TFD, NETFD, Stochastic NETFD

中嶋 慧

平成 25 年 1 月 20 日

目 次

1 はじめに

このノートでは、まず TFD(Thermo Field Dynamics) について解説し (第 2 章)、次に NETFD(Non-Equlibrium TFD) の原理について解説する (第 3 章)。さらに、量子 Langevin 方程式の微視的導出を議論 (第 4 章) した後、NETFD による量子確率微分方程式の解説を行う (第 5 章)。第 6 章では、半自由粒子について考え、第 7 章では、§ 4.2 や§ 5.3 を超演算子形式で再考する。第 8 章では、§ 2.3 との関係がある、非同値真空について述べる。付録では、本文で扱わなかった話題と、本文で証明なく使った式の導出を行う。

TFD は、もともと有限温度の場の理論の手法として導入された。第 2 章で示すように、この体系では、有限温度の統計平均が（倍加したヒルベルト空間の）真空平均でかける。これにより、一般の（絶対零度での）場の理論の手法の多くが、有限温度の場合にも使えるという利点がある。また、この見方をすることによって、チルダ粒子が熱自由度を司っているかのような視点が生まれ、熱・統計についての深遠な何かを捉えられるような気がする。しかし、このノートでは、場の理論については扱わない。

なお、このノートは主に

柴田文明・有光敏彦・番雅司・北島佐知子『量子と非平衡系の物理』, 東京大学出版 (2009 年)

を参考にしている。また、

H.Umezawa(著), 有光敏彦・有光直子 (訳)『場の量子論
—ミクロ，マクロ，そして熱物理学の最前線』, 培風館 (1995 年)

を第 2 章, 第 8 章で参考にし、

鈴木増雄『統計力学』 , 岩波書店 (1994 年)

を第 2 章で参考にした。また、§ 3.2 は、鈴木増雄先生の

$Prog.Theor.Phys.$ **77**, 32 (1987)

をもとにした。

2 TFD

2.1 チルダ粒子の導入

演算子 A に対して、そのチルダ共役演算子 $\tilde{A}(\equiv A^{\sim})$ を

$$
\begin{aligned}
(AB)^{\sim} &= \tilde{A}\tilde{B}, && (2.1)\\
c^{\sim} &= c^{*} \quad (c \text{ は c 数}), && (2.2)\\
(A+B)^{\sim} &= \tilde{A}+\tilde{B}, && (2.3)\\
(\tilde{A})^{\sim} &= A, && (2.4)\\
[\tilde{A}, B] &= 0 && (2.5)
\end{aligned}
$$

の関係によって導入する [1)]。また、ベクトル $|n\rangle$ に対してそのチルダ共役 $|n\rangle^{\sim}$ を導入する。このとき、任意の演算子 A に対して、

$$
(A|n\rangle)^{\sim} = \tilde{A}|n\rangle^{\sim} \tag{2.8}
$$

とする。

$\{|n\rangle\}$ を任意の規格直交完全系とし、

$$
|n, m\rangle \overset{\text{def}}{=} |n\rangle \otimes |m\rangle^{\sim} \tag{2.9}
$$

とする。さらに、

$$
|I\rangle \overset{\text{def}}{=} \sum_{n} |n, n\rangle \tag{2.10}
$$

を定義する。この $|I\rangle$ は規格直交完全系の選び方によらないことが、次のように示される。$\{|\mu\rangle\}$ を別の任意の規格直交完全系とすると、$|n\rangle$ は $\{|\mu\rangle\}$ で

$$
|n\rangle = \sum_{\mu} U_{n\mu}|\mu\rangle \tag{2.11}
$$

と展開できる。$U_{n\mu}$ はユニタリー行列である：

$$
\begin{aligned}
\sum_{n} U^{*}_{n\mu}U_{n\nu} &= \delta_{\mu\nu}, && (2.12)\\
\sum_{\mu} U_{n\mu}U^{*}_{m\mu} &= \delta_{nm}. && (2.13)
\end{aligned}
$$

(2.11) のチルダ共役を取ると、

$$
|n\rangle^{\sim} = \sum_{\mu} U^{*}_{n\mu}|\mu\rangle^{\sim} \tag{2.14}
$$

---

1) (2.4) は A がボソン的なときに正しい。A がフェルミオン的なときは、

$$
(\tilde{A})^{\sim} = -A \tag{2.6}
$$

とする。また、A, B がともにフェルミオン的なときは、(2.5) は、

$$
\{\tilde{A}, B\} = 0 \tag{2.7}
$$

となる。

を得る。(2.11),(2.14) を (2.10) に代入して

$$
\begin{aligned}
|I\rangle &= \sum_{n}\sum_{\mu\nu} U_{n\mu}U^{*}_{n\nu}|\mu,\nu\rangle \\
&= \sum_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu}|\mu,\nu\rangle \\
&= \sum_{\mu}|\mu,\mu\rangle
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

を得る。第 2 等号で (2.12) を用いた。

ρ を考えている系の密度演算子とし、ケット真空 $|0\rangle$ とブラ真空 $\langle 1|$ を

$$
|0\rangle \stackrel{\text{def}}{=} c_0\rho^{\alpha}|I\rangle, \tag{2.16}
$$

$$
\langle 1| \stackrel{\text{def}}{=} c_1\langle I|\rho^{1-\alpha}, \tag{2.17}
$$

$$
c_0c_1 = 1 \tag{2.18}
$$

で導入する。α は、

$$
0 \le \alpha \le 1 \tag{2.19}
$$

なる実数とする。任意の演算子 A に対して、

$$
\begin{aligned}
\langle 1|A|0\rangle &= c_0c_1\langle I|\rho^{1-\alpha}A\rho^{\alpha}|I\rangle \\
&= \sum_{n=0}\sum_{m=0}^{\infty}\langle m,m|\rho^{1-\alpha}A\rho^{\alpha}|n,n\rangle \\
&= \sum_{n=0}\langle n|\rho^{1-\alpha}A\rho^{\alpha}|n\rangle \\
&= \mathrm{Tr}(\rho^{1-\alpha}A\rho^{\alpha}) \\
&= \mathrm{Tr}(\rho A) \equiv \langle A\rangle
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

である [2)3)]。

---

2) 重要なのは、

$$
\langle I|A|I\rangle = \mathrm{Tr}(A) \tag{2.21}
$$

である。

3) $|\alpha\rangle$ をコヒーレント状態とすると、$\int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ |\alpha\rangle\langle\alpha| = 1$ であり、

$$
|I\rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ |\alpha,\alpha\rangle \tag{2.22}
$$

である。実際、$|\alpha\rangle = \sum_n \langle n|\alpha\rangle|n\rangle$, $|\alpha,\alpha\rangle = \sum_{n,m}\langle n|\alpha\rangle\langle\alpha|m\rangle|n,m\rangle$ なので、$\int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ \langle n|\alpha\rangle\langle\alpha|m\rangle = \delta_{nm}$ より上式を得る。また、

$$
\begin{aligned}
\langle I|A|I\rangle &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\int \frac{d^2\alpha'}{\pi}\ \langle\alpha,\alpha|A|\alpha',\alpha'\rangle \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\int \frac{d^2\alpha'}{\pi}\ \langle\alpha|A|\alpha'\rangle\langle\alpha'|\alpha\rangle \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ \langle\alpha|A|\alpha\rangle = \mathrm{Tr}(A).
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

逆温度 β の熱平衡状態の密度演算子は

$$\rho_{eq}(\beta) = \frac{e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})} \tag{2.24}$$

である。平衡状態のケット真空、ブラ真空は

$$|0(\beta)\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} c_0 \rho_{eq}^{\alpha}(\beta)|I\rangle, \tag{2.25}$$

$$\langle 1(\beta)| \stackrel{\mathrm{def}}{=} c_1 \langle I|\rho_{eq}^{1-\alpha}(\beta), \tag{2.26}$$

$$c_0 c_1 = 1 \tag{2.27}$$

である。

ハミルトニアン H が

$$H = \sum_l \hbar\omega_l a_l^\dagger a_l \tag{2.28}$$

である系を考える。ただし、

$$[a_l, a_k^\dagger] = \delta_{lk} \tag{2.29}$$

であり、a_l と a_k とは可換である。上式のチルダ共役より

$$[\tilde{a}_l, \tilde{a}_k^\dagger] = \delta_{lk} \tag{2.30}$$

を得る。今

$$a_l^{\mu=1} = a_l\,, \quad a_l^{\mu=2} = \tilde{a}_l^\dagger, \tag{2.31}$$

$$\bar{a}_l{}^{\mu=1} = a_l^\dagger\,, \quad \bar{a}_l{}^{\mu=2} = -\tilde{a}_l \tag{2.32}$$

