Non-Markovian quantum state diffusion(NMQSD) equation

中嶋 慧

2014 年 11 月 14 日

目 次

1 Non-Markovian quantum state diffusion(NMQSD) equation

1.1 遷移振幅

時間発展演算子 $U(t,s)$ を、

$$\frac{U(t,s)}{\partial t} = -iH(t)U(t,s)\,, \quad U(t,t) = 1 \tag{1.1}$$

で定義する。時刻 s では波動関数が $|\psi(s)\rangle$ だったとすると、

$$|\psi(t)\rangle = U(t,s)|\psi(s)\rangle \tag{1.2}$$

である。ボゾン系を考え、消滅演算子を $\{a_i\}_{i=1}^N$ とする：

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}\,, \quad [a_i, a_j] = 0 = [a_i^\dagger, a_j^\dagger]. \tag{1.3}$$

コヒーレント状態を定義する：

$$a_i|z\rangle = z_i|z\rangle\,, \quad \langle z|z\rangle = 1. \tag{1.4}$$

これは (過剰) 完全系を成す：

$$\int d[z]\ |z\rangle\langle z| = 1\,, \quad d[z] \stackrel{\text{def}}{=} \prod_i \frac{dz_i dz_i^*}{\pi} \tag{1.5}$$

(1.2) は次のように書ける：

$$\begin{aligned}\langle z_f|\psi(t)\rangle &= \int d[z_i]\ \langle z_f|U(t,s)|z_i\rangle\langle z_i|\psi(s)\rangle \\ &\equiv \int d[z_i]\ K(z_f, t; z_i, s)\langle z_i|\psi(s)\rangle.\end{aligned} \tag{1.6}$$

経路積分では、

$$K(z_f, t_f; z_i, t_i) = \int_{z(t_i)=z_i}^{z(t_f)=z_f} \mathcal{D}[z]\ e^{iS[z]}, \tag{1.7}$$

$$S[z] = \int_{t_i}^{t_f} dt\ \Big(\frac{i}{2}\sum_i\{z_i^*(t)\frac{z_i(t)}{dt} - z_i(t)\frac{z_i^*(t)}{dt}\} - H(z(t), z^*(t))\Big) \tag{1.8}$$

と書ける。また、density operator $\rho(t)$ の時間発展は、

$$\rho(t) = U(t,s)\rho(s)U^\dagger(t,s), \tag{1.9}$$

$$\langle z_f|\rho(t)|z_f'\rangle = \int d[z] \int d[z']\ J(z_f, z_f', t; z_i, z_i', s)\langle z_i|\rho(s)|z_i'\rangle, \tag{1.10}$$

$$J(z_f, z_f', t; z_i, z_i', s) = K(z_f, t; z_i, s)K^*(z_f', t; z_i', s) \tag{1.11}$$

と書ける。経路積分では、

$$J(z_f, z_f', t; z_i, z_i', s) = \int_{z(s)=z_i}^{z(t)=z_f} \mathcal{D}[z, z^*] \int_{z'(s)=z_i'}^{z(t)=z_f'} \mathcal{D}[z', z'^*]\ e^{iS[z]-iS[z']} \tag{1.12}$$

となる。

1.2 影響汎関数

注目系 S と熱浴系 B の結合系を考える。ハミルトニアンを、

$$H \;=\; H_S + H_B + H_{SB} \tag{1.13}$$

とかく。S の粒子を $\{a_i\}_{i=1}^N$ とし、B の粒子を $\{c_k\}_k$ とする。また、

$$a_i|z\rangle \;=\; z_i|z\rangle, \quad c_k|Z\rangle = Z_k|Z\rangle \tag{1.14}$$

とする。ハミルトニアンに対応する作用は、

$$S \;=\; S_S[z] + S_B[Z] + S_{SB}[z, Z] \tag{1.15}$$

と書ける。(1.12) に対応するのは、

$$\begin{aligned}
&J(z_f, z'_f, Z_f, Z'_f, t; z_i, z'_i, Z_i, Z'_i, s) \\
&\quad = \int_{z(s)=z_i}^{z(t)=z_f} \mathcal{D}[z] \int_{z'(s)=z'_i}^{z(t)=z'_f} \mathcal{D}[z'] \int_{Z(s)=Z_i}^{Z(t)=Z_f} \mathcal{D}[Z] \int_{Z'(s)=Z'_i}^{Z(t)=Z'_f} \mathcal{D}[Z'] \\
&\qquad \times \exp i\Big[S_S[z] - S_S[z'] + S_B[Z] - S_B[Z'] + S_{SB}[z, Z] - S_{SB}[z', Z']\Big]
\end{aligned} \tag{1.16}$$

である。全系の density operator を $\rho_{\mathrm{tot}}(t)$ とすると、

$$\begin{aligned}
&\langle z_f, Z_f|\rho_{\mathrm{tot}}(t)|z'_f, Z'_f\rangle \\
&\quad = \int d[z_i]d[Z_i] \int d[z'_i]d[Z'_i]\; J(z_f, z'_f, Z_f, Z'_f, t; z_i, z'_i, Z_i, Z'_i, s)\langle z_i, Z_i|\rho_{\mathrm{tot}}(s)|z'_i, Z'_i\rangle
\end{aligned} \tag{1.17}$$

である。今、

$$\rho_S(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Tr}_B[\rho_{\mathrm{tot}}(t)] = \int d[Z]\; \langle Z|\rho_{\mathrm{tot}}(t)|Z\rangle \tag{1.18}$$

とし、$s = 0$ と、

$$\rho_{\mathrm{tot}}(0) \;=\; \rho_S(0) \otimes \rho_B(0) \tag{1.19}$$

を仮定する。このとき、

$$\begin{aligned}
\langle z_f|\rho_S(t)|z'_f\rangle &= \int d[Z_f]\; \langle z_f, Z_f|\rho_{\mathrm{tot}}(t)|z'_f, Z_f\rangle \\
&= \int d[Z_f] \int d[z_i]d[Z_i] \int d[z'_i]d[Z'_i]\; J(z_f, z'_f, Z_f, Z_f, t; z_i, z'_i, Z_i, Z'_i, s) \\
&\quad \times\langle z_i|\rho_S(0)|z'_i\rangle\langle Z_i|\rho_B(0)|Z'_i\rangle \\
&\equiv \int d[z_i] \int d[z'_i]\; \mathcal{J}(z_f, z'_f, t; z_i, z'_i, 0)\langle z_i|\rho_S(0)|z'_i\rangle
\end{aligned} \tag{1.20}$$

となる。ただし、

$$\mathcal{J}(z_f, z'_f, t; z_i, z'_i, 0) \;=\; \int d[Z_f] \int d[Z_i] \int d[Z'_i]\; J(z_f, z'_f, Z_f, Z_f, t; z_i, z'_i, Z_i, Z'_i, s)\langle Z_i|\rho_B(0)|Z'_i\rangle \tag{1.21}$$

であり、経路積分で書くと、

$$\mathcal{J}(z_f,z'_f,t;z_i,z'_i,0) \;=\; \int_{z(0)=z_i}^{z(t)=z_f}\mathcal{D}[z]\int_{z'(0)=z'_i}^{z(t)=z'_f}\mathcal{D}[z']\; e^{iS_S[z]-iS_S[z']}\mathcal{F}[z,z'], \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[z,z'] \;&\overset{\text{def}}{=}\; \int d[Z_f]\int d[Z_i]\int d[Z'_i]\int_{Z(0)=Z_i}^{Z(t)=Z_f}\mathcal{D}[Z]\int_{Z'(0)=Z'_i}^{Z'(t)=Z_f}\mathcal{D}[Z'] \\ &\times e^{iS_B[Z]-iS_B[Z']+iS_{SB}[z,Z]-iS_{SB}[z',Z']}\langle Z_i|\rho_B(0)|Z'_i\rangle,\end{aligned} \tag{1.23}$$

となる。$\mathcal{F}[z,z']$ を影響汎関数という。

1.3 演算子の方法による導出

演算子を使って、

$$\rho_{\rm tot}(t) \;=\; {\rm T}e^{-i\int_0^t dt\;H}\rho_{\rm tot}(0)\tilde{\rm T}e^{i\int_0^t dt\;H} \tag{1.24}$$

である。以下、

$$H_B \;=\; \sum_k \omega_k c_k^\dagger c_k(=\sum_b H_b), \tag{1.25}$$

$$H_{SB} \;=\; \sum_{A=1}^m L_A^\dagger\sum_k g_{k,A}c_k + \text{h.c.}, \tag{1.26}$$

$$\rho_B(0) \;=\; \bigotimes_b e^{-\beta_b H_b}/{\rm Tr}_b[e^{-\beta_b H_b}] \tag{1.27}$$

の場合を考える。注目系 S に対して経路積分表示を取ると、

$$\begin{aligned}\langle z_f|\rho_{\rm tot}(t)|z'_f\rangle \;&=\; \int d[z_i]\int d[z'_i]\int_{z(0)=z_i}^{z(t)=z_f}\mathcal{D}[z]\int_{z'(0)=z'_i}^{z'(t)=z'_f}\mathcal{D}[z']\; e^{iS_S[z]-iS_S[z']} \\ &{\rm T}e^{-i\int_0^t dt\;[H_B+H_{SB}(z(t))]}\langle z_i|\rho_S(0)|z'_i\rangle\rho_B(0)\tilde{\rm T}e^{i\int_0^t dt\;[H_B+H_{SB}(z'(t))]}\end{aligned} \tag{1.28}$$

となる。$H_{SB}(z(t))$ は H_{SB} の $a_i,a_i^\dagger$ に $z_i(t),z_i^*(t)$ を代入したものである。両辺の ${\rm Tr}_B$ を取って、

$$\begin{aligned}\langle z_f|\rho_S(t)|z'_f\rangle \;&=\; \int d[z_i]\int d[z'_i]\;\langle z_i|\rho_S(0)|z'_i\rangle\int_{z(0)=z_i}^{z(t)=z_f}\mathcal{D}[z]\int_{z'(0)=z'_i}^{z'(t)=z'_f}\mathcal{D}[z']\; e^{iS_S[z]-iS_S[z']} \\ &{\rm Tr}_B\Big[{\rm T}e^{-i\int_0^t dt\;[H_B+H_{SB}(z(t))]}\rho_B(0)\tilde{\rm T}e^{i\int_0^t dt\;[H_B+H_{SB}(z'(t))]}\Big]\end{aligned} \tag{1.29}$$

となるから、(1.22) と比較して、

$$\mathcal{F}[z,z'] \;=\; {\rm Tr}_B\Big[{\rm T}e^{-i\int_0^t dt\;[H_B+H_{SB}(z(t))]}\rho_B(0)\tilde{\rm T}e^{i\int_0^t dt\;[H_B+H_{SB}(z'(t))]}\Big] \tag{1.30}$$

を得る。今、

$${\rm T}e^{-i\int_0^t dt\;[H_B+H_{SB}(z(t))]} \;\equiv\; e^{-iH_Bt}U[z](t), \tag{1.31}$$

とする。このとき、

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[z,z'] \;&=\; {\rm Tr}_B\big[e^{-iH_Bt}U[z](t)\rho_B(0)U^\dagger[z'](t)e^{iH_Bt}\big] \\ &=\; {\rm Tr}_B\big[\rho_B(0)U^\dagger[z'](t)e^{iH_Bt}e^{-iH_Bt}U[z](t)\big] \\ &=\; {\rm Tr}_B\big[\rho_B(0)U^\dagger[z'](t)U[z](t)\big]\end{aligned} \tag{1.32}$$

となる。(1.31) を微分して、

$$
\begin{aligned}
-i[H_B + H_{SB}(z(t))]e^{-iH_Bt}U[z](t) &= -iH_Be^{-iH_Bt}U[z](t) + e^{-iH_Bt}\frac{dU[z](t)}{dt}, \\
\frac{dU[z](t)}{dt} &= -ie^{iH_Bt}H_{SB}(z(t))e^{-iH_Bt}U[z](t) \\
&\equiv -iH^I_{SB}(z(t))U(t)
\end{aligned}
\tag{1.33}
$$

を得る。よって、

$$
U[z](t) = \mathrm{T}e^{-i\int_0^t dt\ H^I_{SB}(z(t))} \tag{1.34}
$$

となり、

$$
U^\dagger[z'](t)U[z](t) = \tilde{\mathrm{T}}_C e^{i\int_C d\tau\ H^I_{SB}(z(\tau))}, \tag{1.35}
$$

$$
\mathcal{F}[z, z'] = \mathrm{Tr}_B\left[\rho_B(0)\tilde{\mathrm{T}}_C e^{i\int_C d\tau\ H^I_{SB}(z(\tau))}\right] \tag{1.36}
$$

となる。ここで、C は

$$
C : 0 + i0 \to t + i0 \to t - i0 \to 0 - i0 \tag{1.37}
$$

のような回路で、$\tilde{\mathrm{T}}_C$ は C 上の過去が左に来るように並べる。$z(\tau = t + i0) = z'(t)$, $z(\tau = t - i0) = z(t)$ である。今、

$$
A \overset{\text{def}}{=} i\int_0^t dt\ H^I_{SB}(z'(t)), \quad B \overset{\text{def}}{=} -i\int_0^t dt\ H^I_{SB}(z(t)) \tag{1.38}
$$

とすると、

$$
\mathcal{F}[z, z'] = \mathrm{Tr}_B\left[\rho_B(0)\tilde{\mathrm{T}}_C e^A e^B\right] \tag{1.39}
$$

と書ける。A, B は反エルミートであり、$c_k, c_k^\dagger$ の 1 次なので、

$$
A = \sum_k [A_k^* c_k - A_k c_k^\dagger], \quad B = \sum_k [B_k^* c_k - B_k c_k^\dagger] \tag{1.40}
$$

とかける。

$$
\begin{aligned}
[A, B] &= -\sum_{k,l}\left(A_k^* B_l [c_k, c_l^\dagger] + A_k B_l^* [c_k^\dagger, c_l]\right) \\
&= -\sum_k (A_k^* B_k - A_k B_k^*)
\end{aligned}
\tag{1.41}
$$

であり、

$$
[A, [A, B]] = 0 = [B, [A, B]] \tag{1.42}
$$

なので、

$$
e^A e^B = e^{\frac{[A,B]}{2}} e^{A+B} \tag{1.43}
$$

となる。したがって、

$$
\mathcal{F}[z, z'] = \langle e^{\frac{[A,B]}{2}} \tilde{\mathrm{T}}_C e^{A+B}\rangle, \quad \langle\cdots\rangle \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Tr}_B[\rho_B(0)\cdots] \tag{1.44}
$$

