。よって、八元数を使って一般の SO(8) 回転が記述できる。

$x \in \mathbb{O}$, $n \in \mathrm{Unit}(\mathbb{O})$ とする。8 次元ベクトル x の、n を法線とする面での鏡映は、

$$x' \stackrel{\mathrm{def}}{=} x - 2\langle n, x\rangle n \tag{1.37}$$

である。これが、

$$x' = -nx^*n \tag{1.38}$$

と書けることを示そう ($x \in \mathrm{Im}(\mathbb{O})$ なら $-x^* = x$ である) 。$x = (x^0, \boldsymbol{x})$ と書く ($\boldsymbol{x} = \mathrm{Im}(x)$ である) と、(1.6) より、

$$\begin{aligned} nx^* &= (\langle n, x\rangle, -n^0\boldsymbol{x} + x^0\boldsymbol{n} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{n}), & (1.39) \\ nx^*n &= (x'^0, \boldsymbol{x}'), & (1.40) \\ x'^0 &= \langle n, x\rangle n^0 + n^0\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} - x^0\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} \\ &= -|n|^2x^0 + 2\langle n, x\rangle n^0, & (1.41) \\ \boldsymbol{x}' &= -(n^0)^2\boldsymbol{x} + n^0x^0\boldsymbol{n} + n^0\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{n} + \langle n, x\rangle\boldsymbol{n} - n^0\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{n} + (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{n} \\ &= -(n^0)^2\boldsymbol{x} + n^0x^0\boldsymbol{n} + \langle n, x\rangle\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{n} & (1.42) \end{aligned}$$

である。また、(1.15) は、

$$(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{x} \tag{1.43}$$

と等価であるから、

$$\boldsymbol{x}' = -|n|^2\boldsymbol{x} + 2\langle n, x\rangle\boldsymbol{n} \tag{1.44}$$

となる。よって (1.38) が示された。

1.4 一般の 8 次元回転

鏡映 2 回で回転となる。今、

$$M[n]x \stackrel{\text{def}}{=} -nx^*n \tag{1.45}$$

とすると、

$$\begin{aligned} M[m](M[n]x) &= -m(-nx^*n)^*m \\ &= m(n^*xn^*)m \end{aligned} \tag{1.46}$$

であり、これは回転である。任意の SO(8) 回転は偶数回の鏡映で記述される。また、

$$\begin{aligned} M[n](M[n]x) &= n(n^*xn^*)n \\ &= (n(n^*x))(n^*n) \\ &= x \end{aligned} \tag{1.47}$$

となる。

1.5 四元数による 3 次元回転

x を純四元数, n, m を純四元数の単位四元数とすると、

$$M[m](M[n]x) = (mn)x(mn)^* = (-mn)x(-mn)^* \tag{1.48}$$

となる。ここで、四元数の結合性を用いた。SO(3) の任意の回転は上のように表すことができる。今、n と m のなす角を θ とすると、

$$-mn \;=\; \cos\theta + \boldsymbol{\varepsilon}\sin\theta = \exp(\boldsymbol{\varepsilon}\theta), \tag{1.49}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}|} \tag{1.50}$$

となる。よって、

$$qxq^*, \quad q \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\boldsymbol{\varepsilon}\theta) \tag{1.51}$$

は任意の SO(3) 回転を表すことができる。§ 1.2 の議論は、これを八元数に拡張できないことを表している。

2　八元数の構造定数とガンマ行列

今、

$$e_\mu e_\nu = f^\lambda{}_{\mu\nu} e_\lambda \tag{2.1}$$

と置くと、

$$f^0{}_{ik} = -\delta_{ik}\,, \quad f^\mu{}_{0\nu} = \delta^\mu_\nu = f^\mu{}_{\nu 0} = \delta^\mu_\nu \tag{2.2}$$

である。今、

$$(\Gamma_\mu)^\lambda{}_\nu \overset{\text{def}}{=} f^\lambda{}_{\mu\nu} \tag{2.3}$$

で行列 Γ_μ を定めると、Γ_i は交代行列である：

$${}^t\Gamma_i = -\Gamma_i. \tag{2.4}$$

また、

$$\Gamma_i \Gamma_k + \Gamma_k \Gamma_i = -2\delta_{ik} 1_8 \tag{2.5}$$

である [2]。これは、

$$(a, b, c) = -(b, a, c) \tag{2.6}$$

より従うことを以下で示す。また、(2.5) より、

$$(a, b, c) = -(a, c, b) \tag{2.7}$$

が従うことを以下で示す。

2.1　Γ_i がガンマ行列ならば $(a, b, c) = -(a, c, b)$

まず、(2.5) ならば (2.7) であることを示す。
結合子は、

$$\begin{aligned}(e_\mu, e_\nu, e_\lambda) &= f^\alpha{}_{\mu\nu} e_\alpha e_\lambda - f^\alpha{}_{\nu\lambda} e_\mu e_\alpha \\ &= (f^\alpha{}_{\mu\nu} f^\beta{}_{\alpha\lambda} - f^\alpha{}_{\nu\lambda} f^\beta{}_{\mu\alpha}) e_\beta \\ &= \varepsilon^\beta{}_{\mu\nu\lambda} e_\beta \end{aligned} \tag{2.8}$$