というダブレットを導入する。(2.29),(2.30),(2.5) より

$$[a_l^\mu, \bar{a}_l{}^\nu] = \delta^{\mu\nu} \tag{2.33}$$

を得る。この系の平衡状態は、

$$\rho_{eq}(\beta) = \prod_l f_l^{a_l^\dagger a_l}(\beta)[1 - f_l(\beta)], \tag{2.34}$$

$$f_l(\beta) \equiv e^{-\beta\hbar\omega_l} \tag{2.35}$$

である。この状態での平均を

$$\langle A\rangle_\beta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Tr}(\rho_{eq}(\beta)A) \tag{2.36}$$

と書くと

$$n_l(\beta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle a_l^\dagger a_l\rangle_\beta \tag{2.37}$$

$$= \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_l} - 1} \tag{2.38}$$

である。

今、ある i に対して、真空 $|0\rangle_i$ を

$$a_i|0\rangle_i = 0 \tag{2.39}$$

で導入する。i 番目の個数状態 $|n_i\rangle_i$ は

$$|n_i\rangle_i = \frac{1}{\sqrt{n_i!}}(a_i^\dagger)^{n_i}|0\rangle_i \tag{2.40}$$

で与えられる。$\{|n_i\rangle_i\}$ は規格直交性

$${}_i\langle n_i|n_i'\rangle_i = \delta_{n_i n_i'} \tag{2.41}$$

を満たす。また $\{|n_i\rangle_i\}$ は完全性

$$\sum_{n_i=0}^{\infty} |n_i\rangle_{ii}\langle n_i| = 1_i \tag{2.42}$$

も満たしているものとする。ここで，1_i は a_i，$a_i^\dagger$ が作用するベクトル空間における恒等演算子である。今、個数状態

$$|\{n_i\}\rangle \overset{\text{def}}{=} \bigotimes_i |n_i\rangle_i \tag{2.43}$$

を定義すると、全ての i に対して

$$a_i^\dagger a_i|\{n_i\}\rangle = n_i|\{n_i\}\rangle \tag{2.44}$$

となる。(2.41)，(2.42) より，基底 $\big\{|\{n_i\}\rangle\big\}$ は規格直交完全系をなしていることが分かる。すなわち，

$$\begin{aligned}\langle\{n_i\}|\{n_i'\}\rangle &= \prod_i {}_i\langle n_i|n_i'\rangle_i \\ &= \prod_i \delta_{n_i,n_i'}\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\Big(\prod_i \sum_{n_i}^{\infty}\Big)|\{n_i\}\rangle\langle\{n_i\}| = 1 \tag{2.46}$$

である。ただし，$1 = \bigotimes_i 1_i$ である。以下、$\bigotimes_i$ を $\prod_i$ とかく。

今、規格直交完全系 $\{|n\rangle\}$ として、$\big\{|\{n_i\}\rangle\big\}$ を取る。

$$|\{n_i\},\{m_i\}\rangle \overset{\text{def}}{=} |\{n_i\}\rangle \otimes |\{m_i\}\rangle^{\sim} \tag{2.47}$$

すると、$|I\rangle$ は

$$|I\rangle = \big(\prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty}\big)|\{n_i\},\{n_i\}\rangle \tag{2.48}$$

とかける。この表式を用いると (2.25),(2.26) が

$$|0(\beta)\rangle = c_0 \prod_l |0(\beta)\rangle_l, \tag{2.49}$$

$$\langle 1(\beta)| = c_1 \prod_l {}_l\langle 1(\beta)|, \tag{2.50}$$

$$|0(\beta)\rangle_l \overset{\text{def}}{=} [1-f_l(\beta)]^{\alpha} \sum_{n_l=0}^{\infty} f_l^{\alpha n_l}(\beta)|n_l,n_l\rangle_l, \tag{2.51}$$

$${}_l\langle 1(\beta)| \overset{\text{def}}{=} [1-f_l(\beta)]^{1-\alpha} \sum_{n_l=0}^{\infty} f_l^{(1-\alpha)n_l}(\beta)_l\langle n_l,n_l| \tag{2.52}$$

とかけることがわかる。また上式より、$|0(\beta)\rangle$ と $\langle 1(\beta)|$ のチルダ不変性

$$|0(\beta)\rangle^{\sim} = |0(\beta)\rangle, \quad \langle 1(\beta)|^{\sim} = \langle 1(\beta)| \tag{2.53}$$

がわかる。

2.2 熱的 Bogoliubov 変換

今、$\xi_l, \xi_l^{\female}$ およびそのチルダ共役 $\tilde{\xi}_l, \tilde{\xi}_l^{\female}$ を

$$\xi_l(\beta)|0(\beta)\rangle \;=\; \tilde{\xi}_l(\beta)|0(\beta)\rangle = 0, \tag{2.54}$$

$$\langle 1(\beta)|\xi_l^{\female}(\beta) \;=\; \langle 1(\beta)|\tilde{\xi}_l^{\female}(\beta) = 0 \tag{2.55}$$

を満たし、交換関係が

$$[\xi_l^{\mu}, \bar{\xi}_l^{\,\nu}] = \delta^{\mu\nu} \tag{2.56}$$

となるものとして導入する。ただし、ダブレット表記

$$\xi_l^{\mu=1} = \xi_l\,, \quad \xi_l^{\mu=2} = \tilde{\xi}_l^{\female}, \tag{2.57}$$

$$\bar{\xi}_l^{\,\mu=1} = \xi_l^{\female}, \quad \bar{\xi}_l^{\,\mu=2} = -\tilde{\xi}_l \tag{2.58}$$

を用いた。$a_l^{\mu}, \bar{a}_l^{\mu}$ は交換関係 (2.33) を満たすので、(2.56) を満たすためには、

$$\xi^{\mu}(\beta) \;=\; B_l(\beta)^{\mu\nu} a_l^{\nu}, \tag{2.59}$$

$$\bar{\xi}^{\mu}(\beta) \;=\; \bar{a}_l^{\nu} B_l^{-1}(\beta)^{\nu\mu}, \tag{2.60}$$

$$\tag{2.61}$$

でなくてはならない。$B_l(\beta)$ を、

$$B_l(\beta) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

と書くと、(2.59) は

$$\xi_l \;=\; b_{11} a_l + b_{12} \tilde{a}_l^{\dagger}, \tag{2.63}$$

$$\tilde{\xi}_l^{\female} \;=\; b_{21} a_l + b_{22} \tilde{a}_l^{\dagger} \tag{2.64}$$

となる。$B_l^{-1}(\beta)$

$$B_l^{-1}(\beta) = \frac{1}{b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}} \begin{pmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{pmatrix} \tag{2.65}$$

となり、(2.60) は

$$\xi_l^{\female} \;=\; \frac{b_{22} a_l^{\dagger} + b_{21} \tilde{a}_l}{b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}}, \tag{2.66}$$

$$\tilde{\xi}_l \;=\; \frac{b_{12} a_l^{\dagger} + b_{11} \tilde{a}_l}{b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}} \tag{2.67}$$

となる。上 2 式のチルダ共役を取ると、

$$
\begin{aligned}
\tilde{\xi}_l^{\text{♀}} &= \frac{b_{22}^* \tilde{a}_l^\dagger + b_{21}^* a_l}{(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})^*}, && (2.68)\\
\xi_l &= \frac{b_{12}^* \tilde{a}_l^\dagger + b_{11}^* a_l}{(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})^*} && (2.69)
\end{aligned}
$$

となる。この 2 式を (2.66),(2.67) と比べて

$$
\frac{b_{ij}^*}{(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})^*} = b_{ij} \quad (i, j = 1, 2) \tag{2.70}
$$

を得る。この式の絶対値を取ると

$$
|b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}| = 1 \tag{2.71}
$$

がわかる。今、

$$
b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} = e^{i\theta} \tag{2.72}
$$

とおき、

$$
b_{ij} = |b_{ij}| e^{i\theta_{ij}} \tag{2.73}
$$

と書くと、(2.70) より

$$
e^{i2\theta_{ij}} = e^{-i\theta} \tag{2.74}
$$

を得る。よって、$\theta = 0$ と選ぶと、

$$
\begin{aligned}
b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} &= 1, && (2.75)\\
b_{ij}^* &= b_{ij} && (2.76)
\end{aligned}
$$

となる。

(2.51) より

$$
\begin{aligned}
a_l|0(\beta)\rangle_l &= [1 - f_l(\beta)]^\alpha \sum_{n_l=0}^{\infty} f_l^{\alpha n_l}(\beta)\sqrt{n_l}|n_l - 1, n_l\rangle_l \\
&= [1 - f_l(\beta)]^\alpha \sum_{n_l=0}^{\infty} f_l^{\alpha(n_l+1)}(\beta)\sqrt{n_l + 1}|n_l, n_l + 1\rangle_l, && (2.77)\\
\tilde{a}_l^\dagger|0(\beta)\rangle_l &= [1 - f_l(\beta)]^\alpha \sum_{n_l=0}^{\infty} f_l^{\alpha n_l}(\beta)\sqrt{n_l + 1}|n_l, n_l + 1\rangle_l && (2.78)
\end{aligned}
$$