を得る。Wick の定理 (§ 2.2) より、

$$\langle \tilde{\mathrm{T}}_C e^{A+B} \rangle \;=\; \exp\Big[\langle \tilde{\mathrm{T}}_C \frac{(A+B)^2}{2} \rangle\Big] \tag{1.45}$$

なので、

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[z,z'] \;&=\; \langle e^{\frac{[A,B]}{2}} \tilde{\mathrm{T}}_C e^{A+B} \rangle \\ &=\; \exp\Big[\langle \tilde{\mathrm{T}}_C [\frac{AB-BA}{2} + \frac{A^2+B^2+AB+BA}{2}]\rangle\Big] \\ &=\; \exp\Big[\langle \tilde{\mathrm{T}}_C [\frac{A^2+B^2}{2} + AB]\rangle\Big] \equiv e^{\mathcal{A}_B[z,z']}\end{aligned} \tag{1.46}$$

を得る。ここで、$\tilde{\mathrm{T}}_C[A,B] = [A,B]$ を使った。

(1.38), (1.26) より、

$$\begin{aligned}A \;&=\; i\int_0^t dt\;\sum_{A=1}^m \big\{L_A^*[z'(t),z'^*(t)]\sum_k g_{k,A}c_k e^{-i\omega_k t} + \sum_k g_{k,A}c_k^\dagger e^{i\omega_k t} L_A[z'(t),z'^*(t)]\big\} \\ &\equiv\; \int_0^t dt\;\sum_{A=1}^m \big\{L_A^*[z'(t),z'^*(t)]C_A(t) - C_A^\dagger(t) L_A[z'(t),z'^*(t)]\big\},\end{aligned} \tag{1.47}$$

$$C_A(t) \;=\; i\sum_k g_{k,A}c_k e^{-i\omega_k t}, \tag{1.48}$$

$$B \;=\; -\int_0^t dt\;\sum_{A=1}^m \big\{L_A^*[z(t),z^*(t)]C_A(t) - C_A^\dagger(t) L_A[z(t),z^*(t)]\big\} \tag{1.49}$$

である。今、

$$C_{A-}(t) \overset{\mathrm{def}}{=} -C_A^\dagger(t)\,, \quad C_{A+}(t) \;\overset{\mathrm{def}}{=}\; C_A(t) \tag{1.50}$$

とし、(2.63) の記号

$$l_{A-}(t) = L_A[z(t),z^*(t)],\; l_{A+}(t) = L_A^*[z(t),z^*(t)],\; l'_{A-}(t) = L_A[z'(t),z'^*(t)] \tag{1.51}$$

を使うと、

$$A \;=\; \int_0^t dt\;\sum_{A=1}^m\sum_{\alpha=\pm} l'_{A\alpha}(t)C_{A\alpha}(t), \tag{1.52}$$

$$B \;=\; -\int_0^t dt\;\sum_{A=1}^m\sum_{\alpha=\pm} l_{A\alpha}(t)C_{A\alpha}(t) \tag{1.53}$$

となる。よって、$\mathcal{A}_B[z,z']$ は、

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}_B[z,z'] = \langle \tilde{\mathrm{T}}_C [\frac{A^2+B^2}{2} + AB]\rangle \\ &= \sum_{A,B}\sum_{\alpha,\beta=\pm}\int_0^t dt_1\int_0^t dt_2\;\Big[\frac{1}{2} l_{A\alpha}(t_1)\langle \mathrm{T} C_{A\alpha}(t_1)C_{B\beta}(t_2)\rangle l_{B\beta}(t_2) \\ &\quad - l'_{A\alpha}(t_1)\langle C_{A\alpha}(t_1)C_{B\beta}(t_2)\rangle l_{B\beta}(t_2) + \frac{1}{2} l'_{A\alpha}(t_1)\langle \tilde{\mathrm{T}} C_{A\alpha}(t_1)C_{B\beta}(t_2)\rangle l'_{B\beta}(t_2)\Big]\end{aligned} \tag{1.54}$$

となる。ここで、$\tilde{\mathrm{T}}_C$ を $\mathrm{T}, \tilde{\mathrm{T}}$ に直した。$t_1 > t_2$ からの寄与を $\mathcal{A}_B^{(+)}$, $t_1 < t_2$ からの寄与を $\mathcal{A}_B^{(-)}$ とかくと、

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_B^{(+)} &= \sum_{A,B} \sum_{\alpha,\beta=\pm} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ \Big[\frac{1}{2} l_{A\alpha}(t_1)\langle C_{A\alpha}(t_1) C_{B\beta}(t_2)\rangle l_{B\beta}(t_2) \\
&\quad -l'_{A\alpha}(t_1)\langle C_{A\alpha}(t_1) C_{B\beta}(t_2)\rangle l_{B\beta}(t_2) + \frac{1}{2} l'_{A\alpha}(t_1)\langle C_{B\beta}(t_2) C_{A\alpha}(t_1)\rangle l'_{B\beta}(t_2)\Big], \qquad (1.55) \\
\mathcal{A}_B^{(-)} &= \sum_{A,B} \sum_{\alpha,\beta=\pm} \int_0^t dt_2 \int_0^{t} dt_1 \ \Big[\frac{1}{2} l_{A\alpha}(t_1)\langle C_{B\beta}(t_2) C_{A\alpha}(t_1)\rangle l_{B\beta}(t_2) \\
&\quad -l'_{A\alpha}(t_1)\langle C_{A\alpha}(t_1) C_{B\beta}(t_2)\rangle l_{B\beta}(t_2) + \frac{1}{2} l'_{A\alpha}(t_1)\langle C_{A\alpha}(t_1) C_{B\beta}(t_2)\rangle l'_{B\beta}(t_2)\Big] \\
&= \sum_{A,B} \sum_{\alpha,\beta=\pm} \int_0^t dt_2 \int_0^{t} dt_1 \ \Big[\frac{1}{2} l_{B\beta}(t_2)\langle C_{B\beta}(t_2) C_{A\alpha}(t_1)\rangle l_{A\alpha}(t_1) \\
&\quad -l_{B\beta}(t_2)\langle C_{A\alpha}(t_1) C_{B\beta}(t_2)\rangle l'_{A\alpha}(t_2) + \frac{1}{2} l'_{B\beta}(t_2)\langle C_{A\alpha}(t_1) C_{B\beta}(t_2)\rangle l'_{A\alpha}(t_1)\Big] \\
&= \sum_{A,B} \sum_{\alpha,\beta=\pm} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ \Big[\frac{1}{2} l_{A\alpha}(t_1)\langle C_{A\alpha}(t_1) C_{B\beta}(t_2)\rangle l_{B\beta}(t_2) \\
&\quad -l_{A\alpha}(t_1)\langle C_{B\beta}(t_2) C_{A\alpha}(t_1)\rangle l'_{B\beta}(t_2) + \frac{1}{2} l'_{A\alpha}(t_1)\langle C_{B\beta}(t_2) C_{A\alpha}(t_1)\rangle l'_{B\beta}(t_2)\Big] \qquad (1.56)
\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \mathcal{A}_B^{(+)} + \mathcal{A}_B^{(-)} \\
&= \sum_{A,B} \sum_{\alpha,\beta=\pm} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ \Big[l_{A\alpha}(t_1)\langle C_{A\alpha}(t_1) C_{B\beta}(t_2)\rangle l_{B\beta}(t_2) \\
&\quad -l'_{A\alpha}(t_1)\langle C_{A\alpha}(t_1) C_{B\beta}(t_2)\rangle l_{B\beta}(t_2) - l_{A\alpha}(t_1)\langle C_{B\beta}(t_2) C_{A\alpha}(t_1)\rangle l'_{B\beta}(t_2) \\
&\quad +l'_{A\alpha}(t_1)\langle C_{B\beta}(t_2) C_{A\alpha}(t_1)\rangle l'_{B\beta}(t_2)\Big] \qquad (1.57)
\end{aligned}$$

を得る。$(\alpha, \beta) = (+,-), (-,+)$ の項のみが残り、$(\alpha, \beta) = (-,-), (+,+)$ の項は消える。

ところで、(1.46) より、

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[z, z'] &= \exp\Big[\langle \tilde{\mathrm{T}}_C[\frac{A^2+B^2}{2} + AB]\rangle\Big] \\
&= \exp\Big[\langle \tilde{\mathrm{T}}_C[\frac{A^2+B^2}{2}]\rangle\Big] \exp\Big[\langle \tilde{\mathrm{T}}_C AB\rangle\Big] \qquad (1.58)
\end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}
\exp\Big[\langle \tilde{\mathrm{T}}_C[\frac{A^2+B^2}{2}]\rangle\Big] &= \exp\Big(-\sum_{A,B} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ \Big\{L_A[z(t_1), z^*(t_1)]\langle C_A^\dagger(t_1) C_B(t_2)\rangle L_B^*[z(t_2), z^*(t_2)] \\
&\quad +L_A^*[z(t_1), z^*(t_1)]\langle C_A(t_1) C_B^\dagger(t_2)\rangle L_B[z(t_2), z^*(t_2)] \\
&\quad +L_A[z'(t_1), z'^*(t_1)]\langle C_B(t_2) C_A^\dagger(t_1)\rangle L_B^*[z'(t_2), z'^*(t_2)] \\
&\quad +L_A^*[z'(t_1), z'^*(t_1)]\langle C_B^\dagger(t_2) C_A(t_1)\rangle L_B[z'(t_2), z'^*(t_2)]\Big\}\Big) \qquad (1.59)
\end{aligned}$$

は、z と z' とを両方同時に含む項は持たず、

$$\begin{aligned}
\exp\Big[\langle \tilde{\mathrm{T}}_C AB\rangle\Big] &= \exp\Big(\sum_{A,B} \int_0^t dt_1 \int_0^{t} dt_2 \ \Big\{L_A[z(t_1), z^*(t_1)]\langle C_B(t_2) C_A^\dagger(t_1)\rangle L_B^*[z'(t_2), z'^*(t_2)] \\
&\quad +L_A^*[z(t_1), z^*(t_1)]\langle C_B^\dagger(t_2) C_A(t_1)\rangle L_B[z'(t_2), z'^*(t_2)]\Big\}\Big) \qquad (1.60)
\end{aligned}$$

は z と z' とを両方同時に含む項のみを持つ。絶対零度では、$\langle C_B^\dagger(t_2)C_A(t_1)\rangle = 0$ なので、Wick の定理 (1.45) より、

$$
\begin{aligned}
\exp\left[\langle \tilde{\mathrm{T}}_C AB\rangle\right] &= \Big\langle \tilde{\mathrm{T}}_C \exp\Big[\int_0^t dt\ \sum_{A=1}^m \big(L_A^*[z'(t), z'^*(t)]C_A(t) + C_A^\dagger(t)L_A[z(t), z^*(t)]\big)\Big]\Big\rangle \\
&= \mathrm{Tr}_B\Big[\mathrm{T}e^{\int_0^t dt\ \sum_A C_A^\dagger(t)L_A[z(t),z^*(t)]}|0\rangle\langle 0|\tilde{\mathrm{T}}e^{\int_0^t dt\ \sum_A L_A^*[z'(t),z'^*(t)]C_A(t)}\Big] \quad (T_b = \beta_b^{-1} = 0)
\end{aligned} \tag{1.61}
$$

とかけ、z と z' とは分離する。[2] はこれを $L_A = x \propto a + a^\dagger$ $(\#\{A\} = m = 1)$ の場合に示した。[4](1998) の付録で TFD による有限温度への拡張が議論され、[6] でより詳細に示された。

1.4 Non-Markov Schrödinger-Langevin 方程式

この節では、$T_b = 0$ の場合を考える。

(1.61) は、

$$
\begin{aligned}
\exp\left[\langle \tilde{\mathrm{T}}_C AB\rangle\right] &= \int d[Z]\ \langle Z|X(c^\dagger)|0\rangle\langle 0|Y(c)|Z\rangle \\
&= \int d[Z]\ |\langle Z|0\rangle|^2\ X(Z^*)Y(Z)
\end{aligned} \tag{1.62}
$$

のように計算できる。よって、

$$
\begin{aligned}
\exp\left[\langle \tilde{\mathrm{T}}_C AB\rangle\right] &= \int d[Z]\ |\langle Z|0\rangle|^2 \\
&\quad \times\ \exp\Big[\int_0^t dt\ \sum_{A=1}^m \big(L_A^*[z'(t), z'^*(t)]Z_A(t) + Z_A^*(t)L_A[z(t), z^*(t)]\big)\Big],
\end{aligned} \tag{1.63}
$$

$$
Z_A(t) \overset{\mathrm{def}}{=} i\sum_k g_{k,A}Z_k e^{-i\omega_k t} \tag{1.64}
$$

であり、(1.22) は、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}(z_f, z_f', t; z_i, z_i', 0) &= \int_{z(0)=z_i}^{z(t)=z_f} \mathcal{D}[z] \int_{z'(0)=z_i'}^{z(t)=z_f'} \mathcal{D}[z']\ e^{iS_S[z]-iS_S[z']}\mathcal{F}[z, z'] \\
&= \int d[Z]\ |\langle Z|0\rangle|^2\ G_Z(z_f, t; z_i, 0)G_Z^*(z_f', t; z_i', 0),
\end{aligned} \tag{1.65}
$$

$$
\begin{aligned}
G_Z(z_f, t; z_i, 0) &\overset{\mathrm{def}}{=} \int_{z(0)=z_i}^{z(t)=z_f} \mathcal{D}[z]\ \exp\Big[iS_S[z] + \int_0^t dt\ \sum_{A=1}^m Z_A^*(t)L_A[z(t), z^*(t)] \\
&\quad - \sum_{A,B}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2\ L_A^*[z(t_1), z^*(t_1)]\langle C_A(t_1)C_B^\dagger(t_2)\rangle L_B[z(t_2), z^*(t_2)]\Big]
\end{aligned} \tag{1.66}
$$

と書ける。$G_Z(z_f, t; z_i, 0)$ に対応する $G_Z(t, 0)$、すなわち、

$$
G_Z(z_f, t; z_i, 0) = \langle z_f|G_Z(t, 0)|z_i\rangle \tag{1.67}
$$

を満たす $G_Z(t,0)$ を定義すると、(1.20) は、

$$\begin{aligned}\langle z_f|\rho_S(t)|z_f'\rangle &= \int d[z_i]\int d[z_i']\ \mathcal{J}(z_f,z_f',t;z,z',0)\langle z_i|\rho_S(0)|z_i'\rangle \\ &= \int d[z]\int d[z']\int d[Z]\ |\langle Z|0\rangle|^2\ \langle z_f|G_Z(t,0)|z_i\rangle\langle z_i|\rho_S(0)|z_i'\rangle\langle z_i'|G_Z^\dagger(t,0)|z_f'\rangle \\ &= \int d[Z]\ |\langle Z|0\rangle|^2\ \langle z_f|G_Z(t,0)\rho_S(0)G_Z^\dagger(t,0)|z_f'\rangle, \qquad (1.68)\\ \rho_S(t) &= \int d[Z]\ |\langle Z|0\rangle|^2 G_Z(t,0)\rho_S(0)G_Z^\dagger(t,0) \qquad (1.69)\end{aligned}$$