であり、μ, ν, λ の 1 つ以上が 0 なら $\varepsilon^\beta{}_{\mu\nu\lambda} = 0$ である。ここで、

$$f^\alpha{}_{\nu\lambda} f^\beta{}_{\mu\alpha} = (\Gamma_\mu \Gamma_\nu)^\beta{}_\lambda \tag{2.9}$$

であり、

$$\begin{aligned} f^{\alpha}_{\ ik} f^{\beta}_{\ \alpha l} &= f^{a}_{\ ik} f^{\beta}_{\ al} + f^{0}_{\ ik} f^{\beta}_{\ 0l} \\ &= -f^{a}_{\ ik} f^{\beta}_{\ la} + f^{0}_{\ ik} f^{\beta}_{\ 0l} \\ &= -(\Gamma_l \Gamma_i)^{\beta}_{\ k} + 2 f^{0}_{\ ik} f^{\beta}_{\ 0l} \\ &= -(\Gamma_l \Gamma_i)^{\beta}_{\ k} - 2\delta_{ik}\delta^{\beta}_{l} \end{aligned} \tag{2.10}$$

である。よって、

$$\varepsilon^{\beta}_{\ ikl} = -(\Gamma_l \Gamma_i)^{\beta}_{\ k} - (\Gamma_i \Gamma_k)^{\beta}_{\ l} - 2\delta_{ik}\delta^{\beta}_{l} \tag{2.11}$$

であり、

$$\varepsilon^{\beta}_{\ ikl} + \varepsilon^{\beta}_{\ ilk} = -(\{\Gamma_l, \Gamma_i\})^{\beta}_{\ k} - (\{\Gamma_i, \Gamma_k\})^{\beta}_{\ l} - 2\delta_{ik}\delta^{\beta}_{l} - 2\delta_{il}\delta^{\beta}_{k} \tag{2.12}$$

となり、(2.5) より、

$$\varepsilon^{\beta}_{\ ikl} + \varepsilon^{\beta}_{\ ilk} = 0 \tag{2.13}$$

となる。これは (2.7) と等価である。

2.2 $(a, b, c) = -(b, a, c)$ ならば Γ_i はガンマ行列

今、$x = x^{\mu} e_{\mu}$ に対して、

$$\overrightarrow{x} = {}^{t}(x_0, x_1, \cdots, x_7) \tag{2.14}$$

とし、

$$\overrightarrow{ax} = \omega(a) \overrightarrow{x} \tag{2.15}$$

で行列 $\omega(a)$ を定める。$\omega(a)$ の成分は、

$$\begin{aligned} ax &= a^{\mu} x^{\nu} e_{\mu} e_{\nu} \\ &= a^{\mu} x^{\nu} f^{\lambda}_{\ \mu\nu} e_{\lambda} \end{aligned} \tag{2.16}$$

より、

$$[\omega(a)]^{\lambda}_{\ \nu} = a^{\mu} f^{\lambda}_{\ \mu\nu} \tag{2.17}$$

である。よって、

$$\omega(a) = a^{\mu} \Gamma_{\mu} \tag{2.18}$$

である。

さて、(2.6) より、

$$(ab)x - a(bx) = -(ba)x + b(ax) \tag{2.19}$$

であり、これより、

$$\omega(ab) - \omega(a)\omega(b) = -\omega(ba) + \omega(b)\omega(a) \tag{2.20}$$

を得る [3]。よって、

$$\omega(ab) + \omega(ba) = \omega(a)\omega(b) + \omega(b)\omega(a) \tag{2.21}$$

である。a, b を純八元数とすると、

$$\begin{aligned} \omega(ab) + \omega(ba) &= \omega(ab + ba) \\ &= \omega(-2a^i b^i) \\ &= -2a^i b^i 1_8 \end{aligned} \tag{2.22}$$

である。また、

$$\omega(a)\omega(b) + \omega(b)\omega(a) = a^i b^k \{\Gamma_i, \Gamma_k\} \tag{2.23}$$

である。よって、

$$\{\Gamma_i, \Gamma_k\} = -2\delta_{ik} 1_8 \tag{2.24}$$

を得る。

$(a, b, c) = -(a, c, b)$ と $(a, b, c) = -(b, a, c)$ とは等価である[2)]。よって、$\{\Gamma_i, \Gamma_k\} = -2\delta_{ik}1_8$ は $(a, b, c) = -(a, c, b)$, $(a, b, c) = -(b, a, c)$ と等価である。

[2)] 前者は $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$ と等価で、後者は $(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$ と等価である。

References

[1] 中嶋 慧「4 次元回転と四元数」
http://physnakajima.html.xdomain.jp/4D_rotation.pdf

[2] K. Hasebe, “Hopf Maps, Lowest Landau Level, and Fuzzy Spheres”, SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications **6**, 071 (2010). [arXiv:1009.1192]

[3] Y. Tian, “Matrix Representations of Octonions and Their Applications”, arXiv:math/0003166