を得る。この 2 式と (2.63) より

$$
\xi_l|0(\beta)\rangle_l = (b_{11}f_l^\alpha(\beta) + b_{12})[1 - f_l(\beta)]^\alpha \sum_{n_l=0}^{\infty} f_l^{\alpha n_l}(\beta)\sqrt{n_l + 1}|n_l, n_l + 1\rangle_l \tag{2.79}
$$

となる。これと、(2.54) から

$$
b_{11}f_l^\alpha(\beta) + b_{12} = 0 \tag{2.80}
$$

を得る。
　また、(2.52) より

$$
\begin{aligned}
{}_l\langle 1(\beta)|a_l \;&=\; [1-f_l(\beta)]^{1-\alpha}\sum_{n_l=0}^{\infty} f_l^{(1-\alpha)n_l}(\beta)\sqrt{n_l+1}\,{}_l\langle n_l+1, n_l|, && (2.81)\\
{}_l\langle 1(\beta)|\tilde{a}_l^{\dagger} \;&=\; [1-f_l(\beta)]^{1-\alpha}\sum_{n_l=0}^{\infty} f_l^{(1-\alpha)n_l}(\beta)\sqrt{n_l}\,{}_l\langle n_l, n_l-1| \\
&=\; [1-f_l(\beta)]^{1-\alpha}\sum_{n_l=0}^{\infty} f_l^{(1-\alpha)(n_l+1)}(\beta)\sqrt{n_l+1}\,{}_l\langle n_l+1, n_l| && (2.82)
\end{aligned}
$$

を得る。この 2 式と (2.64) より

$$
{}_l\langle 1(\beta)|\tilde{\xi}_l^{\female} \;=\; [b_{21}+b_{22}f_l^{1-\alpha}(\beta)][1-f_l(\beta)]^{1-\alpha}\sum_{n_l=0}^{\infty} f_l^{(1-\alpha)(n_l+1)}(\beta)\sqrt{n_l+1}\,{}_l\langle n_l+1, n_l| \tag{2.83}
$$

となる。これと、(2.55) から

$$
b_{21}+b_{22}f_l^{1-\alpha}(\beta) \;=\; 0 \tag{2.84}
$$

を得る。
　(2.75) に (2.80),(2.84) から得られる式を代入して

$$
[1-f_l(\beta)]b_{11}b_{22} = 1 \tag{2.85}
$$

を得る。
　(2.75) を (2.66) に代入すると、

$$
\xi_l^{\female} \;=\; b_{22}a_l^{\dagger} + b_{21}\tilde{a}_l \tag{2.86}
$$

となる。ところで、ξ のダガー共役 $\xi^{\dagger}$ は (2.63),(2.76) から

$$
\xi^{\dagger} = b_{11}a^{\dagger} + b_{12}\tilde{a}_l \tag{2.87}
$$

である。$\xi_l^{\female}$ と $\xi^{\dagger}$ と $a^{\dagger}$ の係数を一致するように

$$
b_{11} = b_{22} \tag{2.88}
$$

と選ぶ。
　(2.80),(2.84),(2.85) より

$$
\begin{aligned}
B_l(\beta) \;&=\; \frac{1}{\sqrt{1-f_l(\beta)}}\begin{pmatrix} 1 & -f_l^{\alpha}(\beta) \\ -f_l^{1-\alpha}(\beta) & 1 \end{pmatrix} \qquad (f_l(\beta)\equiv e^{-\beta\hbar\omega_l}) && (2.89)\\
&=\; \sqrt{1+n_l(\beta)}\begin{pmatrix} 1 & -f_l^{\alpha}(\beta) \\ -f_l^{1-\alpha}(\beta) & 1 \end{pmatrix} && (2.90)
\end{aligned}
$$

を得る。これを (2.59),(2.60) に代入すると、

$$\xi_l(\beta) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-f_l(\beta)}}a_l - \frac{f_l^\alpha(\beta)}{\sqrt{1-f_l(\beta)}}\tilde{a}_l^\dagger, \tag{2.91}$$

$$\xi_l^{\female}(\beta) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-f_l(\beta)}}a_l^\dagger - \frac{f_l^{1-\alpha}(\beta)}{\sqrt{1-f_l(\beta)}}\tilde{a}_l, \tag{2.92}$$

$$\tilde{\xi}_l(\beta) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-f_l(\beta)}}\tilde{a}_l - \frac{f_l^\alpha(\beta)}{\sqrt{1-f_l(\beta)}}a_l^\dagger, \tag{2.93}$$

$$\tilde{\xi}_l^{\female}(\beta) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-f_l(\beta)}}\tilde{a}_l^\dagger - \frac{f_l^{1-\alpha}(\beta)}{\sqrt{1-f_l(\beta)}}a_l \tag{2.94}$$

となる。この 4 式を (2.54),(2.55) に代入して、

$$(a_l - f_l^\alpha(\beta)\tilde{a}_l^\dagger)|0(\beta)\rangle \;=\; 0, \tag{2.95}$$

$$(\tilde{a}_l - f_l^\alpha(\beta)a_l^\dagger)|0(\beta)\rangle \;=\; 0, \tag{2.96}$$

$$\langle 1(\beta)|(a_l^\dagger - f_l^{1-\alpha}(\beta)\tilde{a}_l) \;=\; 0, \tag{2.97}$$

$$\langle 1(\beta)|(\tilde{a}_l^\dagger - f_l^{1-\alpha}(\beta)a_l) \;=\; 0 \tag{2.98}$$

を得る。これを熱状態条件という。

なお、(2.95),(2.96),(2.97),(2.98) は

$$\xi_l^\mu(\beta) = \hat{V}(\theta)a_l^\mu\hat{V}^{-1}(\theta), \quad \bar{\xi}_l^\mu(\beta) = \hat{V}(\theta)\bar{a}_l^\mu\hat{V}^{-1}(\theta) \tag{2.99}$$

の形で書けることが知られている。ここで $\hat{V}(\theta)$ は、

$$\hat{V}(\theta) \;=\; e^{i\hat{G}(\theta)}, \tag{2.100}$$

$$i\hat{G}(\theta) \;=\; \sum_l\sum_{a=1}^{3}\theta_{l,a}i\hat{G}_{l,a}, \tag{2.101}$$

$$i\hat{G}_{l,1} \;=\; a_l\tilde{a}_l - a_l^\dagger\tilde{a}_l^\dagger, \tag{2.102}$$

$$i\hat{G}_{l,2} \;=\; a_l\tilde{a}_l + a_l^\dagger\tilde{a}_l^\dagger, \tag{2.103}$$

$$i\hat{G}_{l,3} \;=\; a_l^\dagger\tilde{a}_l + \tilde{a}_l^\dagger\tilde{a}_l^\dagger \tag{2.104}$$

で $\theta_{l,a}$ を適当に選んだものである。$\hat{G}_{l,2}, \hat{G}_{l,3}$ は反エルミートである。§ 2.3 で議論するように、ユニタリー表現 ($\alpha = \frac{1}{2}$) では $\theta_{l,2} = \theta_{l,3} = 0$ である。

2.3 ユニタリー表現

(2.16),(2.17) で

$$c_1 = c_0^*, \quad \alpha = \frac{1}{2} \tag{2.105}$$

としたものをユニタリー表現という。ユニタリー表現では、

$$\langle 1| = |0\rangle^\dagger \tag{2.106}$$

である。以下ではさらに

$$c_0 = c_1 = 1 \tag{2.107}$$

と選ぶ。このとき、(2.25),(2.26) は

$$
\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle \;&=\; \rho_{eq}^{1/2}(\beta)|I\rangle, && (2.108)\\
\langle 1(\beta)| \;&=\; \langle I|\rho_{eq}^{1/2}(\beta), && (2.109)\\
&=\; |0(\beta)\rangle^{\dagger} && (2.110)
\end{aligned}
$$

となる。

ハミルトニアンが (2.28) で与えられる系を考える。真空 $|0\rangle\rangle$ を

$$a_i|0\rangle\rangle = 0\,, \quad \tilde{a}_i|0\rangle\rangle = 0 \qquad \text{for all } \; i \tag{2.111}$$

によって導入すると、$|0\rangle\rangle$ は (2.47) の記号を用いて

$$|0\rangle\rangle = |\{0\},\{0\}\rangle \tag{2.112}$$

とかける。

(2.95),(2.96),(2.97),(2.98) で

$$f_i(\beta) = \tanh^2\theta_i \tag{2.113}$$

と置き、$\alpha = \frac{1}{2}$ を代入すると、

$$
\begin{aligned}
\xi_i(\beta) \;&=\; \cosh\theta_i a_l - \sinh\theta_i \tilde{a}_l^{\dagger} \equiv a_i(\theta), && (2.114)\\
\xi_i^{\female}(\beta) \;&=\; \cosh\theta_i a_l^{\dagger} - \sinh\theta_i \tilde{a}_l \equiv a_i^{\dagger}(\theta), && (2.115)\\
\tilde{\xi}_i(\beta) \;&=\; \cosh\theta_i \tilde{a}_l - \sinh\theta_i a_l^{\dagger} \equiv \tilde{a}_i(\theta), && (2.116)\\
\tilde{\xi}_i^{\female}(\beta) \;&=\; \cosh\theta_i \tilde{a}_l^{\dagger} - \sinh\theta_i a_l \equiv \tilde{a}_i^{\dagger}(\theta) && (2.117)
\end{aligned}
$$