となる。今、

$$\rho_S(0) = \sum_i p_i|\psi_i(0)\rangle\langle\psi_i(0)|,\quad \sum_i p_i = 1 \tag{1.70}$$

とする。更に、

$$|\psi_i(Z,t)\rangle \overset{\text{def}}{=} G_Z(t,0)|\psi_i(0)\rangle \tag{1.71}$$

を定義すると、

$$\begin{aligned}\rho_S(t) &= \sum_i p_i\overline{|\psi_i(Z,t)\rangle\langle\psi_i(Z,t)|}, \qquad (1.72)\\ \overline{F(Z)} &\overset{\text{def}}{=} \int d[Z]\ |\langle Z|0\rangle|^2 F(Z) \\ &= \int\prod_k \frac{dZ_k dZ_k^*}{\pi}e^{-Z_kZ_k^*}\ F(Z) \qquad (1.73)\end{aligned}$$

を得る。

(1.72) より、$|\psi_i(Z,t)\rangle$ を解いて、(1.73) の平均を取れば $\rho_S(t)$ が求まる。$|\psi_i(Z,t)\rangle$ の方程式を (Non-Markov) Schrödinger-Langevin 方程式という。

$$Z_A(t) \overset{\text{def}}{=} i\sum_k g_{k,A}Z_k e^{-i\omega_k t}$$

は乱雑力の微視的な表現で、

$$\begin{aligned}\overline{Z_k} &= 0 = \overline{Z_k^*},\quad \overline{Z_kZ_j} = 0 = \overline{Z_k^*Z_j^*}, \qquad (1.74)\\ \overline{Z_kZ_j^*} &= 0 = \overline{Z_k^*Z_j} = \delta_{ij} \qquad (1.75)\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}\overline{Z_A(t)} &= 0 = \overline{Z_A^*(t)},\quad \overline{Z_A(t)Z_B(s)} = 0 = \overline{Z_A^*(t)Z_B^*(s)}, \qquad (1.76)\\ \overline{Z_A(t)Z_B^*(s)} &= \sum_k g_{k,A}g_{k,B}^* e^{-i\omega_k(t-s)} = \langle 0|C_A(t)C_B^\dagger(s)|0\rangle \equiv \alpha_{AB}(t-s) \qquad (1.77)\end{aligned}$$

となる。$\alpha_{AB}(t-s)$ を使うと、(1.66) は、

$$\begin{aligned}G_Z(z_f,t;z_i,0) &= \int_{z(0)=z_i}^{z(t)=z_f}\mathcal{D}[z]\ \exp\Big[iS_S[z]+\int_0^t dt\ \sum_{A=1}^m Z_A^*(t)L_A[z(t),z^*(t)] \\ &\quad -\sum_{A,B}\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\ L_A^*[z(t_1),z^*(t_1)]\alpha_{AB}(t_1-t_2)L_B[z(t_2),z^*(t_2)]\Big] \qquad (1.78)\end{aligned}$$

となる。

1.5　有限温度への拡張

1.5.1　TFD

[6] をもとに議論する。A, B をもとの演算子 $c_k^\dagger, c_k$ の関数とし、そのチルダ共役を次のルールで導入する：

$$(AB)^\sim = \tilde{A}\tilde{B}, \tag{1.79}$$

$$c^\sim = c^* \quad (c \in \boldsymbol{C}), \tag{1.80}$$

$$(A+B)^\sim = \tilde{A} + \tilde{B}, \tag{1.81}$$

$$(\tilde{A})^\sim = A, \tag{1.82}$$

$$[\tilde{A}, B] = 0. \tag{1.83}$$

$\tilde{A}$ は A のチルダ共役である。さらに、基底のチルダ共役を、

$$(A|n\rangle)^\sim = \tilde{A}|n\rangle^\sim \tag{1.84}$$

で導入する。もとのヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ とし、そのチルダ共役を $\tilde{\mathcal{H}}$ とする。$\tilde{A}$ は $\tilde{\mathcal{H}}$ の元にのみ作用する。今、$\{|n\rangle\}$ を $\mathcal{H}$ の任意の規格直交完全系とし、

$$|I\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n |n, n\rangle, \tag{1.85}$$

$$|n, m\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |n\rangle \otimes |m\rangle^\sim \in \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}} \tag{1.86}$$

とする。もとの演算子 $c_k^\dagger, c_k$ の関数 A に対して、

$$\begin{aligned}\langle I|A|I\rangle &= \sum_{n,m} \langle n, n|A|m, m\rangle \\ &= \sum_{n,m} \langle n|A|m\rangle [\langle n|m\rangle]^\sim \\ &= \sum_n \langle n|A|n\rangle \\ &= \mathrm{Tr}(A)\end{aligned} \tag{1.87}$$

である。密度演算子 $\rho (= \rho^\dagger)$ を用いて、ケット真空, ブラ真空を、

$$|0_\alpha\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \rho^\alpha |I\rangle \quad (0 \leq \alpha \leq 1), \tag{1.88}$$

$$\langle 1_\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \langle I|\rho^{1-\alpha}, \tag{1.89}$$

で導入する。これを用いて、

$$\begin{aligned}\langle 1_\alpha|A|0_\alpha\rangle &= \mathrm{Tr}[\rho^{1-\alpha} A \rho^\alpha] \\ &= \mathrm{Tr}[\rho A]\end{aligned} \tag{1.90}$$

となる。

$|I\rangle$ はチルダ不変である：

$$|I\rangle^\sim = |I\rangle. \tag{1.91}$$

また、A を $\mathcal{H}$ のエルミート演算子とすると、$A|I\rangle$ もチルダ不変である。実際、$\{|n\rangle\}$ を A の固有状態 $(A|n\rangle = A_n|n\rangle,\ A_n^* = A_n)$ と選べば、

$$\begin{aligned} A|I\rangle &= \sum_n A_n|n,n\rangle \\ &= [\sum_n A_n|n,n\rangle]^{\sim} \\ &= (A|I\rangle)^{\sim} \end{aligned} \tag{1.92}$$

となる。よって、ケット真空, ブラ真空もチルダ不変である：

$$|0_\alpha\rangle^{\sim} = |0_\alpha\rangle, \quad \langle 1_\alpha|^{\sim} = \langle 1_\alpha|. \tag{1.93}$$

以下、$\alpha = 1/2$ とする。この場合、

$$\langle 1_{1/2}| = |0_{1/2}\rangle^\dagger \tag{1.94}$$

である。添え字 $_{1/2}$ も以下では省く。

1.5.2 有限温度の Non-Markov Schrödinger-Langevin 方程式

熱的 Bogoliubov 変換

$$c_k = \sqrt{n_k+1}\xi_k(\beta) + \sqrt{n_k}\tilde{\xi}_k^\dagger(\beta), \quad n_k = \frac{1}{e^{\beta_b(\omega_k-\mu_b)}-1}\ (k \in b) \tag{1.95}$$

をする。また、

$$|0(\beta)\rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \rho_B^{1/2}(\beta)|I\rangle, \quad \rho_B(\beta) = \bigotimes_b e^{-\beta_b H_b - \mu_b\beta_b N_b}/\mathrm{Tr}_b[e^{-\beta_b H_b - \mu_b\beta_b N_b}] \tag{1.96}$$

とする。$\xi_k(\beta)$ はケット真空 $|0(\beta)\rangle$ の消滅演算子である：

$$\xi_k(\beta)|0(\beta)\rangle = 0 = \tilde{\xi}_k(\beta)|0(\beta)\rangle. \tag{1.97}$$

TFD の利点は、統計平均 $\mathrm{Tr}_B[\rho_B(0)A(c_k^\dagger, c_k)]$ を真空平均 $\langle 0(\beta)|A(c_k^\dagger, c_k)|0(\beta)\rangle$ で求められる事である。そして、c_k を ξ_k, $\tilde{\xi}_k$ で書くと、上式が使えて便利である。§ 2.2 の有限温度の Wick の定理も、TFD を使えば容易に証明できる。

B 系のヒルベルト空間を $\mathcal{H}_B$ とし、そのチルダ共役を $\tilde{\mathcal{H}}_B$ とする。通常、$\mathcal{H}_B \times \tilde{\mathcal{H}}_B$ 上のトレース $\mathrm{Tr}_{B,\tilde{B}}$ は上の理由で不要である。しかし、あえてこれを使い、

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_B[\rho_B(\beta)\bullet] &= \langle \bullet \rangle = \langle 0(\beta)| \bullet |0(\beta)\rangle \\ &= \mathrm{Tr}_{B,\tilde{B}}[|0(\beta)\rangle\langle 0(\beta)|\bullet] \end{aligned} \tag{1.98}$$

とかく。更に、X, Y を c_k, $c_k^\dagger$ の関数とすると、

$$\begin{aligned} \langle XY \rangle &= \mathrm{Tr}_{B,\tilde{B}}[|0(\beta)\rangle\langle 0(\beta)|XY] \\ &= \mathrm{Tr}_{B,\tilde{B}}[Y|0(\beta)\rangle\langle 0(\beta)|X] \end{aligned} \tag{1.99}$$

である。よって、先の真空の場合の (1.61) を有限温度に拡張できる。今、コヒーレント状態を

$$\xi_k|Z^+\rangle = Z_k^+|Z^+\rangle, \quad \tilde{\xi}_k|Z^-\rangle = Z_k^-|Z^-\rangle \tag{1.100}$$

で定義すると、$\mathrm{Tr}_{B,\tilde{B}}$ は、

$$\mathrm{Tr}_{B,\tilde{B}}[\cdots] = \int d[Z^+] \int d[Z^-] \, \langle Z^-|\langle Z^+| \cdots |Z^+\rangle|Z^-\rangle \tag{1.101}$$

と書ける。

(1.38) の A, B

$$A = i\int_0^t dt \; H^I_{SB}(z'(t)), \quad B = -i\int_0^t dt \; H^I_{SB}(z(t)) \tag{1.102}$$

を $\xi_k, \tilde{\xi}_k$ で書く。(1.95) より、

$$\begin{aligned} H^I_{SB}(z(t)) &= \sum_{A=1}^m (L_A^* \sum_k g_{k,A} e^{-i\omega_k t} c_k + \sum_k g^*_{k,A} e^{i\omega_k t} c_k^\dagger L_A) \\ &= \sum_{A=1}^m (L_A^* \sum_k \sqrt{n_k+1} g_{k,A} e^{-i\omega_k t} \xi_k + \sum_k \sqrt{n_k+1} g^*_{k,A} e^{i\omega_k t} \xi_k^\dagger L_A) \\ &\quad + \sum_{A=1}^m (L_A^* \sum_k \sqrt{n_k} e^{-i\omega_k t} g_{k,A} \tilde{\xi}_k^\dagger + \sum_k \sqrt{n_k} g^*_{k,A} e^{i\omega_k t} \tilde{\xi}_k L_A) \end{aligned} \tag{1.103}$$

となる。引数 $z(t), z^*(t)$ は省略した。今、

$$c_{k+} \stackrel{\text{def}}{=} \xi_k \, , \quad c_{k-} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\xi}_k, \tag{1.104}$$

$$g_{k+}(t) \stackrel{\text{def}}{=} g_k \sqrt{n_k+1} e^{-i\omega_k t}, \quad g_{k-}(t) \stackrel{\text{def}}{=} g_k^* \sqrt{n_k} e^{i\omega_k t}, \tag{1.105}$$

$$L_{A+} \stackrel{\text{def}}{=} L_A \, , \quad L_{A-} \stackrel{\text{def}}{=} L_A^* \tag{1.106}$$

とかく。$T_b = 0$ の場合の定式化で、置き換え $\sum_k \bullet_k \to \sum_k \sum_{a=\pm} \bullet_{ka}$($\bullet$ は上式のどれか) をすると、有限温度への移行できる。$Z_A(t) = i\sum_k g_{k,A} Z_k e^{-i\omega_k t}$ は、

$$Z_{A+}(t) \stackrel{\text{def}}{=} i\sum_k g_{k,A} \sqrt{n_k+1} e^{-i\omega_k t} Z_k^+ \, , \quad Z_{A-}(t) \stackrel{\text{def}}{=} i\sum_k g^*_{k,A} \sqrt{n_k} e^{i\omega_k t} Z_k^- \tag{1.107}$$

に置き換わる [1]。また、$\overline{\cdots}$ も、

$$\overline{F(Z^+, Z^-)} \stackrel{\text{def}}{=} \int \prod_k \frac{dZ_k^+ dZ_k^{+*}}{\pi} e^{-Z_k^+ Z_k^{+*}} \int \prod_k \frac{dZ_k^- dZ_k^{-*}}{\pi} e^{-Z_k^- Z_k^{-*}} \; F(Z^+, Z^-) \tag{1.108}$$

と一般化され、

$$\alpha_{AB}(t-s) = \sum_k g_{k,A} g^*_{k,B} e^{-i\omega_k (t-s)}$$

は、

$$\alpha^+_{AB}(t-s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k (n_k+1) g_{k,A} g^*_{k,B} e^{-i\omega_k(t-s)}, \quad \alpha^-_{AB}(t-s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k n_k g^*_{k,A} g_{k,B} e^{i\omega_k(t-s)} \tag{1.109}$$

[1] Z^+, Z^- のように Z の自由度を倍加したのが本質的である。(1.98), (1.99) が巧妙。

となる。最終的に、$\sum_A \bullet_A \to \sum_A \sum_{a=\pm} \bullet_{Aa}$ の置き換えで移行が完了する。(1.78) は、

$$\begin{aligned}
G_Z(z_f, t; z_i, 0) \;=\; & \int_{z(0)=z_i}^{z(t)=z_f} \mathcal{D}[z] \;\exp\Big[iS_S[z] + \int_0^t dt \;\sum_{A=1}^{m} Z_{A+}^*(t) L_A[z(t), z^*(t)] \\
& - \sum_{A,B} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \; L_A^*[z(t_1), z^*(t_1)] \alpha_{AB}^+(t_1 - t_2) L_B[z(t_2), z^*(t_2)] \\
& + \int_0^t dt \;\sum_{A=1}^{m} Z_{A-}^*(t) L_A^*[z(t), z^*(t)] \\
& - \sum_{A,B} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \; L_A[z(t_1), z^*(t_1)] \alpha_{AB}^-(t_1 - t_2) L_B^*[z(t_2), z^*(t_2)] \Big]
\end{aligned} \tag{1.110}$$

と一般化される。

1.6 NMQSD 導出

ボゾン系 B と結合した系 S を考える。系 S もボゾン系と仮定するが、一般にはこの仮定は不要である。B のハミルトニアンと相互作用として、

$$H_B \;=\; \sum_k \omega_k c_k^\dagger c_k (= \sum_b H_b), \tag{1.111}$$

$$H_{SB} \;=\; \sum_{A=1}^{m} L_A^\dagger \sum_k g_{k,A} c_k + \mathrm{h.c.} \tag{1.112}$$

を考える。$L_A = L_A[a, a^\dagger]$ は注目系の粒子 $a_i, a_i^\dagger$ の関数である。全系の初期状態として、

$$\rho_{\mathrm{tot}}(0) \;=\; \rho_S(0) \otimes \rho_B(0), \tag{1.113}$$

$$\rho_B(0) \;=\; \bigotimes_b e^{-\beta_b H_b - \mu_b \beta_b N_b} / \mathrm{Tr}_b[e^{-\beta_b H_b - \mu_b \beta_b N_b}], \tag{1.114}$$

$$\rho_S(0) \;=\; \sum_i p_i |\psi_i(0)\rangle\langle\psi_i(0)|, \quad \sum_i p_i = 1 \tag{1.115}$$

を仮定すると、$\rho_S(t) = \mathrm{Tr}_B[\rho_{\mathrm{tot}}(t)]$ は、

$$\rho_S(t) \;=\; \sum_i p_i \overline{|\psi_i(Z^+, Z^-, t)\rangle\langle\psi_i(Z^+, Z^-, t)|}, \tag{1.116}$$

$$|\psi_i(Z^+, Z^-, t)\rangle \;=\; G_Z(t, 0)|\psi_i(0)\rangle, \tag{1.117}$$

$$\overline{\cdots} \;\stackrel{\mathrm{def}}{=}\; \int \prod_k \frac{dZ_k^+ dZ_k^{+*}}{\pi} e^{-Z_k^+ Z_k^{+*}} \int \prod_k \frac{dZ_k^- dZ_k^{-*}}{\pi} e^{-Z_k^- Z_k^{-*}} \;\cdots \tag{1.118}$$

とかける。ここで、$Z^\pm$ は、

$$Z_{A+}(t) \;\stackrel{\mathrm{def}}{=}\; i \sum_k g_{k,A} \sqrt{n_k + 1} e^{-i\omega_k t} Z_k^+, \quad Z_{A-}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} i \sum_k g_{k,A}^* \sqrt{n_k} e^{i\omega_k t} Z_k^- \tag{1.119}$$

の組 $\{Z_{A\pm}\}$ を表わす。$G_Z(t,0)$ は、

$$\begin{aligned}
G_Z(z_f,t;z_i,0) &= \langle z_f|G_Z(t,0)|z_i\rangle \\
&= \int_{z(0)=z_i}^{z(t)=z_f} \mathcal{D}[z]\ \exp\Big(iS_S[z] + \int_0^t dt\ \sum_{A=1}^m Z_{A+}^*(t)L_A[z(t),z^*(t)] \\
&\quad - \sum_{A,B}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2\ L_A^*[z(t_1),z^*(t_1)]\alpha_{AB}^+(t_1-t_2)L_B[z(t_2),z^*(t_2)] \\
&\quad + \int_0^t dt\ \sum_{A=1}^m Z_{A-}^*(t)L_A^*[z(t),z^*(t)] \\
&\quad - \sum_{A,B}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2\ L_A[z(t_1),z^*(t_1)]\alpha_{AB}^-(t_1-t_2)L_B^*[z(t_2),z^*(t_2)]\Big)
\end{aligned} \tag{1.120}$$

である。この表式中で、

$$a_i|z\rangle = z_i|z\rangle, \quad \langle z|z\rangle = 1, \tag{1.121}$$

$$S_S[z] = \int_0^t dt\ \Big(\frac{i}{2}\sum_i\{z_i^*(t)\frac{z_i(t)}{dt} - z_i(t)\frac{z_i^*(t)}{dt}\} - H_S(z(t),z^*(t))\Big) \tag{1.122}$$

および、

$$\alpha_{AB}^+(t-s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k (n_k+1)g_{k,A}g_{k,B}^* e^{-i\omega_k(t-s)}, \quad \alpha_{AB}^-(t-s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k n_k g_{k,A}^* g_{k,B} e^{i\omega_k(t-s)} \tag{1.123}$$

である。n_k はボーズ分布関数である。

(1.116) から (1.118) は次のようにしても導ける。簡単のため絶対零度を考える。有限温度へは§ 1.5 のルールで移れる。全系の初期状態を純粋状態

$$|\Psi_{\text{tot}}(0)\rangle = |\psi(0)\rangle \otimes |0\rangle \tag{1.124}$$

と仮定する。時刻 t の状態は、

$$|\Psi_{\text{tot}}(t)\rangle = V(t)|\Psi_{\text{tot}}(0)\rangle, \quad \frac{dV(t)}{dt} = -iH_{\text{tot}}V(t) \tag{1.125}$$

である。今、

$$V(t) = e^{-iH_Bt}W(t) \tag{1.126}$$

とすると、

$$\frac{dW(t)}{dt} = -i[H_S + H_{SB}^I(t)]W(t), \quad H_{SB}^I(t) = e^{iH_Bt}H_{SB}e^{-iH_Bt} \tag{1.127}$$

となる。よって、

$$|\Psi_{\text{tot}}(t)\rangle = e^{-iH_Bt}W(t)|\Psi_{\text{tot}}(0)\rangle \tag{1.128}$$

を得る。よって、注目系の時刻 t での状態は、

$$
\begin{aligned}
\rho_S(t) &= \mathrm{Tr}_B[e^{-iH_Bt}W(t)|\Psi_{\mathrm{tot}}(0)\rangle\langle\Psi_{\mathrm{tot}}(0)|W^\dagger(t)e^{iH_Bt}] \\
&= \mathrm{Tr}_B[W(t)|\Psi_{\mathrm{tot}}(0)\rangle\langle\Psi_{\mathrm{tot}}(0)|W^\dagger(t)] \\
&= \int d[Z]\ \langle Z|W(t)|\Psi_{\mathrm{tot}}(0)\rangle\langle\Psi_{\mathrm{tot}}(0)|W^\dagger(t)|Z\rangle \\
&= \int d[Z]\ W(Z,t)|\Psi(0)\rangle\langle Z|0\rangle\langle 0|Z\rangle\langle\Psi(0)|W^\dagger(Z,t) \\
&= \int d[Z]\ |\langle Z|0\rangle|^2 W(Z,t)|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|W^\dagger(Z,t) \\
&\equiv \int d[Z]\ |\langle Z|0\rangle|^2|\psi(Z,t)\rangle\langle\psi(Z,t)|
\end{aligned} \tag{1.129}
$$

となる。ここで、$W(Z,t)$ は、

$$
\frac{d}{dt}W(Z,t) = -i[H_S + H_{SB}(Z,t)]W(Z,t)\,, \quad \langle Z|H_{SB}^I(t)|0\rangle = \langle Z|0\rangle H_{SB}(Z,t) \tag{1.130}
$$

の解である[2)]。よって、

$$
\frac{d}{dt}|\psi(Z,t)\rangle = -i[H_S + H_{SB}(Z,t)]|\psi(Z,t)\rangle \tag{1.132}
$$

となる。(2.16)

$$
\langle Z|F(c_k^\dagger, c_k)|W\rangle = \langle Z|W\rangle F(Z_k^*, W_k + \frac{\partial}{\partial Z_k^*}) \tag{1.133}
$$

を使うと、

$$
H_{SB}(Z,t) = \sum_{A=1}^{m}\sum_k (L_A g_{k,A}^* e^{i\omega_k t}Z_k^* + L_A^\dagger g_{k,A}e^{-i\omega_k t}\frac{\partial}{\partial Z_k^*}) \tag{1.134}
$$

となる。

§ 1.5 のルールで有限温度に移ると、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|\psi(Z^+,Z^-,t)\rangle = \Big[&-iH_S + \sum_A (L_A Z_{A+}^* + L_A^\dagger Z_{A-}^*)\sum_k \{L_A^\dagger(-i)\sqrt{n_k+1}g_{k,A}e^{-i\omega_k t}\frac{\partial}{\partial Z_k^{+*}} \\
&+ L_A(-i)\sqrt{n_k}g_{k,A}e^{-i\omega_k t}\frac{\partial}{\partial Z_k^{-*}}\}\Big]|\psi(Z^+,Z^-,t)\rangle
\end{aligned} \tag{1.135}
$$

[2)] (1.130) の $W(Z,t)$ は、(1.117) の $G_Z(t,0)$ の絶対程度版 $G_Z^{T_b=0}(t,0)$ と等しい:

$$
W(Z,t) = G_Z^{T_b=0}(t,0). \tag{1.131}
$$

となる。(1.120) より、

$$
\begin{aligned}
&\sum_k(-i)\sqrt{n_k+1}g_{k,A}e^{-i\omega_k t}\frac{\partial}{\partial Z_k^{+*}}\langle z_f|G_Z(t,0)|z\rangle \\
&= \int_0^t ds\int_{z(0)=z}^{z(t)=z_f}\mathcal{D}[z]\ (-i)\sum_k\sqrt{n_k+1}g_{k,A}\sum_{B=1}^m\frac{\partial Z_{B+}^*(s)}{\partial Z_k^{+*}}L_B[z(s),z^*(s)]e^{\cdots} \\
&= \int_0^t ds\int_{z(0)=z}^{z(t)=z_f}\mathcal{D}[z]\ \sum_{B=1}^m(-i)^2\sum_k(n_k+1)g_{k,A}g_{k,B}^*e^{i\omega_k(s-t)}L_B[z(s),z^*(s)]e^{\cdots} \\
&= -\int_0^t ds\int_{z(0)=z}^{z(t)=z_f}\mathcal{D}[z]\ \sum_{B=1}^m\alpha_{AB}^+(t-s)L_B[z(s),z^*(s)]e^{\cdots} \\
&= -\int_0^t ds\ \sum_{B=1}^m\alpha_{AB}^+(t-s)\frac{\delta\langle z_f|G_Z(t,0)|z\rangle}{\delta Z_{B+}^*(s)}
\end{aligned}
\tag{1.136}
$$

第 3 等号で (1.123) を用いた。よって、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|\psi(Z^+,Z^-,t)\rangle\ =\ \Big[&-iH_S+\sum_A(L_AZ_{A+}^*+L_A^\dagger Z_{A-}^*)-\sum_{A,B}L_A^\dagger\int_0^t ds\ \alpha_{AB}^+(t-s)\frac{\delta}{\delta Z_{B+}^*(s)} \\
&-\sum_{A,B}L_A\int_0^t ds\ \alpha_{AB}^-(t-s)\frac{\delta}{\delta Z_{B-}^*(s)}\Big]|\psi(Z^+,Z^-,t)\rangle
\end{aligned}
\tag{1.137}
$$

を得る。[3] ではこの式 (ただし絶対零度) が与えられた。また、[4] で初めて応用が議論された。[4](1998) の付録で TFD による有限温度への拡張が議論され、[6] でより詳細に示された [3)]。

特に Markov 過程

$$
\alpha_{AB}^\pm(t-s)=w_{A\pm}^2\delta_{A,B}\delta(t-s)
\tag{1.141}
$$

のとき、(1.136) は、

$$
\begin{aligned}
&(-i)\sqrt{n_k+1}g_{k,A}e^{-i\omega_k t}\frac{\partial}{\partial Z_k^{+*}}\langle z_f|G_Z(t,0)|z\rangle \\
&= -\int_0^t ds\int_{z(0)=z}^{z(t)=z_f}\mathcal{D}[z]\ \sum_{B=1}^m w_{A+}^2\delta_{A,B}\delta(t-s)L_B[z(s),z^*(s)]e^{\cdots} \\
&= -\frac{w_{A+}^2}{2}L_A[z_f,z_f^*]\int_{z(0)=z}^{z(t)=z_f}\mathcal{D}[z]\ e^{\cdots} \\
&= -\frac{w_{A+}^2}{2}\langle z_f|L_AG_Z(t,0)|z\rangle
\end{aligned}
\tag{1.142}
$$

となる。

3) [3], [5], [6] の説明は間違っている。例えば、コヒーレント状態は規格化されていない：

$$
\langle Z|Z\rangle=\exp[\sum_k Z_k^*Z_k].
\tag{1.138}
$$

[3](9) 式 =[5](13) 式 =[6](6) 式の

$$
|\Psi_{\rm tot}(t)\rangle\ =\ \int d[Z]\ \exp[-\sum_k Z_k^*Z_k]|\psi_{Z^*}(t)\rangle\otimes|Z\rangle
\tag{1.139}
$$

の $|\psi_{Z^*}(t)\rangle$ は上の $|\psi(Z,t)\rangle$ とは別物である！(コヒーレント状態は非直交)。また、[5](24) と、その上の

$$
|\psi_{Z^*}(t)\rangle\ =\ \langle Z|\psi_{\rm tot}(t)\rangle
\tag{1.140}
$$

は間違っている！ だが、[3](11) 式, (14) 式は正しい。

1.7　変形

以下、[5] に移る。(1.130) の $W(Z,t)$ は、

$$W(Z,t) = \frac{\langle Z|W(t)|0\rangle}{\langle Z|0\rangle} \tag{1.143}$$

を満たす ([5](24) は間違いである)。(1.134) より、(1.130) は、(1.64) の Z_A^* を使って次のようになる：

$$\frac{d}{dt}W(Z,t) \;=\; -iH_S W(Z,t) + \sum_A L_A Z_A^* W(Z,t) - i\sum_A L_A^\dagger \sum_k g_{k,A} e^{-i\omega_k t}\frac{\langle Z|c_k W(t)|0\rangle}{\langle Z|0\rangle}. \tag{1.144}$$

最後の因子で、

$$\langle Z|c_k W(t)|0\rangle = \langle Z|W(t)c_k(t)|0\rangle\,, \quad \bullet(t) \stackrel{\rm def}{=} W^\dagger(t)\bullet W(t) \tag{1.145}$$

である。ハイゼンベルグ方程式は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}c_k(t) \;&=\; -iW^\dagger(t)[c_k, H_{SB}^I(t)]W(t)\\ &=\; -i\sum_A g_{k,A}^* e^{i\omega_k t}L_A(t)\end{aligned} \tag{1.146}$$