となる。ユニタリー表現では、

$$\xi_i^{\female}(\beta) = [\xi_i(\beta)]^{\dagger} \tag{2.118}$$

となっている。

a から $a(\theta)$ への変換はユニタリー変換

$$a_i(\theta) = \hat{U}(\theta)a_i\hat{U}^{\dagger}(\theta)\,, \quad \tilde{a}_i(\theta) = \hat{U}(\theta)\tilde{a}_i\hat{U}^{\dagger}(\theta) \tag{2.119}$$

である。ただし、

$$\hat{U}(\theta) \;=\; \exp\Big(\sum_i \theta_i(\tilde{a}_i^{\dagger}a_i^{\dagger} - a_i\tilde{a}_i)\Big) \tag{2.120}$$

はユニタリー演算子である。これは (2.100) で

$$\theta_{i,1} = -\theta_i \quad , \quad \theta_{i,2} = \theta_{i,3} = 0 \tag{2.121}$$

としたものである。

交換関係 (2.33) と性質

$$\hat{U}[A,B]\hat{U}^{\dagger} = [\hat{U}A\hat{U}^{\dagger}, \hat{U}B\hat{U}^{\dagger}] \tag{2.122}$$

より，$\{a_i(\theta), a_i^\dagger(\theta), \tilde{a}_i(\theta), \tilde{a}_i^\dagger(\theta)\}_{i=1}^N$ も正準交換関係

$$\Big[a_i(\theta), a_j^\dagger(\theta)\Big] \;=\; \delta_{ij}\,, \quad \Big[\tilde{a}_i(\theta), \tilde{a}_j^\dagger(\theta)\Big] = \delta_{ij} \tag{2.123}$$

を満たす。これ以外の交換関係は 0 である。

(2.119) より得られる

$$a_i \;=\; \hat{U}^\dagger(\theta) a_i(\theta) \hat{U}(\theta)\,, \quad \tilde{a}_i = \hat{U}^\dagger(\theta)\tilde{a}_i(\theta)\hat{U}(\theta) \tag{2.124}$$

を (2.111) に代入すると，

$$\hat{U}^\dagger(\theta) a_i(\theta)\hat{U}(\theta)|0\rangle\rangle = 0\,, \quad \hat{U}^\dagger(\theta)\tilde{a}_i(\theta)\hat{U}(\theta)|0\rangle\rangle = 0 \tag{2.125}$$

となる。ここで、状態

$$|0(\theta)\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \hat{U}(\theta)|0\rangle\rangle \tag{2.126}$$

を導入すると (2.125) は

$$a_i(\theta)|0(\theta)\rangle = 0\,, \quad \tilde{a}_i(\theta)|0(\theta)\rangle = 0 \tag{2.127}$$

となる。$|0(\theta)\rangle$ は

$$|0(\theta)\rangle = |0(\beta)\rangle \quad \text{where} \quad \tanh^2\theta_i = f_i(\beta) \tag{2.128}$$

を満たす。

$|0(\theta)\rangle$ を計算すると、

$$\begin{aligned}
|0(\theta)\rangle \;&=\; \exp\Big(\sum_i a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger \tanh\theta_i\Big)\exp\Big(-\sum_i [a_i a_i^\dagger + \tilde{a}_i^\dagger \tilde{a}_i]\ln\cosh\theta_i\Big)|0\rangle\rangle \\
&=\; \exp\Big(-\sum_i \ln\cosh\theta_i\Big)\exp\Big(\sum_i \tanh\theta_i a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger\Big)|0\rangle\rangle \qquad (2.129)\\
&=\; \exp\Big(-\sum_i \ln\cosh\theta_i\Big)\prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty} (\tanh\theta_i)^{n_i}|n_i, n_i\rangle_i \\
&=\; \exp\Big(-\sum_i \ln\cosh\theta_i\Big)\Big(\prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty}\Big)\Big(\prod_i (\tanh\theta_j)^{n_j}\Big)|\{n_i\},\{n_i\}\rangle \qquad (2.130)
\end{aligned}$$

となる。ただし，第 1 等号では (D.33) を利用して $\hat{U}(\theta)$ を a_i，$a_i^\dagger$ および $\tilde{a}_i$，$\tilde{a}_i^\dagger$ の正規積に近い形に書き直し，(2.111) を用いた。第 2 等号では正準交換関係 (2.33) を，第 3 等号では (2.47) を，第 4 等号では (2.40) を用いた。

(2.129),(2.128) より

$$|0(\beta)\rangle \;=\; \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_i \ln[1+n_i(\beta)]\Big)\exp\Big(\sum_i \sqrt{\frac{n_i(\beta)}{1+n_i(\beta)}}a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger\Big)|0\rangle\rangle \tag{2.131}$$

を得る。この式から、有限温度の熱的真空 $|0(\beta)\rangle$ は、サーマル・ペア $a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger$ が真空 $|0\rangle\rangle$ の上に凝縮した状態であることがわかる。

2.4　時間に依存する場合

Liouville-von Neumann 方程式は

$$i\hbar\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} = [H(t), \rho(t)] \tag{2.132}$$

である。ただし、ハミルトニアンが時間に陽に依存するとした。今、

$$|0(t)\rangle \overset{\text{def}}{=} \rho^{\alpha}(t)|I\rangle, \tag{2.133}$$

$$\langle 1(t)| \overset{\text{def}}{=} \langle I|\rho^{1-\alpha}(t) \tag{2.134}$$

とする。$|0(t)\rangle$ の従う微分方程式を求める。

今、$A(t)$ を時間に陽に依存するエルミート演算子とし、その固有値方程式を

$$A(t)|n\rangle_t = A_n(t)|n\rangle_t \tag{2.135}$$

とする。$A(t)$ はエルミートなので、

$$A_n^*(t) = A_n(t) \tag{2.136}$$

であり、$\{|n\rangle_t\}$ は規格完全直交系をなす。すると、$|I\rangle$ は、任意の時刻で

$$|I\rangle = \sum_n |n\rangle_t \otimes |n\rangle_t^{\sim} \tag{2.137}$$

とかける。$|I\rangle$ は時間によらない。

(2.135) のチルダ共役は、(2.2),(2.8),(2.136) より

$$\tilde{A}(t)|n\rangle_t^{\sim} = A_n(t)|n\rangle_t^{\sim} \tag{2.138}$$

となる。(2.135),(2.138) より、

$$\begin{aligned} A(t)|I\rangle &= \sum_n A_n(t)|n\rangle_t \otimes |n\rangle_t^{\sim} \\ &= \sum_n \tilde{A}(t)|n\rangle_t \otimes |n\rangle_t^{\sim} \\ &= \tilde{A}(t)|I\rangle \end{aligned} \tag{2.139}$$

を得る。

(2.132) は、

$$i\hbar\frac{\partial U(t)}{\partial t} = H(t)U(t) \tag{2.140}$$

を満たす $U(t)$ を用いて、

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^{\dagger}(t) \tag{2.141}$$

と形式的に解ける。また、この式より、

$$\rho^{\alpha}(t) = U(t)\rho^{\alpha}(0)U^{\dagger}(t) \tag{2.142}$$

を得る。上式を微分すると、

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial\rho^\alpha(t)}{\partial t} &= i\hbar\frac{\partial U(t)}{\partial t}\rho^\alpha(0)U^\dagger(t)+i\hbar U(t)\rho^\alpha(0)\frac{\partial U^\dagger(t)}{\partial t} \\
&= H(t)U(t)\rho^\alpha(0)U^\dagger(t)-U(t)\rho^\alpha(0)U^\dagger(t)H(t) \\
&= [H(t),\rho^\alpha(t)] \qquad (2.143)
\end{aligned}$$

となる。第 2 等号で (2.140) と (2.140) の † を取った式を用いた。よって、(2.133) の $|0(t)\rangle$ の時間微分は、

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|0(t)\rangle &= [H(t),\rho^\alpha(t)]|I\rangle \\
&= H(t)\rho^\alpha(t)|I\rangle-\rho^\alpha(t)H(t)|I\rangle \\
&= H(t)\rho^\alpha(t)|I\rangle-\rho^\alpha(t)\tilde{H}(t)|I\rangle \\
&= H(t)|0(t)\rangle-\tilde{H}(t)\rho^\alpha(t)|I\rangle \\
&= [H(t)-\tilde{H}(t)]|0(t)\rangle \\
&\equiv \hat{H}(t)|0(t)\rangle \qquad (2.144)
\end{aligned}$$