なので、

$$c_k(t) \;=\; c_k - i\sum_A g_{k,A}^*\int_0^t ds\; e^{i\omega_k s}L_A(s) \tag{1.147}$$

となり、

$$\langle Z|c_k W(t)|0\rangle = \langle Z|W(t)c_k(t)|0\rangle = -i\sum_B g_{k,B}^*\int_0^t ds\; e^{i\omega_k s}\langle Z|W(t)L_B(s)|0\rangle \tag{1.148}$$

を得る。(1.144) は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}W(Z,t) \;&=\; -iH_S W(Z,t) + \sum_A L_A Z_A^* W(Z,t)\\ &\quad -\sum_{A,B} L_A^\dagger\int_0^t ds\;\alpha_{AB}(t-s)\frac{\langle Z|W(t)L_B(s)|0\rangle}{\langle Z|0\rangle}\end{aligned} \tag{1.149}$$

となる。今、

$$L_A(t,s) \stackrel{\rm def}{=} W(t)L_A(s)W^\dagger(t) = W(t)W^\dagger(s)L_A W(s)W^\dagger(t) \tag{1.150}$$

とすると、

$$\langle Z|W(t)L_B(s)|0\rangle = \langle Z|L_A(t,s)W(t)|0\rangle \tag{1.151}$$

である。今、$L_A(t,s,Z)$ を、

$$\begin{aligned}\frac{\langle Z|W(t)L_B(s)|0\rangle}{\langle Z|0\rangle} \;&=\; \frac{\langle Z|L_A(t,s)W(t)|0\rangle}{\langle Z|0\rangle}\\ &\equiv\; L_A(t,s,Z)\frac{\langle Z|W(t)|0\rangle}{\langle Z|0\rangle}\\ &=\; L_A(t,s,Z)W(Z,t)\end{aligned} \tag{1.152}$$

で定義すると、(1.149) は、

$$\frac{d}{dt}W(Z,t) = -iH_S W(Z,t) + \sum_A L_A Z_A^* W(Z,t) - \sum_{A,B} L_A^\dagger \int_0^t ds\ \alpha_{AB}(t-s) L_B(t,s,Z) W(Z,t) \tag{1.153}$$

となる。ただし、(1.77) の $\alpha_{BA}(s-t)$ を用いた。[5] の α とは、複素共役の関係にある。$L_A(t,t) = L_A$ より、

$$L_A(t,t,Z) = L_A \tag{1.154}$$

である。また、絶対零度の Non-Markov Schrödinger-Langevin 方程式は、

$$\frac{d}{dt}|\psi(Z,t)\rangle = \big[-iH_S + \sum_A L_A Z_A^* - \sum_{A,B} L_A^\dagger \int_0^t ds\ \alpha_{AB}(t-s) L_B(t,s,Z)\big]|\psi(Z,t)\rangle \tag{1.155}$$

となる。有限温度へは§ 1.5 のルールで移れる。

一般に $L_A(t,s,Z)$ が Z に依らないとき、$\rho_S(t)$ についての (閉じた) 厳密な (量子マスター) 方程式を導ける [5]。

1.8 Born 近似

g を相互作用の強さを表す無次元パラメーターとし、H_{SB} を gH_{SB} と表す。$L_A(t,s)$ を g についてテーラー展開する：

$$L_A(t,s) = L_A^{(0)}(t,s) + gL_A^{(1)}(t,s) + \cdots \tag{1.156}$$

今、

$$W(t) = e^{-iH_S t} V(t) \tag{1.157}$$

とすると、

$$\frac{d}{dt}V(t) = -ig\mathcal{H}_{SB}(t), \quad \mathcal{H}_{SB}(t) = e^{iH_S t} H_{SB}^I(t) e^{-iH_S t} = e^{iH_S t} e^{iH_B t} H_{SB} e^{-iH_B t} e^{-iH_S t}, \tag{1.158}$$

$$V(t) = 1 - ig\int_0^t du\ \mathcal{H}_{SB}(u) + \mathcal{O}(g^2) \tag{1.159}$$

となる。$L_A(t,s)$ は、

$$\begin{aligned} L_A(t,s) &= W(t)W^\dagger(s) L_A W(s) W^\dagger(t) \\ &= e^{-iH_S t} V(t) V^\dagger(s) e^{iH_S s} L_A e^{-iH_S s} V(s) V^\dagger(t) e^{iH_S t} \end{aligned} \tag{1.160}$$

なので、g の 0 次では、

$$L_A^{(0)}(t,s) = e^{-iH_S(t-s)} L_A e^{iH_S(t-s)} \equiv L_A^I(s-t) \tag{1.161}$$

となる。また、

$$V(t)V^\dagger(s) = 1 - ig\int_s^t du\ \mathcal{H}_{SB}(u) + \mathcal{O}(g^2),$$

$$e^{-iH_S t} V(t) V^\dagger(s) e^{iH_S s} = e^{-iH_S(t-s)} - ig\int_s^t du\ e^{-iH_S t} \mathcal{H}_{SB}(u) e^{iH_S s} + \mathcal{O}(g^2)$$

より、

$$
\begin{aligned}
L_A^{(1)}(t,s) &= -i\int_s^t du\ e^{-iH_St}\mathcal{H}_{SB}(u)e^{iH_Ss}L_Ae^{iH_S(t-s)} \\
&\quad +i\int_s^t du\ e^{-iH_S(t-s)}L_Ae^{-iH_Ss}\mathcal{H}_{SB}(u)e^{iH_St} \\
&= -i\int_s^t du\ e^{-iH_St}\mathcal{H}_{SB}(u)e^{iH_St}e^{-iH_S(t-s)}L_Ae^{iH_S(t-s)} \\
&\quad +i\int_s^t du\ e^{-iH_S(t-s)}L_Ae^{iH_S(t-s)}e^{-iH_St}\mathcal{H}_{SB}(u)e^{iH_St} \\
&= -i\int_s^t du\ e^{-iH_St}\mathcal{H}_{SB}(u)e^{iH_St}L_A^I(s-t)+i\int_s^t du\ L_A^I(s-t)e^{-iH_St}\mathcal{H}_{SB}(u)e^{iH_St}
\end{aligned} \tag{1.162}
$$

を得る。$L_A^{(0)}(t,s)$ は注目系の演算子なので、

$$
L_A^{(0)}(t,s,Z)=L_A^{(0)}(t,s)=L_A^I(s-t) \tag{1.163}
$$

となる。

g^2 までの近似 (Born 近似) を考える。$\alpha_{BA}(s-t)$ は g^2 のオーダーなので、$L_A(t,s,Z)$ は $L_A^{(0)}(t,s,Z)$ で近似できる。この近似で (1.155) は、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|\psi_{(2)}(Z,t)\rangle &= \Big[-iH_S+\sum_A L_AZ_A^*-\sum_{A,B}L_A^\dagger\int_0^t ds\ \alpha_{AB}(t-s)L_B^I(s-t)\Big]|\psi_{(2)}(Z,t)\rangle \\
&= \Big[-iH_S+\sum_A L_AZ_A^*-\sum_{A,B}L_A^\dagger\int_0^t du\ \alpha_{AB}(u)L_B^I(-u)\Big]|\psi_{(2)}(Z,t)\rangle
\end{aligned} \tag{1.164}
$$

となる。$_{(2)}$ は Born 近似を表す。これは、(おそらく)Redfield 方程式に対応する。

1.9 NMQSD からの量子マスター方程式の導出

1.9.1 厳密な量子マスター方程式

この節は [5] を参考にした。

(1.116),(1.118)

$$
\rho_S(t) = \sum_i p_i\mathcal{M}\big[|\psi_i(Z^+,Z^-,t)\rangle\langle\psi_i(Z^+,Z^-,t)|\big], \tag{1.165}
$$

$$
\mathcal{M}[\cdots] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\prod_k\frac{dZ_k^+dZ_k^{+*}}{\pi}e^{-Z_k^+Z_k^{+*}}\int\prod_k\frac{dZ_k^-dZ_k^{-*}}{\pi}e^{-Z_k^-Z_k^{-*}}\ \cdots \tag{1.166}
$$

と (1.155) の有限温度版

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|\psi_i(Z^+,Z^-,t)\rangle &= \Big[-iH_S+\sum_A(L_AZ_{A+}^*+L_A^\dagger Z_{A-}^*)-\sum_{A,B}L_A^\dagger\int_0^t ds\ \alpha_{AB}^+(t-s)L_B^{(+)}(t,s,Z) \\
&\quad -\sum_{A,B}L_A\int_0^t ds\ \alpha_{AB}^-(t-s)L_B^{\dagger(-)}(t,s,Z)\Big]|\psi_i(Z^+,Z^-,t)\rangle
\end{aligned} \tag{1.167}
$$

から、厳密な量子マスター方程式を導く。今、

$$
P_i(Z,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} |\psi_i(Z^+,Z^-,t)\rangle\langle\psi_i(Z^+,Z^-,t)| \tag{1.168}
$$

とすると、$\rho_S(t)$ の方程式は、$\mathcal{M}[P_i(Z,t)]$ の方程式と一致するので、それを求める。(1.167) より、

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathcal{M}[P_i(Z,t)] \\
&= \mathcal{M}\Big[\Big\{-iH_S + \sum_A (L_A Z^*_{A+} + L^\dagger_A Z^*_{A-}) - \sum_{A,B} L^\dagger_A \int_0^t ds\ \alpha^+_{AB}(t-s) L^{(+)}_B(t,s,Z) \\
&\quad - \sum_{A,B} L_A \int_0^t ds\ \alpha^-_{AB}(t-s) L^{\dagger(-)}_B(t,s,Z)\Big\} P_i(Z,t)\Big] + \mathcal{M}\Big[P_i(Z,t)\Big\{iH_S + \sum_A (L^\dagger_A Z_{A+} + L_A Z_{A-}) \\
&\quad - \sum_{A,B} \int_0^t ds\ L^{(+)\dagger}_B(t,s,Z)[\alpha^+_{AB}(t-s)]^* L_A - \sum_{A,B}\int_0^t ds\ L^{(-)}_B(t,s,Z)[\alpha^-_{AB}(t-s)]^* L^\dagger_A\Big\}\Big] \qquad (1.169)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}\Big[P_i(Z,t) L^\dagger_A Z_{A+}\Big] \\
&= \sum_k i g_{k,A}\sqrt{n_k+1} e^{-i\omega_k t} \int d[Z^+] \int d[Z^-]\ e^{-\sum_l \{Z^+_l Z^{+*}_l + Z^-_l Z^{-*}_l\}} Z^+_k P_i(Z,t) L^\dagger_A \\
&= \sum_k i g_{k,A}\sqrt{n_k+1} e^{-i\omega_k t} \int d[Z^+] \int d[Z^-]\ (-1)\frac{\partial e^{-\sum_l \{Z^+_l Z^{+*}_l + Z^-_l Z^{-*}_l\}}}{\partial Z^{+*}_k} P_i(Z,t) L^\dagger_A \\
&= \sum_k i g_{k,A}\sqrt{n_k+1} e^{-i\omega_k t} \int d[Z^+] \int d[Z^-]\ e^{-\sum_l \{Z^+_l Z^{+*}_l + Z^-_l Z^{-*}_l\}} \frac{\partial P_i(Z,t)}{\partial Z^{+*}_k} L^\dagger_A \\
&= \sum_k i g_{k,A}\sqrt{n_k+1} e^{-i\omega_k t} \mathcal{M}\Big[\frac{\partial P_i(Z,t)}{\partial Z^{+*}_k}\Big] L^\dagger_A \\
&= \int_0^t ds\ \sum_B \alpha^+_{AB}(t-s) \mathcal{M}\Big[\frac{\delta P_i(Z,t)}{\delta Z^*_{B+}(s)}\Big] L^\dagger_A \\
&= \int_0^t ds\ \sum_B \alpha^+_{AB}(t-s) \mathcal{M}[L^{(+)}_B(t,s,Z) P_i(Z,t)] L^\dagger_A \\
&\equiv \mathcal{M}[\mathcal{L}^{(+)}_A(Z,t) P_i(Z,t)] L^\dagger_A \qquad (1.170)
\end{aligned}
$$

である [4]。ただし、

$$
\mathcal{L}^{(+)}_A(Z,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_B \int_0^t ds\ \alpha^+_{AB}(t-s) L^{(+)}_B(t,s,Z). \qquad (1.172)
$$

また、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}\Big[L_A Z^*_{A+} P_i(Z,t)\Big] &= L_A \sum_k (-i) g^*_{k,A}\sqrt{n_k+1} e^{i\omega_k t} \mathcal{M}\Big[\frac{\partial P_i(Z,t)}{\partial Z^+_k}\Big] \\
&= L_A \int_0^t ds\ \sum_B [\alpha^+_{AB}(t-s)]^* \mathcal{M}\Big[\frac{\delta P_i(Z,t)}{\delta Z_{B+}(s)}\Big] \\
&= L_A \mathcal{M}[P_i(Z,t)\mathcal{L}^{(+)\dagger}_A(Z,t)] \qquad (1.173)
\end{aligned}
$$

[4] 最後から 2 つ目の等号で、(1.137) と (1.155) との比較から得られる

$$
\frac{\delta}{\delta Z^*_{B+}(s)} |\psi(Z^+,Z^-,t)\rangle \ =\ L^{(+)}_B(t,s,Z)|\psi(Z^+,Z^-,t)\rangle \qquad (1.171)
$$

を用いた。

となる。よって、

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathcal{M}[P_i(Z,t)] = -i\big[H_S, \mathcal{M}[P_i(Z,t)]\big] \\
&+L_A\mathcal{M}[P_i(Z,t)\mathcal{L}_A^{(+)\dagger}(Z,t)] + L_A^\dagger\mathcal{M}[P_i(Z,t)\mathcal{L}_A^{(-)}(Z,t)] - L_A^\dagger\mathcal{M}[\mathcal{L}_A^{(+)}(Z,t)P_i(Z,t)] \\
&-L_A\mathcal{M}[\mathcal{L}_A^{\dagger(-)}(Z,t)P_i(Z,t)] + \mathcal{M}[\mathcal{L}_A^{(+)}(Z,t)P_i(Z,t)]L_A^\dagger + \mathcal{M}[\mathcal{L}_A^{\dagger(-)}(Z,t)P_i(Z,t)]L_A \\
&-\mathcal{M}[P_i(Z,t)\mathcal{L}_A^{(+)\dagger}(Z,t)]L_A - \mathcal{M}[P_i(Z,t)\mathcal{L}_A^{(-)}(Z,t)]L_A^\dagger \\
=\ & -i\big[H_S, \mathcal{M}[P_i(Z,t)]\big] + \big[L_A, \mathcal{M}[P_i(Z,t)\mathcal{L}_A^{(+)\dagger}(Z,t)]\big] - \big[L_A^\dagger, \mathcal{M}[\mathcal{L}_A^{(+)}(Z,t)P_i(Z,t)]\big] \\
&+\big[L_A^\dagger, \mathcal{M}[P_i(Z,t)\mathcal{L}_A^{(-)}(Z,t)]\big] - \big[L_A, \mathcal{M}[\mathcal{L}_A^{\dagger(-)}(Z,t)P_i(Z,t)]\big] \qquad (1.174)
\end{aligned}
$$

を得る [5]。

特に、$L_A^{(+)}(t,s,Z)$ などが Z によらず、$\mathcal{L}_A^{(+)}(Z,t) = \mathcal{L}_A^{(+)}(t)$ のようになるときは、$\mathcal{M}[P_i(Z,t)]$ について閉じた方程式が得られ、厳密な量子マスター方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{d\rho_S(t)}{dt} &= -i[H_S, \rho_S(t)] + \big[L_A, \rho_S(t)\mathcal{L}_A^{(+)\dagger}(t)\big] - \big[L_A^\dagger, \mathcal{L}_A^{(+)}(t)\rho_S(t)\big] \\
&\quad +\big[L_A^\dagger, \rho_S(t)\mathcal{L}_A^{(-)}(t)\big] - \big[L_A, \mathcal{L}_A^{\dagger(-)}(t)\rho_S(t)\big] \qquad (1.175)
\end{aligned}
$$

を得る。

1.9.2 Born 近似

(1.163) より、

$$
\begin{aligned}
L_A^{(+)}(t,s,Z) &= L_A^I(s-t) + \mathcal{O}(H_1), \qquad (1.176) \\
\mathcal{L}_A^{(+)}(Z,t) &= \int_0^t ds\ \alpha_{AB}^+(t-s)L_B^{(+)}(t,s,Z) \\
&= \int_0^t ds\ \alpha_{AB}^+(t-s)L_B^I(s-t) + \mathcal{O}(H_1^3) \\
&\equiv \mathcal{L}_{A(0)}^{(+)}(t) + \mathcal{O}(H_1^3) \qquad (1.177)
\end{aligned}
$$

である。同様に、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_A^{\dagger(-)}(Z,t) &= \int_0^t ds\ \alpha_{AB}^-(t-s)L_B^{\dagger I}(s-t) + \mathcal{O}(H_1^3) \\
&\equiv \mathcal{L}_{A(0)}^{\dagger(-)}(t) + \mathcal{O}(H_1^3) \qquad (1.178)
\end{aligned}
$$

よって、H_1 の 2 次まで (Born 近似) で、

$$
\begin{aligned}
\frac{d\rho_S(t)}{dt} &\approx -i[H_S, \rho_S(t)] + \big[L_A, \rho_S(t)\mathcal{L}_{A(0)}^{(+)\dagger}(t)\big] - \big[L_A^\dagger, \mathcal{L}_{A(0)}^{(+)}(t)\rho_S(t)\big] \\
&\quad +\big[L_A^\dagger, \rho_S(t)\mathcal{L}_{A(0)}^{(-)}(t)\big] - \big[L_A, \mathcal{L}_{A(0)}^{\dagger(-)}(t)\rho_S(t)\big] \qquad (1.179)
\end{aligned}
$$

を得る。これは (おそらく)Redfield 方程式である。

[5] ここで、$\mathcal{L}_A^{(-)}(Z,t) = [\mathcal{L}_A^{\dagger(-)}(Z,t)]^\dagger$, $\mathcal{L}_A^{(+)\dagger}(Z,t) = [\mathcal{L}_A^{(+)}(Z,t)]^\dagger$ である。また、A の和は、以下省略する。

1.9.3 Born-Markov 近似

Markov 近似をする：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(+)}_{A(0)}(t) &= \int_0^t ds\ \alpha^+_{AB}(t-s)L^I_B(s-t) \\ &= \int_0^t du\ \alpha^+_{AB}(u)L^I_B(-u) \\ &\approx \int_0^\infty du\ \alpha^+_{AB}(u)L^I_B(-u). \end{aligned} \tag{1.180}$$

今、$H_S(t)$ の固有状態

$$H_S|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle \tag{1.181}$$

を導入する。ただし、

$$\sum_n |E_n\rangle\langle E_n| = 1_S \tag{1.182}$$

とする。ここで、

$$L_A(\omega) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{m,n}\delta_{\omega_{mn},\omega}|E_n\rangle\langle E_n|L_A|E_m\rangle\langle E_m|, \tag{1.183}$$

$$\omega_{mn} = E_m - E_n\,, \quad \omega \in \mathcal{W}, \tag{1.184}$$

$$\mathcal{W} = \{\omega_{mn}|\langle E_n|L_A|E_m\rangle \neq 0\ \ {}^{\exists}A\} \tag{1.185}$$

と定義すると、

$$\begin{aligned}L^I_A(-u) &= \sum_\omega e^{-iH_Su}L_A(\omega)e^{iH_Su} \\ &= \sum_\omega\sum_{m,n}\delta_{\omega_{mn},\omega}e^{-iH_Su}|E_n\rangle\langle E_n|L_A|E_m\rangle\langle E_m|e^{iH_Su} \\ &= \sum_\omega\sum_{m,n}\delta_{\omega_{mn},\omega}|E_n\rangle\langle E_n|L_A|E_m\rangle\langle E_m|e^{i\omega_{mn}u} \\ &= \sum_\omega L_A(\omega)e^{i\omega u}\end{aligned} \tag{1.186}$$

となる。よって、

$$\mathcal{L}^{(+)}_{A(0)}(t) \approx \sum_\omega L_B(\omega)\int_0^\infty du\ \alpha^+_{AB}(u)e^{i\omega u} \tag{1.187}$$

となる。今、

$$\alpha^+_{AB}(u) = \int d\Omega\ \tilde{\alpha}^+_{AB}(\Omega)e^{-i\Omega u} \tag{1.188}$$

と書くと、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(+)}_{A(0)}(t) &\approx \sum_\omega L_B(\omega)\int d\Omega\ \tilde{\alpha}^+_{AB}(\Omega)\int_0^\infty du\ e^{i(\omega-\Omega)u} \\ &= \sum_\omega L_B(\omega)\int d\Omega\ \tilde{\alpha}^+_{AB}(\Omega)\Big[\pi\delta(\Omega-\omega) + i\frac{P}{\omega-\Omega}\Big] \\ &\equiv \sum_\omega L_B(\omega)[\Phi^-_{AB}(\omega) + i\Psi^-_{AB}(\omega)]\end{aligned} \tag{1.189}$$

を得る。同様に、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\dagger(-)}_{A(0)}(t) &\approx \int_0^\infty ds\ \alpha^-_{AB}(u) L^{\dagger I}_B(-u) \\
&= \int_0^\infty ds\ \alpha^-_{AB}(u) [L^I_B(-u)]^\dagger \\
&= \int_0^\infty ds\ \alpha^-_{AB}(u) \sum_\omega [L_B(\omega)]^\dagger e^{-i\omega u} \\
&= \sum_\omega [L_B(\omega)]^\dagger [\Phi^+_{AB}(\omega) - i\Psi^+_{AB}(\omega)]
\end{aligned} \tag{1.190}
$$

を得る。上 2 式を (1.179) を代入して、

$$
\begin{aligned}
\frac{d\rho_S(t)}{dt} &\approx -i[H_S, \rho_S(t)] + \sum_\omega \Big\{ [\Phi^-_{AB}(\omega) + i\Psi^-_{AB}(\omega)]^* \big[L_A, \rho_S(t)[L_B(\omega)]^\dagger\big] \\
&\quad - [\Phi^-_{AB}(\omega) + i\Psi^-_{AB}(\omega)] \big[L_A^\dagger, L_B(\omega)\rho_S(t)\big] + [\Phi^+_{AB}(\omega) - i\Psi^+_{AB}(\omega)]^* \big[L_A^\dagger, \rho_S(t) L_B(\omega)\big] \\
&\quad - [\Phi^+_{AB}(\omega) - i\Psi^+_{AB}(\omega)] \big[L_A, [L_B(\omega)]^\dagger \rho_S(t)\big] \Big\} \\
&= -i[H_S, \rho_S(t)] + \sum_\omega \Big\{ [\Phi^-_{BA}(\omega) - i\Psi^-_{BA}(\omega)] \big[L_A, \rho_S(t)[L_B(\omega)]^\dagger\big] \\
&\quad - [\Phi^-_{AB}(\omega) + i\Psi^-_{AB}(\omega)] \big[L_A^\dagger, L_B(\omega)\rho_S(t)\big] + [\Phi^+_{BA}(\omega) + i\Psi^+_{BA}(\omega)] \big[L_A^\dagger, \rho_S(t) L_B(\omega)\big] \\
&\quad - [\Phi^+_{AB}(\omega) - i\Psi^+_{AB}(\omega)] \big[L_A, [L_B(\omega)]^\dagger \rho_S(t)\big] \Big\} \qquad (1.191) \\
&\equiv -i[H_S, \rho_S(t)] + \hat{\Pi}^{\mathrm{Markov}} \rho_S(t)
\end{aligned}
$$

を得る。ここで、$[\Phi^-_{AB}(\omega)]^* = \Phi^-_{BA}(\omega)$ などを用いた。$\hat{\Pi}^{\mathrm{Markov}}$ を展開すると、

$$
\begin{aligned}
\hat{\Pi}^{\mathrm{Markov}} \bullet &= \sum_\omega \Big\{ \Phi^-_{BA}(\omega) L_A \bullet [L_B(\omega)]^\dagger - \Phi^-_{BA}(\omega) \bullet [L_B(\omega)]^\dagger L_A \\
&\quad - \Phi^-_{AB}(\omega) L_A^\dagger L_B(\omega) \bullet + \Phi^-_{AB}(\omega) L_B(\omega) \bullet L_A^\dagger \\
&\quad + \Phi^+_{BA}(\omega) L_A^\dagger \bullet L_B(\omega) - \Phi^+_{BA}(\omega) \bullet L_B(\omega) L_A^\dagger \\
&\quad - \Phi^+_{AB}(\omega) L_A [L_B(\omega)]^\dagger \bullet + \Phi^+_{AB}(\omega) [L_B(\omega)]^\dagger \bullet L_A \Big\} \\
&\quad + i \sum_\omega \Big\{ - \Psi^-_{BA}(\omega) L_A \bullet [L_B(\omega)]^\dagger + \Psi^-_{BA}(\omega) \bullet [L_B(\omega)]^\dagger L_A \\
&\quad - \Psi^-_{AB}(\omega) L_A^\dagger L_B(\omega) \bullet + \Psi^-_{AB}(\omega) L_B(\omega) \bullet L_A^\dagger \\
&\quad + \Psi^+_{BA}(\omega) L_A^\dagger \bullet L_B(\omega) - \Psi^+_{BA}(\omega) \bullet L_B(\omega) L_A^\dagger \\
&\quad + \Psi^+_{AB}(\omega) L_A [L_B(\omega)]^\dagger \bullet - \Psi^+_{AB}(\omega) [L_B(\omega)]^\dagger \bullet L_A \Big\}.
\end{aligned} \tag{1.192}
$$

これは、熱浴がフェルミオン系の場合のそれと同じである。ただし、GQME-spin のノートとラムシフトの定義が逆符号である。

回転波近似では、

$$
\begin{aligned}
\hat{\Pi}^{\mathrm{RWA}} \bullet &= \sum_\omega \Big\{ 2\Phi^-_{AB}(\omega) L_B(\omega) \bullet [L_A(\omega)]^\dagger - \Phi^-_{AB}(\omega) \bullet [L_A(\omega)]^\dagger L_B(\omega) \\
&\quad - \Phi^-_{AB}(\omega) [L_A(\omega)]^\dagger L_B(\omega) \bullet + 2\Phi^+_{AB}(\omega) [L_B(\omega)]^\dagger \bullet L_A(\omega) \\
&\quad - \Phi^+_{AB}(\omega) \bullet L_A(\omega) [L_B(\omega)]^\dagger - \Phi^+_{AB}(\omega) L_A(\omega) [L_B(\omega)]^\dagger \bullet \Big\} \\
&\quad - i \sum_\omega \big[\Psi^-_{AB}(\omega) [L_A(\omega)]^\dagger L_B(\omega) - \Psi^+_{AB}(\omega) L_A(\omega) [L_B(\omega)]^\dagger, \bullet \big].
\end{aligned} \tag{1.193}
$$

2　付録

2.1　コヒーレント状態

$a, a^\dagger$ を

$$[a, a^\dagger] = 1\,, \quad [a, a] = 0 = [a^\dagger, a^\dagger] \tag{2.1}$$

を満たす生成・消滅演算子とする。さらに、

$$D(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) \tag{2.2}$$

とする。公式

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^A e^B \qquad \text{for} \quad \big[A, [A, B]\big] = \big[B, [A, B]\big] = 0 \tag{2.3}$$

より、

$$D(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} = e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger} \tag{2.4}$$

である。また、

$$\begin{aligned}
D(\alpha)D(\beta) &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} \cdot e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} e^{\beta a^\dagger} e^{-\beta^* a} \\
&= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} e^{\beta a^\dagger} e^{-\beta^* a} \\
&= \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 - \alpha^* \beta) e^{\alpha a^\dagger} e^{\beta a^\dagger} e^{-\alpha^* a} e^{-\beta^* a} \\
&= \exp\big(-\frac{1}{2}|\alpha + \beta|^2 - \frac{1}{2}\alpha^* \beta + \frac{1}{2}\alpha \beta^*\big) e^{(\alpha+\beta)a^\dagger} e^{-(\alpha+\beta)^* a} \\
&= D(\alpha + \beta) e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)}, \qquad (2.5) \\
D^\dagger(\alpha) &= \exp[(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)^\dagger] \\
&= D(-\alpha) \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

である。

今、コヒーレント状態

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle \qquad (a|0\rangle = 0, \langle 0|0\rangle = 1) \tag{2.7}$$

を定義すると、(2.4) より、

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}
a|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n} |n-1\rangle \\
&= \alpha e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\
&= \alpha |\alpha\rangle \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

である。また、(2.5),(2.6),(2.4) より、

$$\begin{aligned}
\langle\alpha|\beta\rangle &= \langle 0|D(-\alpha)D(\beta)|0\rangle \\
&= \langle 0|D(-\alpha+\beta)|0\rangle e^{\frac{1}{2}(-\alpha\beta^*+\alpha^*\beta)} \\
&= \exp(-\frac{1}{2}|-\alpha+\beta|^2)\langle 0|e^{(-\alpha+\beta)a^\dagger}e^{-(-\alpha+\beta)^*a}|0\rangle e^{\frac{1}{2}(-\alpha\beta^*+\alpha^*\beta)} \\
&= \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2-\frac{1}{2}|\beta|^2+\alpha^*\beta) \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