となる。ただし、第 1 等号で (2.143) を、第 3 等号で (2.139) で $A(t)=H(t)$ としたものを、第 4 等号で (2.5) を用いた。なお、

$$\hat{H}(t)\stackrel{\mathrm{def}}{=}H(t)-\tilde{H}(t) \qquad (2.145)$$

をハット・ハミルトニアンと言う。

$\rho(t)$ の固有方程式

$$\rho(t)|n\rangle_t=p_n(t)|n\rangle_t \qquad (2.146)$$

を考える。$\rho(t)$ はエルミート演算子なので、$p_n(t)$ は実数であり、$\{|n\rangle_t\}$ は規格直交完全系をなす。$\rho^\alpha(t)$ は

$$\rho^\alpha(t)=\sum_n p_n^\alpha(t)|n\rangle_t\langle n| \qquad (2.147)$$

と書ける。$\{|n\rangle_t\}$ を用いて、$|I\rangle$ を (2.137) とかくと、上式と (2.133) から、

$$\begin{aligned}
|0(t)\rangle &= \sum_n p_n^\alpha(t)|n\rangle_t|n\rangle_t^\sim \qquad (2.148) \\
&= |0(t)\rangle^\sim \qquad (2.149)
\end{aligned}$$

を得る。同様にして、

$$\langle 1(t)|=\langle 1(t)|^\sim \qquad (2.150)$$

を得る。真空のチルダ不変性は、$\rho(t)$ のユニタリー性の反映である。

3 NETFD

3.1 NETFD の導入

NETFD は TFD で $\alpha = 1$ とした場合に、散逸のある Liouville-von Neumann 方程式を扱う方法である。

(2.133),(2.134) で $\alpha = 1$ とすると、

$$|0(t)\rangle = \rho(t)|1\rangle, \tag{3.1}$$
$$\langle 1(t)| = \langle I| \equiv \langle 1| \tag{3.2}$$

となり、ブラ真空 $\langle 1(t)|$ は時間によらない。(2.144) は、ハミルトニアンが時間によらないとき

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|0(t)\rangle = \hat{H}|0(t)\rangle, \tag{3.3}$$
$$\hat{H} = H - \tilde{H} \tag{3.4}$$
$$= -\hat{H}^{\sim} \tag{3.5}$$

となる。また、(2.149),(2.150) は

$$|0(t)\rangle^{\sim} = |0(t)\rangle, \quad \langle 1|^{\sim} = \langle 1| \tag{3.6}$$

となる。

(2.139) の $\dagger$ から

$$\langle 1|A = \langle 1|\tilde{A} \quad \text{for} \quad A^{\dagger} = A \tag{3.7}$$

を得る。特に、$A = H$ とすると、

$$\langle 1|\hat{H} = \langle 1|H - \langle 1|\tilde{H} = 0 \tag{3.8}$$

を得る。

(2.95),(2.96),(2.97),(2.98) に $\alpha = 1$ を代入すると、

$$a_l|0(\beta)\rangle - f_l(\beta)\tilde{a}_l^{\dagger}|0(\beta)\rangle = 0, \tag{3.9}$$
$$\tilde{a}_l|0(\beta)\rangle - f_l(\beta)a^{\dagger}|0(\beta)\rangle = 0, \tag{3.10}$$
$$\langle 1|a_l^{\dagger} - \langle 1|\tilde{a}_l = 0, \tag{3.11}$$
$$\langle 1|\tilde{a}_l^{\dagger} - \langle 1|a_l = 0 \tag{3.12}$$

を得る。(3.11),(3.12) の $\dagger$ より

$$a_l|I\rangle = \tilde{a}_l^{\dagger}|I\rangle, \quad a_l^{\dagger}|I\rangle = \tilde{a}_l|I\rangle \tag{3.13}$$

を得る。ただし、(3.2) を用いた。

散逸のある Liouville-von Neumann 方程式は、

$$i\hbar\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} = [H, \rho(t)] + i\Pi\rho(t) \tag{3.14}$$

である。ここで、Π は $\rho(t)$ に作用する超演算子で、例えば

$$\frac{1}{\hbar}\Pi\bullet = \kappa([a\bullet, a^{\dagger}] + [a, \bullet a^{\dagger}]) + 2\kappa\bar{n}\big[a, [\bullet, a^{\dagger}]\big] \tag{3.15}$$

である[4)]。Π は散逸の効果を表す。このとき、$|0(t)\rangle$ は散逸シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|0(t)\rangle \;=\; \hat{H}|0(t)\rangle \tag{3.16}$$

に従う。$\hat{H}$ は

$$\hat{H} = H - \tilde{H} + i\hat{\Pi} \tag{3.17}$$

と書ける。$\hat{\Pi}$ は Π の対応物である。ハット・ハミルトニアン $\hat{H}$ の i 倍はチルディアン[5)] である：

$$(i\hat{H})^{\sim} = i\hat{H}. \tag{3.18}$$

$\hat{H}$ はエルミートとは限らない。(3.16) のチルダ共役は (3.6),(3.18) より (3.16) 自身になる[6)]。また、ハット・ハミルトニアンは

$$\langle 1|\hat{H} = 0 \tag{3.19}$$

を満たす[7)]。(3.16),(3.17) は (3.3),(3.4) の、(3.18) は (3.5) の、(3.19) は (3.8) の拡張である。(3.19) は確率の保存を意味する。実際、(3.16) に $\langle 1|$ を作用させると、

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle 1|0(t)\rangle \;=\; \langle 1|\hat{H}|0(t)\rangle$$

であり、(3.19) より、

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle 1|0(t)\rangle \;=\; 0 \tag{3.21}$$

を得る。

(3.16) を解くと、

$$|0(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|0\rangle\,, \quad |0\rangle \equiv |0(0)\rangle \tag{3.22}$$

となる。(3.17) の H として (2.28) を取る。初期条件として、

$$a_l|0\rangle = f_l\tilde{a}_l^{\dagger}|0\rangle \tag{3.23}$$

が仮定される[8)]。特に、

$$f_l = f_l(\beta) = e^{-\beta\hbar\omega_l} \tag{3.24}$$

が $|0\rangle$ が熱平衡の場合である。(3.23) は (3.9) の拡張である。

今まで、$\hat{H}$ は時間によらないとしてきたが、時間に依存する場合への拡張は容易である。

[4)] この式の導出は§ 4.3 で行う。

[5)] $\hat{X}^{\sim} = \hat{X}$ となる演算子 $\hat{X}$ をチルディアンという。

[6)] § 2.4 の議論から分かるように、ケット真空のチルダ不変性は、$\rho(t)$ のエルミート性に由来する。(3.18) は、(3.14) の右辺が反エルミートであることを意味する。

[7)] これは、

$$\langle 1|\hat{\Pi} = 0 \tag{3.20}$$

を意味する。

[8)] ただし、§ 6.2 以外でこの初期条件を使わない。

Π から $\hat{\Pi}$ は、(3.13) を用いて一意的に得られる。例えば、Π が (3.15) のとき、(3.14) の右辺の $\kappa[a\rho(t), a^\dagger]$ の項は、

$$
\begin{aligned}
\kappa[a\rho(t), a^\dagger]|I\rangle &= \kappa a\rho(t)a^\dagger|I\rangle - \kappa a^\dagger a\rho(t)|I\rangle \\
&= \kappa a\rho(t)\tilde{a}|I\rangle - \kappa a^\dagger a|0(t)\rangle \\
&= \kappa a\tilde{a}\rho(t)|I\rangle - \kappa a^\dagger a|0(t)\rangle \\
&= \kappa(a\tilde{a} - a^\dagger a)|0(t)\rangle
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

となる。ただし、(3.1) と (2.5) も用いた。同様に、

$$
\begin{aligned}
\kappa[a, \rho(t)a^\dagger]|I\rangle &= \kappa a\rho(t)a^\dagger|I\rangle - \kappa\rho(t)a^\dagger a|I\rangle \\
&= \kappa a\tilde{a}\rho(t)|I\rangle - \kappa\tilde{a}^\dagger\rho(t)a^\dagger|I\rangle \\
&= \kappa a\tilde{a}|0(t)\rangle - \kappa\tilde{a}^\dagger\tilde{a}\rho(t)|I\rangle \\
&= \kappa(a\tilde{a} - \tilde{a}^\dagger\tilde{a})|0(t)\rangle, \qquad (3.26) \\
2\kappa\bar{n}\big[a, [\rho(t), a^\dagger]\big]|I\rangle &= 2\kappa\bar{n}\Big\{a\rho(t)a^\dagger|I\rangle - aa^\dagger\rho(t)|I\rangle - \rho(t)a^\dagger a|I\rangle + a^\dagger\rho(t)a|I\rangle\Big\} \\
&= 2\kappa\bar{n}\Big\{a\tilde{a}\rho(t)|I\rangle - aa^\dagger\rho(t)|I\rangle - \tilde{a}^\dagger\tilde{a}\rho(t)|I\rangle + a^\dagger\tilde{a}^\dagger\rho(t)|I\rangle\Big\} \\
&= 2\kappa\bar{n}(a\tilde{a} - aa^\dagger - \tilde{a}^\dagger\tilde{a} + a^\dagger\tilde{a}^\dagger)|0(t)\rangle \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