となる。なお、(2.8) より、

$$\begin{aligned}
\int\frac{d^2\alpha}{\pi}|\alpha\rangle\langle\alpha| &= \int\frac{d^2\alpha}{\pi}e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}}|n\rangle\langle m| \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr\int_0^{2\pi}d\theta\, re^{-r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{r^n}{\sqrt{n!}}\frac{r^m}{\sqrt{m!}}e^{i\theta(n-m)}|n\rangle\langle m| \\
&= 2\int_0^\infty dr\, re^{-r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{2n}}{n!}|n\rangle\langle n| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| \\
&= 1 \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

である。上 2 式より、$\{|\alpha\rangle\}$ は規格非直交（過剰）完全系である。

$$\begin{aligned}
\langle\alpha|a|\beta\rangle &= \beta\langle\alpha|\beta\rangle \\
&= \beta\exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2-\frac{1}{2}|\beta|^2+\alpha^*\beta) \\
&= (\frac{\alpha}{2}+\frac{\partial}{\partial\alpha^*})\exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2-\frac{1}{2}|\beta|^2+\alpha^*\beta) \\
&= (\frac{\alpha}{2}+\frac{\partial}{\partial\alpha^*})\langle\alpha|\beta\rangle \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

であるから、

$$\langle\alpha|F(a^\dagger,a)|\beta\rangle = F(\alpha^*,\frac{\alpha}{2}+\frac{\partial}{\partial\alpha^*})\langle\alpha|\beta\rangle \qquad (2.13)$$

となる。また、

$$\langle\alpha|\beta\rangle^{-1}\frac{\partial}{\partial\alpha^*}[\langle\alpha|\beta\rangle\bullet] = \frac{\partial\bullet}{\partial\alpha^*}+\beta-\frac{\alpha}{2}, no \qquad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^*}[\langle\alpha|\beta\rangle\bullet] = \langle\alpha|\beta\rangle[\frac{\partial\bullet}{\partial\alpha^*}+\beta-\frac{\alpha}{2}] \qquad (2.15)$$

より、

$$F(\alpha^*,\frac{\alpha}{2}+\frac{\partial}{\partial\alpha^*})\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle F(\alpha^*,\beta+\frac{\partial}{\partial\alpha^*})$$

つまり、

$$\langle\alpha|F(a^\dagger,a)|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle F(\alpha^*,\beta+\frac{\partial}{\partial\alpha^*}) \qquad (2.16)$$

を得る。

2.2 有限温度での Wick の定理

A_i を

$$A_i = \sum_k [c_{ik} c_k^\dagger + d_{ik} c_k] \tag{2.17}$$

のタイプの演算子とするとき、

$$\langle A_1 A_2 \cdots A_N \rangle = \begin{cases} 0 & \text{for } N \neq 2M \\ \sum \langle A_{i_1} A_{j_1} \rangle \langle A_{i_2} A_{j_2} \rangle \cdots \langle A_{i_M} A_{j_M} \rangle & \text{for } N = 2M \end{cases} \tag{2.18}$$

であることを示したい。ただし、

$$\langle \cdots \rangle = \mathrm{Tr}_B[\rho_{eq} \cdots], \quad \rho_{eq} = \frac{e^{-\beta(H_B - \mu N)}}{\Xi}, \quad \Xi = \mathrm{Tr}_B[e^{-\beta(H_B - \mu N)}], \tag{2.19}$$

$$H_B = \sum_k \omega_k c_k^\dagger c_k, \quad N = \sum_k c_k^\dagger c_k \tag{2.20}$$

であり、和は、

$$1 = i_1 < j_2, \quad i_2 < j_2, \cdots, i_M < J_M, \tag{2.21}$$

$$1 = i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_M \tag{2.22}$$

なる全ての $(i_1, j_1)(i_2, j_2) \cdots (i_M, J_M)$ について取る。ただし、$\{i_1, j_1, i_2, \cdots, j_M\} = \{1, 2, \cdots, N\}$ である。項の数は、

$$\sum 1 = (2M-1)!! = \frac{(2M)!}{2^M M!} \tag{2.23}$$

である。

$A = c_k, c_k^\dagger$ とすると、

$$A\rho_{eq} = e^{\lambda(A)\beta(\omega_k - \mu)} \rho_{eq} A, \quad \lambda(c_k^\dagger) = 1, \quad \lambda(c_k) = -1 \tag{2.24}$$

であることを示す。ρ_{eq} は、

$$\rho_{eq} = \otimes_k e^{-\beta c_k^\dagger c_k (\omega_k - \mu)} [1 - e^{-\beta(\omega_k - \mu)}] \tag{2.25}$$

とかける。今、

$$A(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\beta c_k^\dagger c_k (\omega_k - \mu)} A e^{-\beta c_k^\dagger c_k (\omega_k - \mu)} \tag{2.26}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} A(\beta) &= e^{\beta c_k^\dagger c_k (\omega_k - \mu)} [c_k^\dagger c_k (\omega_k - \mu), A] e^{-\beta c_k^\dagger c_k (\omega_k - \mu)} \\ &= e^{\beta c_k^\dagger c_k (\omega_k - \mu)} \lambda(A)(\omega_k - \mu) A e^{-\beta c_k^\dagger c_k (\omega_k - \mu)} \\ &= \lambda(A)(\omega_k - \mu) A(\beta) \end{aligned} \tag{2.27}$$

であり、

$$A(\beta) = e^{\beta c_k^\dagger c_k (\omega_k - \mu)} A e^{-\beta c_k^\dagger c_k (\omega_k - \mu)} = e^{\lambda(A)(\omega_k - \mu)} A \tag{2.28}$$

を得る。よって、

$$Ae^{-\beta c_k^\dagger c_k(\omega_k-\mu)} = e^{\lambda(A)(\omega_k-\mu)}e^{-\beta c_k^\dagger c_k(\omega_k-\mu)}A \tag{2.29}$$

であり (2.24) を得る。(2.24) より、

$$\begin{aligned}\langle A_2A_3\cdots A_NA\rangle &= \mathrm{Tr}_B[\rho_{eq}A_2A_3\cdots A_NA]\\ &= \mathrm{Tr}_B[A\rho_{eq}A_2A_3\cdots A_N]\\ &= e^{\lambda(A)(\omega_k-\mu)}tr_B[\rho_{eq}AA_2A_3\cdots A_N]\\ &= e^{\lambda(A)(\omega_k-\mu)}\langle AA_2A_3\cdots A_N\rangle \end{aligned}\tag{2.30}$$

を得る。ところで、

$$\begin{aligned}AA_2A_3\cdots A_N &= A_2A_3\cdots A_NA+[A,A_2A_3\cdots A_N]\\ &= A_2A_3\cdots A_NA+[A,A_2]A_3\cdots A_NA+A_2[A,A_3]A_4\cdots A_N\\ &\quad +\cdots+A_2A_3\cdots A_{N-1}[A,A_N]\end{aligned}\tag{2.31}$$

である。両辺の平均をとり、(2.30) を使うと、

$$\langle AA_2A_3\cdots A_N\rangle = \sum_{l=2}^{N}\frac{[A,A_l]}{1-e^{\lambda(A)(\omega_k-\mu)}}\langle A_2\overset{l}{\cdots}A_N\rangle \tag{2.32}$$

を得る。$A_2\overset{l}{\cdots}A_N$ は、$A_2\cdots A_N$ から A_l を除いたものである。また、

$$[A,A_l] = \begin{cases}-d_{lk} & \text{for}\ \ A=c_k^\dagger\\ c_{lk} & \text{for}\ \ A=c_k\end{cases} \tag{2.33}$$

である。一方、

$$\begin{aligned}\langle c_k^\dagger A_l\rangle &= \sum_m[c_{lm}\langle c_k^\dagger c_m^\dagger\rangle+d_{lm}\langle c_k^\dagger c_m\rangle]\\ &= d_{lk}\frac{1}{e^{\beta(\omega_k-\mu)}-1} = -d_{lk}\frac{1}{1-e^{\beta(\omega_k-\mu)}}\\ &= -d_{lk}\frac{1}{1-e^{\lambda(c_k^\dagger)\beta(\omega_k-\mu)}},\end{aligned}\tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}\langle c_kA_l\rangle &= \sum_m[c_{lm}\langle c_kc_m^\dagger\rangle+d_{lm}\langle c_kc_m\rangle]\\ &= c_{lk}\Big[\frac{1}{e^{\beta(\omega_k-\mu)}-1}+1\Big] = c_{lk}\frac{e^{\beta(\omega_k-\mu)}}{e^{\beta(\omega_k-\mu)}-1}\\ &= c_{lk}\frac{1}{1-e^{\lambda(c_k)\beta(\omega_k-\mu)}}\end{aligned}\tag{2.35}$$

であるから、(2.32) は、

$$\langle AA_2A_3\cdots A_N\rangle = \sum_{l=2}^{N}\langle AA_l\rangle\langle A_2\overset{l}{\cdots}A_N\rangle \tag{2.36}$$

となる。線形性から

$$\langle A_1A_2A_3\cdots A_N\rangle = \sum_{l=2}^{N}\langle A_1A_l\rangle\langle A_2\overset{l}{\cdots}A_N\rangle \tag{2.37}$$

この式から数学的帰納法により (2.18) が示される。
(2.18) から (1.45)

$$\langle \tilde{\mathrm{T}}_C e^{A+B} \rangle = \exp\left[\langle \tilde{\mathrm{T}}_C \frac{(A+B)^2}{2} \rangle \right] \tag{2.38}$$

を示す。(2.18) より、

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathrm{T}}_C e^{A+B} \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \tilde{\mathrm{T}}_C (A+B)^n \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \langle \tilde{\mathrm{T}}_C (A+B)^{2n} \rangle \end{aligned} \tag{2.39}$$

$C = A, B$ とし、

$$C = \int_0^{\tau} dt\ c(t) \tag{2.40}$$

とかく。$c_i = a, b$ とし、

$$\tilde{\mathrm{T}}_C [c_1(t_1) \cdots c_n(t_n)] = c_{i_1}(t_{i_1}) \cdots c_{i_n}(t_{i_n}) \tag{2.41}$$

とかく。$\langle c_{i_1}(t_{i_1}) \cdots c_{i_n}(t_{i_n}) \rangle$ に wick の定理を使うと、現れるペア $\langle c_I(t_I) c_J(t_J) \rangle$ の中で

$$c_I(t_I) c_J(t_J) = \tilde{\mathrm{T}}_C c_I(t_I) c_J(t_J) \tag{2.42}$$

となっている。この事実と (2.23) より、

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathrm{T}}_C e^{A+B} \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \langle \tilde{\mathrm{T}}_C (A+B)^{2n} \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{(2n)!}{2^n n!} \langle \tilde{\mathrm{T}}_C (A+B)^2 \rangle^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \tilde{\mathrm{T}}_C \frac{(A+B)^2}{2} \rangle^n \\ &= \exp\left[\langle \tilde{\mathrm{T}}_C \frac{(A+B)^2}{2} \rangle \right] \end{aligned} \tag{2.43}$$

を得る。(2.18) を $A_i = A + B (i = 1, 2, \cdots, 2n)$ に対して使った。

2.3 影響汎関数の性質：一般論

この節は [1] の 12 章を参考にし、拡張したものである。(1.23)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[z, z'] = &\int d[Z_f] \int d[Z_i] \int d[Z_i'] \int_{Z(0)=Z_i}^{Z(t)=Z_f} \mathcal{D}[Z] \int_{Z'(0)=Z_i'}^{Z'(t)=Z_f} \mathcal{D}[Z'] \\ &\times e^{iS_B[Z] - iS_B[Z'] + iS_{SB}[z,Z] - iS_{SB}[z',Z']} \langle Z_i | \rho_B(0) | Z_i' \rangle \end{aligned} \tag{2.44}$$

より、

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{F}[z,z'])^* &= \int d[Z_f]\int d[Z_i]\int d[Z_i'] \int_{Z(0)=Z_i}^{Z(t)=Z_f} \mathcal{D}[Z] \int_{Z'(0)=Z_i'}^{Z'(t)=Z_f} \mathcal{D}[Z'] \\
&\quad \times e^{-iS_B[Z]+iS_B[Z']-iS_{SB}[z,Z]+iS_{SB}[z',Z']} \langle Z_i'|\rho_B(0)|Z_i\rangle \\
&= \int d[Z_f]\int d[Z_i']\int d[Z_i] \int_{Z(0)=Z_i'}^{Z(t)=Z_f} \mathcal{D}[Z] \int_{Z'(0)=Z_i}^{Z'(t)=Z_f} \mathcal{D}[Z'] \\
&\quad \times e^{-iS_B[Z]+iS_B[Z']-iS_{SB}[z,Z]+iS_{SB}[z',Z']} \langle Z_i|\rho_B(0)|Z_i'\rangle \\
&= \int d[Z_f]\int d[Z_i']\int d[Z_i] \int_{Z(0)=Z_i'}^{Z(t)=Z_f} \mathcal{D}[Z'] \int_{Z'(0)=Z_i}^{Z'(t)=Z_f} \mathcal{D}[Z] \\
&\quad \times e^{-iS_B[Z']+iS_B[Z]-iS_{SB}[z,Z']+iS_{SB}[z',Z]} \langle Z_i|\rho_B(0)|Z_i'\rangle \\
&= \mathcal{F}[z',z]
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

を得る。

今、

$$
z(t') = z'(t'), \quad z^*(t') = z'^*(t') \quad (0 \le t_0 \le t' \le t) \tag{2.46}
$$

とする。t_0 は任意である。$S_B[Z]$ などを t_0 から t までの作用とし、

$$
S_{B,\mathrm{eff}}[Z] \stackrel{\mathrm{def}}{=} S_B[Z] + S_{SB}[z,Z], \quad S_{B,\mathrm{eff}}[Z'] = S_B[Z'] + S_{SB}[z,Z'] \tag{2.47}
$$

と置く。今、

$$
I_{t_0,t}(Z_0,Z_0') \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int d[Z_1] \int_{Z(t_0)=Z_0}^{Z(t)=Z_1} \mathcal{D}[Z] \int_{Z'(t_0)=Z_0'}^{Z'(t)=Z_1} \mathcal{D}[Z']\ e^{iS_{B,\mathrm{eff}}[Z]-iS_{B,\mathrm{eff}}[Z']} \tag{2.48}
$$