となる。よって、(3.15) の対応物は、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\hbar}\hat{\Pi} &= \kappa(a\tilde{a} - a^\dagger a) + \kappa(a\tilde{a} - \tilde{a}^\dagger\tilde{a}) + 2\kappa\bar{n}(a\tilde{a} - aa^\dagger - \tilde{a}^\dagger\tilde{a} + a^\dagger\tilde{a}^\dagger) \\
&= -\kappa[(1+2\bar{n})(a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}) - 2(1+\bar{n})a\tilde{a} - 2\bar{n}a^\dagger\tilde{a}^\dagger] - 2\kappa\bar{n}
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

である。

3.2 超演算子形式

超演算子とは演算子に作用する演算子である。例えば、(3.15) の Π のようなものである。以下に示すように、$a_l, a_l^\dagger$ を

$$
A\bullet = A\cdot\bullet, \quad \tilde{A}\bullet = \bullet\cdot A^\dagger \quad (\bullet\text{は任意の演算子。}A = a_l, a_l^\dagger) \tag{3.29}
$$

という超演算子と考えても、今までの公式が適当な読み替えをすれば成り立つ。

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に作用する演算子の集合を $\mathcal{O}$ とする。$\mathcal{O}$ の元 $\bullet$ は、任意の規格直交完全系 $|n\rangle$ を用いて、

$$
\bullet = \sum_{n,m}\langle n|\bullet|m\rangle|n\rangle\langle m| \tag{3.30}
$$

と書ける。$\mathcal{O}$ に対して、Liouville 空間 $\mathcal{L}$ が考えられる。$\mathcal{L}$ の元 $|\bullet\rangle\rangle$ は、

$$
|\bullet\rangle\rangle = \sum_{n,m}\langle n|\bullet|m\rangle|nm\rangle\rangle \tag{3.31}
$$

と書かれる。特に、

$$
||n\rangle\langle m|\rangle\rangle = |nm\rangle\rangle \tag{3.32}
$$

である。$|nm\rangle\rangle$ に対して、その双対 $\langle\langle nm|$ を

$$\langle\langle nm| \;=\; ||n\rangle\langle m|\rangle\rangle^\dagger = \langle\langle(|n\rangle\langle m|)^\dagger|, \tag{3.33}$$
$$\langle\langle nm|n'm'\rangle\rangle \;=\; \delta_{nn'}\delta_{mm'} \tag{3.34}$$

で定義する。対応、

$$|nm\rangle\rangle \quad\longleftrightarrow\quad |n\rangle\langle m|, \tag{3.35}$$
$$\langle\langle nm|\cdots \quad\longleftrightarrow\quad \mathrm{Tr}(|m\rangle\langle n|\cdots) \tag{3.36}$$

を考えると [9]、(3.34) は、

$$\begin{aligned}\langle\langle nm|n'm'\rangle\rangle \quad&\longleftrightarrow\quad \mathrm{Tr}(|m\rangle\langle n|\cdot|n'\rangle\langle m'|)\\ &=\quad \delta_{nn'}\mathrm{Tr}(|m\rangle\langle m'|)\\ &=\quad \delta_{nn'}\langle m'|m\rangle\\ &=\quad \delta_{nn'}\delta_{mm'}\end{aligned} \tag{3.38}$$

となる。ただし、公式

$$\mathrm{Tr}(|\phi\rangle\langle\phi'|) = \langle\phi'|\phi\rangle \tag{3.39}$$

を用いた。

　$\langle\langle\bullet|$ を、

$$\langle\langle\bullet| \;=\; \sum_{n,m}\langle m|\bullet|n\rangle\langle\langle nm| \tag{3.40}$$

とする。従って、

$$\begin{aligned}|\bullet\rangle\rangle^\dagger \;&=\; \sum_{n,m}\langle n|\bullet|m\rangle^*\langle\langle nm|\\ &=\sum_{n,m}\langle m|\bullet^\dagger|n\rangle\langle\langle nm|\\ &=\langle\langle\bullet^\dagger|\end{aligned} \tag{3.41}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}\langle\langle A|B\rangle\rangle \;&=\; \sum_{n,m}\sum_{n',m'}\langle m|A|n\rangle\langle n'|B|m'\rangle\langle\langle nm|n'm'\rangle\rangle\\ &=\sum_{n,m}\langle m|A|n\rangle\langle n|B|m\rangle\\ &=\sum_{m}\langle m|AB|m\rangle\\ &=\mathrm{Tr}(AB)\end{aligned} \tag{3.42}$$

である。第 2 等号で、(3.34) を、第 3, 第 4 等号で $\{|n\rangle\}$ の完全性を用いた。

[9] (3.35) は、

$$|\bullet\rangle\rangle \quad\longleftrightarrow\quad \bullet \tag{3.37}$$

を意味する。

$\bullet = 1 = \sum_n |n\rangle\langle n|$ のときは、(3.31),(3.40) は、

$$|1\rangle\!\rangle \ = \ \sum_n |nn\rangle\!\rangle, \tag{3.43}$$

$$\langle\!\langle 1| \ = \ \sum_n \langle\!\langle nn| \tag{3.44}$$

となる。対応 (3.35),(3.36) によると、

$$|1\rangle\!\rangle \quad \longleftrightarrow \quad \sum_n |n\rangle\langle n| = 1, \tag{3.45}$$

$$\langle\!\langle 1|\cdots \quad \longleftrightarrow \quad \mathrm{Tr}(\sum_n |n\rangle\langle n|\cdots) = \mathrm{Tr}(\cdots) \tag{3.46}$$

を得る。

超演算子 $a_l, a_l, \tilde{a}_l, \tilde{a}_l^\dagger$ を Liouville 空間 $\mathcal{L}$ の元に、

$$a_l|nm\rangle\!\rangle \ = \ |a_l|n\rangle\langle m|\rangle\!\rangle, \tag{3.47}$$

$$\tilde{a}_l|nm\rangle\!\rangle \ = \ ||n\rangle\langle m|a_l^\dagger\rangle\!\rangle \tag{3.48}$$

および、

$$a_l^\dagger|nm\rangle\!\rangle \ = \ |a_l^\dagger|n\rangle\langle m|\rangle\!\rangle, \tag{3.49}$$

$$\tilde{a}_l^\dagger|nm\rangle\!\rangle \ = \ ||n\rangle\langle m|a_l\rangle\!\rangle \tag{3.50}$$

として作用するものとして定義する。対応 (3.35)、即ち (3.37) により、$a_l, a_l, \tilde{a}_l, \tilde{a}_l^\dagger$ は演算子に (3.29) のように作用する超演算子に対応する。上の 4 式より、超演算子に対する交換関係

$$[a_l, a_m^\dagger] = \delta_{lm}\,, \quad [\tilde{a}_l, \tilde{a}_m^\dagger] = \delta_{lm} \tag{3.51}$$

を得る。このほかの交換関係はゼロである。

今、規格直交完全系 $\{|n\rangle\}$ として、(2.43) の $\big\{|\{n_i\}\rangle\big\}$ を取る。このとき、

$$a_l a_l^\dagger|nm\rangle\!\rangle \ = \ n_i|nm\rangle\!\rangle, \tag{3.52}$$

$$\tilde{a}_l \tilde{a}_l^\dagger|nm\rangle\!\rangle \ = \ m_i|nm\rangle\!\rangle \tag{3.53}$$

が成り立つ。また、

$$a_l|00\rangle\!\rangle = \tilde{a}_l|00\rangle\!\rangle = 0 \tag{3.54}$$

となる。

対応 (3.37),(3.45) および (3.47),(3.49) より、$a_l, a_m^\dagger$ から構成される任意の演算子 A に対して、

$$|A\rangle\!\rangle = A|1\rangle\!\rangle \tag{3.55}$$

を得る。ただし、左辺の A は $\mathcal{O}$ の元であり、右辺の A は対応する超演算子である。(3.14) を満たす $\rho(t)$ を考える。ただし、H として (2.28) を考える。このとき、$\rho(t)$ は $a_l, a_m^\dagger$ から構成されるはずなので、(3.55) が使えて、

$$|\rho(t)\rangle\!\rangle = \rho(t)|1\rangle\!\rangle \tag{3.56}$$

を得る。また、(3.33) と (3.47)-(3.50) より、

$$
\begin{aligned}
\langle\langle nm|a_l^\dagger &= \langle\langle|n\rangle\langle m|a_l^\dagger|, && (3.57)\\
\langle\langle nm|\tilde{a}_l^\dagger &= \langle\langle a_l|n\rangle\langle m||, && (3.58)\\
\langle\langle nm|a_l &= \langle\langle|n\rangle\langle m|a_l|, && (3.59)\\
\langle\langle nm|\tilde{a}_l &= \langle\langle a_l^\dagger|n\rangle\langle m|| && (3.60)
\end{aligned}
$$