とする。これは、

$$
K_{B,\mathrm{eff}}(Z_1,t;Z_0,t_0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_{Z(t_0)=Z_0}^{Z(t)=Z_1} \mathcal{D}[Z]\ e^{iS_{B,\mathrm{eff}}[Z]} \tag{2.49}
$$

を用いて、

$$
I_{t_0,t}(Z_0,Z_0') = \int d[Z_1]\ K_{B,\mathrm{eff}}(Z_1,t;Z_0,t_0) K^*_{B,\mathrm{eff}}(Z_1,t;Z_0',t_0) \tag{2.50}
$$

とかける。更に、

$$
I_{t_0,t} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int d[Z_0]\int d[Z_0']\ |Z_0'\rangle I_{t_0,t}(Z_0,Z_0')\langle Z_0| \tag{2.51}
$$

とする。$|\Phi\rangle$, $|\Psi\rangle$ を B 系の任意のベクトルとすると、

$$
\begin{aligned}
\langle\Phi|I_{t_0,t}|\Psi\rangle &= \int d[Z_0]\int d[Z_0']\ \langle\Phi|Z_0'\rangle I_{t_0,t}(Z_0,Z_0')\langle Z_0|\Psi\rangle \\
&= \int d[Z_0]\int d[Z_0']\int d[Z_1]\ K_{B,\mathrm{eff}}(Z_1,t;Z_0,t_0)\langle Z_0|\Psi\rangle K^*_{B,\mathrm{eff}}(Z_1,t;Z_0',t_0)\langle\Phi|Z_0'\rangle
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

を得る。今、

$$
U_{B,\mathrm{eff}}(t,t_0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int d[Z_0]\int d[Z_1]\ |Z_1\rangle K_{B,\mathrm{eff}}(Z_1,t;Z_0,t_0)\langle Z_0| \tag{2.53}
$$

と置くと、(1.6) より、

$$\int d[Z_0]\ K_{B,\mathrm{eff}}(Z_1,t;Z_0,t_0)\langle Z_0|\Psi\rangle \;=\; \langle Z_1|U_{B,\mathrm{eff}}(t,t_0)|\Psi\rangle \tag{2.54}$$

である。よって、(2.52) は、

$$\begin{aligned}\langle\Phi|I_{t_0,t}|\Psi\rangle \;&=\; \int d[Z_1]\ \langle Z_1|U_{B,\mathrm{eff}}(t,t_0)|\Psi\rangle\langle\Phi|U^\dagger_{B,\mathrm{eff}}(t,t_0)|Z_1\rangle\\ &=\; \mathrm{Tr}_B[U_{B,\mathrm{eff}}(t,t_0)|\Psi\rangle\langle\Phi|U^\dagger_{B,\mathrm{eff}}(t,t_0)]\\ &=\; \langle\Phi|U^\dagger_{B,\mathrm{eff}}(t,t_0)U_{B,\mathrm{eff}}(t,t_0)|\Psi\rangle\\ &=\; \langle\Phi|\Psi\rangle\end{aligned} \tag{2.55}$$

となり、これは、

$$I_{t_0,t}=1 \tag{2.56}$$

を意味する。よって、$I_{t_0,t}(Z_0,Z_0')$ は、固定した $\{z(\bullet)|t_0\le\bullet\le t\}$ に依らない。ところで、(2.48) より、

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[z,z'] \;=\; &\int d[Z_0]\int d[Z_0']\ I_{t_0,t}(Z_0,Z_0')\int d[Z_i]\int d[Z_i']\int_{Z(0)=Z_i}^{Z(t_0)=Z_0}\mathcal{D}[Z]\int_{Z'(0)=Z_i'}^{Z'(t_0)=Z_0'}\mathcal{D}[Z']\\ &\times e^{i\int_0^{t_0}dt\ \cdots}\langle Z_i|\rho_B(0)|Z_i'\rangle\end{aligned} \tag{2.57}$$

である。$I_{t_0,t}(Z_0,Z_0')$ が $\{z(\bullet)|t_0\le\bullet\le t\}$ に依らないことから、$\mathcal{F}[z,z']$ もそれに依らない事が分かる：

$$z(\bullet)=z'(\bullet)\quad(s\le t_0\le\bullet\le t)\Longrightarrow\mathcal{F}[z,z']\ \text{は}\ \{z(\bullet)|t_0\le\bullet\le t\}\ \text{に依らない}. \tag{2.58}$$

2.4 影響汎関数の具体形：一般論

この節も [1] の 12 章を参考にし、拡張したものである。相互作用 H_{SB} として、(1.26) の場合を考える。$L_A=L_A[a,a^\dagger]$ は注目形の演算子, b は熱浴のラベルである。この場合、

$$S_B[Z] \;=\; \int_0^t dt\ \Big(\frac{i}{2}\sum_k\{Z_k^*(t)\frac{Z_k(t)}{dt}-Z_k(t)\frac{Z_k^*(t)}{dt}\}-\sum_k\omega_k Z_k^*(t)Z_k(t)\Big), \tag{2.59}$$

$$S_{SB}[z,Z] \;=\; -\int_0^t dt\ \sum_{A=1}^m L_A^*[z(t),z^*(t)]\sum_k g_{k,A}Z_k(t)+\text{c.c.}, \tag{2.60}$$

となる。(1.23) の積分は、ガウス積分なので実行できる。適当な微分演算子 $D_k(t_1,t_2)$ を導入し、

$$S_B[Z] \;=\; \int_0^t dt_1\int_0^t dt_2\ \sum_k[Z_k(t_1)D_k(t_1,t_2)Z_k^*(t_2)+Z_k^*(t_1)D_k^*(t_1,t_2)Z_k(t_2)] \tag{2.61}$$

と変形すればよい。しかし、ここではこれを実行せず､§ 1.3 で演算子の方法で、次の型になる事を示す：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[z,z'] \;=\; \exp\Big[-&\sum_{A,B}\sum_{\alpha,\beta=\pm}\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\ \Big\{l_{A\alpha}(t_1)X_{A\alpha,B\beta}(t_1,t_2)l_{B\beta}(t_2)\\ &+l'_{A\alpha}(t_1)Y_{A\alpha,B\beta}(t_1,t_2)l_{B\beta}(t_2)+l_{A\alpha}(t_1)Z_{A\alpha,B\beta}(t_1,t_2)l'_{B\beta}(t_2)\\ &+l'_{A\alpha}(t_1)W_{A\alpha,B\beta}(t_1,t_2)l'_{B\beta}(t_2)\Big\}\Big],\end{aligned} \tag{2.62}$$

$$l_{A-}(t)\ \stackrel{\mathrm{def}}{=}\ L_A[z(t),z^*(t)],\ \ l_{A+}(t)\stackrel{\mathrm{def}}{=}L_A^*[z(t),z^*(t)],\ \ l'_{A-}(t)\stackrel{\mathrm{def}}{=}L_A[z'(t),z'^*(t)]. \tag{2.63}$$

上式の * は、

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{F}[z,z'])^* \;=\; \exp\Big[-\sum_{A,B}\sum_{\alpha,\beta=\pm}\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\, \Big\{ & l_{A,-\alpha}(t_1)X^*_{A\alpha,B\beta}(t_1,t_2)l_{B,-\beta}(t_2) \\
& +l'_{A,-\alpha}(t_1)Y^*_{A\alpha,B\beta}(t_1,t_2)l_{B,-\beta}(t_2)+l_{A,-\alpha}(t_1)Z^*_{A\alpha,B\beta}(t_1,t_2)l'_{B,-\beta}(t_2) \\
& +l'_{A,-\alpha}(t_1)W^*_{A\alpha,B\beta}(t_1,t_2)l'_{B,-\beta}(t_2)\Big\}\Big]
\end{aligned}
\tag{2.64}
$$

である。(2.45) より、

$$
W_{A\alpha,B\beta}(t_1,t_2) \;=\; X^*_{A,-\alpha,B,-\beta}(t_1,t_2), \tag{2.65}
$$

$$
Z_{A\alpha,B\beta}(t_1,t_2) \;=\; Y^*_{A,-\alpha,B,-\beta}(t_1,t_2) \tag{2.66}
$$

を得る。よって、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[z,z'] \;=\; \exp\Big[-\sum_{A,B}\sum_{\alpha,\beta=\pm}\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\, \Big\{ & l_{A\alpha}(t_1)X_{A\alpha,B\beta}(t_1,t_2)l_{B\beta}(t_2) \\
& +l'_{A\alpha}(t_1)Y_{A\alpha,B\beta}(t_1,t_2)l_{B\beta}(t_2)+l_{A\alpha}(t_1)Y^*_{A,-\alpha,B,-\beta}(t_1,t_2)l'_{B\beta}(t_2) \\
& +l'_{A\alpha}(t_1)X^*_{A,-\alpha,B,-\beta}(t_1,t_2)l'_{B\beta}(t_2)\Big\}\Big]
\end{aligned}
\tag{2.67}
$$

となる。上式の積分の一部

$$
\begin{aligned}
I(t_0) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; -\sum_{A,B}\sum_{\alpha,\beta=\pm}\int_{t_0}^t dt_1\int_0^{t_0} dt_2\, \Big\{ & l_{A\alpha}(t_1)X_{A\alpha,B\beta}(t_1,t_2)l_{B\beta}(t_2)+l'_{A\alpha}(t_1)Y_{A\alpha,B\beta}(t_1,t_2)l_{B\beta}(t_2) \\
& +l_{A\alpha}(t_1)Y^*_{A,-\alpha,B,-\beta}(t_1,t_2)l'_{B\beta}(t_2)+l'_{A\alpha}(t_1)X^*_{A,-\alpha,B,-\beta}(t_1,t_2)l'_{B\beta}(t_2)\Big\}
\end{aligned}
\tag{2.68}
$$

を考え、

$$
z(t') = z'(t'), \quad z^*(t') = z'^*(t') \quad (0 \le t_0 \le t' \le t)
$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
I(t_0) \;=\; -\sum_{A,B}\sum_{\alpha,\beta=\pm}\int_{t_0}^t dt_1\int_0^{t_0} dt_2\, \Big\{ & l_{A\alpha}(t_1)[X_{A\alpha,B\beta}(t_1,t_2)+Y_{A\alpha,B\beta}(t_1,t_2)]l_{B\beta}(t_2) \\
& +l_{A\alpha}(t_1)[Y^*_{A,-\alpha,B,-\beta}(t_1,t_2)+X^*_{A,-\alpha,B,-\beta}(t_1,t_2)]l'_{B\beta}(t_2)\Big\}
\end{aligned}
\tag{2.69}
$$

となり、これは、任意の $z(t_2), z'(t_2)$ に対して、$z(t_1)$ に依存しない。よって、

$$
Y_{A\alpha,B\beta}(t_1,t_2) \;=\; -X_{A\alpha,B\beta}(t_1,t_2) \tag{2.70}
$$

が $t_1 > t_0$, $t_2 < t_0$ に対して成立するが、t_0 は任意なので、上式は $t_1 > t_2$ ならいつでも成立する。以上より、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[z,z'] \;=&\; \exp\Big[-\sum_{A,B}\sum_{\alpha,\beta=\pm}\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\, \Big\{ l_{A\alpha}(t_1)X_{A\alpha,B\beta}(t_1,t_2)l_{B\beta}(t_2) \\
& \qquad -l'_{A\alpha}(t_1)X_{A\alpha,B\beta}(t_1,t_2)l_{B\beta}(t_2)-l_{A\alpha}(t_1)X^*_{A,-\alpha,B,-\beta}(t_1,t_2)l'_{B\beta}(t_2) \\
& \qquad +l'_{A\alpha}(t_1)X^*_{A,-\alpha,B,-\beta}(t_1,t_2)l'_{B\beta}(t_2)\Big\}\Big] \\
=&\; \exp\Big(-\sum_{A,B}\sum_{\alpha,\beta=\pm}\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\, [l_{A\alpha}(t_1)-l'_{A\alpha}(t_1)] \\
& \qquad \times[X_{A\alpha,B\beta}(t_1,t_2)l_{B\beta}(t_2)-X^*_{A,-\alpha,B,-\beta}(t_1,t_2)l'_{B\beta}(t_2)]\Big)
\end{aligned}
\tag{2.71}
$$

を得る。

(1.57) は (2.71) で、

$$X_{A\alpha,B\beta}(t_1,t_2)\ =\ -\langle C_{A\alpha}(t_1)C_{B\beta}(t_2)\rangle \tag{2.72}$$

としたものである。$\langle c_k\rangle = 0 = \langle c_k^\dagger\rangle$ より、

$$X_{A-,B-}(t_1,t_2) = 0 = X_{A+,B-}(t_1,t_2) \tag{2.73}$$

である。また、

$$X_{A-,B+}(t_1,t_2)\ =\ \langle C_A^\dagger(t_1)C_B(t_2)\rangle\,,\quad X_{A+,B-}(t_1,t_2) = \langle C_A(t_1)C_B^\dagger(t_2)\rangle \tag{2.74}$$

である。よって、(2.71) は、

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[z,z']\ =\ \exp\Big(-\sum_{A,B}\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\ \Big\{&\big(L_A[z(t_1),z^*(t_1)] - L_A[z'(t_1),z'^*(t_1)]\big)\\ &\times\big(\langle C_A^\dagger(t_1)C_B(t_2)\rangle L_B^*[z(t_2),z^*(t_2)] - \langle C_B(t_2)C_A^\dagger(t_1)\rangle L_B^*[z'(t_2),z'^*(t_2)]\big)\\ &+\big(L_A^*[z(t_1),z^*(t_1)] - L_A^*[z'(t_1),z'^*(t_1)]\big)\\ &\times\big(\langle C_A(t_1)C_B^\dagger(t_2)\rangle L_B[z(t_2),z^*(t_2)] - \langle C_B^\dagger(t_2)C_A(t_1)\rangle L_B[z'(t_2),z'^*(t_2)]\big)\Big\}\Big)\end{aligned} \tag{2.75}$$

となる。

参考文献

[1] R. P. Feynman, A. R. Hibbs『量子力学と経路積分』(マグロウヒル出版,1990)

[2] W. T. Strunz, *Phys. Lett.* A **224**, 25 (1996).

[3] L. Diosi, W. T. Strunz, *Phys. Lett.* A **235**, 569 (1997).

[4] L. Diosi, N. Gisin, W. T. Strunz, *Phys. Rev.* A **58**, 1699 (1998).

[5] W. T. Strunz, Ting Yu, *Phys. Rev.* A **69**, 052115 (2004).

[6] Ting Yu, *Phys. Rev.* A **69**, 062107 (2004).

[7] S.Kronke, W. T. Strunz, *J.Phys.* A *Math.Theor.* **45**, 055305 (2012).