である。(3.55) と同様に、

$$\langle\langle A| = \langle\langle 1|A \tag{3.61}$$

を得る。(3.55),(3.61),(3.42) より、

$$\langle\langle A|B\rangle\rangle = \langle\langle 1|A|B\rangle\rangle = \langle\langle 1|AB|1\rangle\rangle = \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) \tag{3.62}$$

となる。時に、$B = \rho(t)$ として、

$$\langle\langle A|\rho(t)\rangle\rangle = \langle\langle 1|A|\rho(t)\rangle\rangle = \mathrm{Tr}(\rho(t)A) \tag{3.63}$$

を得る。

3.2.1 対応関係

明らかに、

$$
\begin{aligned}
|nm\rangle\rangle &\quad\longleftrightarrow\quad |n\rangle \otimes |m\rangle^{\sim}, && (3.64)\\
|1\rangle\rangle &\quad\longleftrightarrow\quad |I\rangle, && (3.65)\\
\langle\langle 1| &\quad\longleftrightarrow\quad \langle I| = \langle 1|, && (3.66)\\
|\rho(t)\rangle\rangle = \rho(t)|1\rangle\rangle &\quad\longleftrightarrow\quad |0(t)\rangle && (3.67)
\end{aligned}
$$

の対応がある。また、対応 (3.35),(3.45),(3.46) は、

$$
\begin{aligned}
|nm\rangle\rangle &\quad\longleftrightarrow\quad |n\rangle\langle m|, && (3.68)\\
|1\rangle\rangle &\quad\longleftrightarrow\quad \sum_n |n\rangle\langle n| = 1, && (3.69)\\
\langle\langle 1|\cdots &\quad\longleftrightarrow\quad \mathrm{Tr}(\sum_n |n\rangle\langle n|\cdots) = \mathrm{Tr}(\cdots) && (3.70)
\end{aligned}
$$

であった。この対応により、$a_l, a_l, \tilde{a}_l, \tilde{a}_l^\dagger$ は、

$$
\begin{aligned}
a_l\bullet = a_l\cdot\bullet \quad &, \quad \tilde{a}_l\bullet = \bullet\cdot a_l^\dagger, && (3.71)\\
a_l^\dagger\bullet = a_l^\dagger\cdot\bullet \quad &, \quad \tilde{a}_l^\dagger\bullet = \bullet\cdot a_l && (3.72)
\end{aligned}
$$

という超演算子にかわる。このとき、(3.14) は、

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) \;=\; \hat{H}\rho(t) \tag{3.73}$$

となる。これは (3.16) に相当する。§ 3.1 までは、チルダ粒子は何か神秘的な、実在するのかしないのか分からない代物に見えたが、超演算子の見方をすると、ただの道具に見える。

(3.19) の意味は、(3.70) によると、

$$\mathrm{Tr}(\hat{H}\bullet) = 0 \tag{3.74}$$

である。ここで、

$$\hat{H}\bullet = [H, \bullet] + i\Pi\bullet \tag{3.75}$$

であり、Π が (3.15) のときは、

$$\hat{H}\bullet = [H, \bullet] + i\hbar\kappa([a\bullet, a^\dagger] + [a, \bullet a^\dagger]) + 2i\hbar\kappa\bar{n}\big[a, [\bullet, a^\dagger]\big] \tag{3.76}$$

である。一般に、

$$\mathrm{Tr}([A, B]) = 0 \tag{3.77}$$

であるから、$\Pi\bullet$ が $[A, B]$ の形でかける [10] なら、(3.74) が成り立つ。Π から $\hat{\Pi}$ は次のように一意的に得られる：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\hbar}\Pi\bullet &= \kappa([a\bullet, a^\dagger] + [a, \bullet a^\dagger]) + 2\kappa\bar{n}\big[a, [\bullet, a^\dagger]\big] \\
&= \kappa(a\bullet a^\dagger - a^\dagger a\bullet + a\bullet a^\dagger - \bullet a^\dagger a) + 2\kappa\bar{n}(a\bullet a^\dagger - aa^\dagger\bullet - \bullet a^\dagger a + a^\dagger\bullet a) \\
&= \kappa(a\tilde{a}\bullet - a^\dagger a\bullet + a\tilde{a}\bullet - \tilde{a}\bullet a) + 2\kappa\bar{n}(a\tilde{a}\bullet - aa^\dagger\bullet - \tilde{a}\bullet a + a^\dagger\tilde{a}^\dagger\bullet) \\
&= \kappa(a\tilde{a} - a^\dagger a + a\tilde{a} - \tilde{a}\tilde{a}^\dagger)\bullet + 2\kappa\bar{n}(a\tilde{a} - aa^\dagger - \tilde{a}\tilde{a}^\dagger + a^\dagger\tilde{a}^\dagger)\bullet \\
&= \Big(-\kappa[(1+2\bar{n})(a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}) - 2(1+\bar{n})a\tilde{a} - 2\bar{n}a^\dagger\tilde{a}^\dagger] - 2\kappa\bar{n}\Big)\bullet \equiv \frac{1}{\hbar}\hat{\Pi}\bullet
\end{aligned} \tag{3.78}$$

このように、(3.68),(3.69),(3.70) により、Liouville 空間 $\mathcal{L}$ を持ち出さないことも可能であるが、$\mathcal{L}$ で考えた方が都合がよい。特に、熱状態条件

$$\langle\!\langle 1|a_l = \langle\!\langle 1|\tilde{a}_l^\dagger, \tag{3.79}$$

$$\langle\!\langle 1|a_l^\dagger = \langle\!\langle 1|\tilde{a}_l \tag{3.80}$$

が使えるのが利点である。(3.79) は、規格直交完全系 $\{|n\rangle\}$ として、(2.43) の $\big\{|\{n_i\}\rangle\big\}$ を取り、

$$\begin{aligned}
\sum_{n_l=0}^{\infty} |n_l\rangle_l\langle n_l|a_l &= \sum_{n_l=0}^{\infty}\sqrt{n_l+1}|n_l\rangle_l\langle n_l+1| \\
&= \sum_{n_l=1}^{\infty}\sqrt{n_l}|n_l-1\rangle_l\langle n_l| \\
&= a_l\sum_{n_l=0}^{\infty}|n_l\rangle_l\langle n_l|
\end{aligned} \tag{3.81}$$

を用いればいられる。(3.80) も同様である。(3.79),(3.80) より、$a_l, a_m^\dagger$ から構成される任意の演算子 A に対して、

$$\langle\!\langle 1|A^\dagger = \langle\!\langle 1|\tilde{A} \tag{3.82}$$

を得る [11]。

以下で、$|0(t)\rangle$,$\langle 1|$ と書いたとき、§ 3.1 の意味と思ってもよいし、$|\rho(t)\rangle\!\rangle$,$\langle\!\langle 1|$ の意味と思ってもよい。

[10] A,B が $[C, D]$ や、$\{C, D\}$,$\{C, \{D, E\}\}$ などの形でも良い。

[11] 同様に、(3.11),(3.12) から

$$\langle 1|A^\dagger = \langle 1|\tilde{A}. \tag{3.83}$$

3.3　ハイゼンベルグ描像

(3.16) はシュレーディンガー描像である。ハイゼンベルグ描像では、ケット真空は時間発展せず、演算子のほうが

$$\begin{aligned} A(t) &= e^{i\hat{H}t/\hbar} A e^{-i\hat{H}t/\hbar}, &(3.84)\\ i\hbar\frac{d}{dt}A(t) &= [A(t), \hat{H}(t)] &(3.85)\end{aligned}$$

に従って時間発展する。期待は、どちらの描像でも同じである：

$$\begin{aligned} \langle 1|A(t)|0\rangle &= \langle 1|e^{i\hat{H}t/\hbar} A e^{-i\hat{H}t/\hbar}|0\rangle \\ &= \langle 1|A e^{-i\hat{H}t/\hbar}|0\rangle \\ &= \langle 1|A|0(t)\rangle. &(3.86)\end{aligned}$$

ただし、第 2 等号で (3.19) を用いた。ハット・ハミルトニアンが

$$\hat{H} = H - \tilde{H} \tag{3.87}$$

のときは、A が非チルダ演算子なら $A(t)$ も非チルダ演算子であり、A がチルダ演算子なら $A(t)$ もチルダ演算子である。散逸を表す $\hat{\Pi}$ があると、$A(t)$ に非チルダとチルダとが混ざる。また、$\hat{\Pi}$ があると $\hat{H}$ は一般にエルミートでないので、$e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ はユニタリーでない。よって、

$$a^{\dagger\!\dagger}(t) \equiv e^{i\hat{H}t/\hbar} a^\dagger e^{-i\hat{H}t/\hbar} \neq [e^{i\hat{H}t/\hbar} a e^{-i\hat{H}t/\hbar}]^\dagger \equiv [a(t)]^\dagger \tag{3.88}$$

である。

4　量子 Langevin 方程式の導出

以下では、$\hbar = 1$ とする。

4.1　S-L Langevin 方程式

4.1.1　微視的モデル

角振動数 ω_0 の量子調和振動子系（注目系）が、角振動数 $\omega_l (l = 1, 2, \cdots)$ の無数の量子調和振動子系（熱浴）と相互作用している系を考える。全系のハミルトニアン H は、

$$
\begin{aligned}
H &= H_S + H_R + H_1, && (4.1)\\
H_S &= \omega_0 a^\dagger a, && (4.2)\\
H_R &= \sum_l \omega_l b_l^\dagger b_l && (4.3)
\end{aligned}
$$

であり、相互作用 H_1 は、

$$
H_1 = a^\dagger R + R^\dagger a\,, \quad R \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_l g_l b_l \tag{4.4}
$$

とする。g_l は結合定数である。各演算子は、正準交換関係

$$
[a, a^\dagger] = 1\,, \quad [b_l, b_m^\dagger] = \delta_{lm} \tag{4.5}
$$

を満たしている。このほかの交換関係は 0 である。

初期時刻 $t = 0$ で、全系の状態 $\rho_{tot}(t)$ は、

$$
\begin{aligned}
\rho_{tot}(0) &= \rho(0) \otimes \rho_R, && (4.6)\\
\rho_R &= \frac{e^{-H/T}}{\mathrm{Tr}_R(e^{-H/T})} && (4.7)
\end{aligned}
$$

であったとする [12)]。今、

$$
\langle \cdots \rangle_R \equiv \mathrm{Tr}_R(\rho_R \cdots) \quad (\cdots \text{は}\ b_l, b_l^\dagger \text{でかける}) \tag{4.8}
$$

とかくと、

$$
\begin{aligned}
\langle b_l \rangle_R &= \langle b_l^\dagger \rangle_R = 0, && (4.9)\\
\langle b_l^\dagger b_m \rangle_R &= \delta_{lm} \bar{n}_l\,, \quad \bar{n}_l = \frac{1}{e^{\omega_l/T} - 1} && (4.10)
\end{aligned}
$$

となる。

ハイゼンベルグ描像，相互作用描像の演算子 $X(t)$, $X^I(t)$ は、シュレーディンガー描像での演算子を X とすると、

$$
\begin{aligned}
X(t) &= e^{iHt} X e^{-iHt}, && (4.11)\\
X^I(t) &= e^{i(H_S+H_R)t} X e^{-i(H_S+H_R)t} && (4.12)
\end{aligned}
$$

12) この章と次の章で、この仮定が本質的に重要な役割を果たす。この仮定を外すと、導出できないのもが多く存在する。

で与えられる。それぞれ、次の微分方程式に従う：

$$\frac{d}{dt}X(t) = i[H(t), X(t)], \tag{4.13}$$

$$\frac{d}{dt}X^I(t) = i[H_S^I(t) + H_R^I(t), X^I(t)]. \tag{4.14}$$

特に、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}b_l^I(t) &= i[H_R^I(t), b_l^I(t)],\\ &= -i\omega_l b_l^I(t),\\ b^I(t) &= b_l e^{-i\omega_l t}\end{aligned} \tag{4.15}$$

である。また、

$$\frac{d}{dt}b_l(t) = i[H_R(t) + H_1(t), b_l(t)] = -i\omega_l b_l(t) - ig_l^* a(t), \tag{4.16}$$

$$\frac{d}{dt}a_l(t) = i[H_S(t) + H_1(t), a_l(t)] = -i\omega_0 a(t) - iR(t). \tag{4.17}$$

(4.16) は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[b_l(t)e^{i\omega_l t}] &= -ig_l^* a(t)e^{i\omega_l t},\\ b_l(t)e^{i\omega_l t} - b_l &= -ig_l^* \int_0^t ds\ a(s)e^{i\omega_l s},\\ b_l(t) &= b_l^I(t) - ig_l^* \int_0^t ds\ a(s)e^{-i\omega_l (t-s)}\end{aligned} \tag{4.18}$$

と解ける。(4.18) を (4.17) に代入して、

$$\frac{d}{dt}a(t) = -i\omega_0 a(t) - \sum_l |g_l|^2 \int_0^t ds\ a(s)e^{-i\omega_l(t-s)} - iR^I(t) \tag{4.19}$$

を得る。ここで、

$$R^I(t) = \sum_l g_l b_l^I(t), \quad R(t) = \sum_l g_l b_l(t) \tag{4.20}$$

を用いた。(4.19) は、

$$\frac{d}{dt}[a(t)e^{i\omega_0 t}] = -\sum_l |g_l|^2 \int_0^t ds\ a(s)e^{-i\omega_l(t-s)}e^{i\omega_0 t} - iR^I(t)e^{i\omega_0 t}$$

と書けるから、

$$\bar{X}(t) \stackrel{\text{def}}{=} X(t)e^{i\omega_0 t} \qquad X(t) = a(t), R(t), R^I(t) \tag{4.21}$$

とすると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\bar{a}(t) &= -\sum_l |g_l|^2 \int_0^t ds\ \bar{a}(s)e^{-i\omega_0 s}e^{-i\omega_l(t-s)}e^{i\omega_0 t} - i\bar{R}^I(t)\\ &= -\sum_l |g_l|^2 \int_0^t du\ \bar{a}(t-u)e^{-i(\omega_l-\omega_0)u} - i\bar{R}^I(t)\end{aligned} \tag{4.22}$$

となる。

4.1.2 量子 Langevin 方程式への移行

今、$\sum_l$ を、

$$\sum_l |g_l|^2 f(\omega_l) = \int_0^\infty d\omega\ \mathcal{D}(\omega)|g(\omega)|^2 f(\omega) \tag{4.23}$$

で近似すると、(4.22) は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bar{a}(t) &= I(t) - i\bar{R}^I(t), & (4.24)\\ I(t) &\equiv \int_0^\infty d\omega\ \mathcal{D}(\omega)|g(\omega)|^2 \int_0^t du\ \bar{a}(t-u)e^{-i(\omega-\omega_0)u} \\ &= \int_0^t du\ \bar{a}(t-u) \int_{-\omega_0}^\infty d\omega'\ \mathcal{D}(\omega'+\omega_0)|g(\omega'+\omega_0)|^2 e^{-i\omega u} & (4.25) \end{aligned}$$

となる。今、熱浴の ω_l は ω_0 の周りに、次のように分布しているとする：

$$|g(\omega)|^2\mathcal{D}(\omega) = \begin{cases} |g|^2\mathcal{D}_0 & \text{for } |\omega-\omega_0| \le \Delta\omega \\ 0 & \text{for } |\omega-\omega_0| > \Delta\omega \end{cases} \tag{4.26}$$

これは、熱浴に個性が無いことを意味する。ただし、

$$0 < \Delta\omega \ll \omega_0 \tag{4.27}$$

であるべきである [13] 。このとき、

$$I(t) \approx |g|^2\mathcal{D}_0 \int_0^t du\ \bar{a}(t-u) \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} d\omega'\ e^{-i\omega u} \tag{4.29}$$

となる。ここで、

$$\int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} d\omega'\ e^{-i\omega u} = 2\Delta\omega \frac{\sin(\Delta\omega u)}{\Delta\omega u} \stackrel{\Delta\omega\mathrm{u}\to\infty}{\longrightarrow} 2\pi\delta(u) \tag{4.30}$$

である。この近似の下で、以下で導出する Langevin 方程式の記述する時間スケールは、

$$t \gg \tau_R \tag{4.31}$$

である。(4.30) を (4.29) に代入して、

$$I(t) \approx \kappa\bar{a}(t), \quad \kappa = \pi|g|^2\mathcal{D}_0 \tag{4.32}$$

を得る。これを (4.24) に代入すると、

$$\frac{d}{dt}\bar{a}(t) = \kappa\bar{a}(t) - i\bar{R}^I(t) \tag{4.33}$$

となる。これは、

$$\frac{d}{dt}a(t) = -i\omega_0 a(t) - \kappa a(t) - iR^I(t) \tag{4.34}$$

[13] $1/\Delta\omega$ は熱浴モード間の相関時間 τ_R の目安となる：

$$\tau_R \approx \pi/\Delta\omega. \tag{4.28}$$

を意味する。これが Senizky-Lax の Langevin 方程式である。

(4.33) の乱雑平均 $\langle\cdots\rangle_R$ を取ると、

$$\frac{d}{dt}\langle\bar{a}(t)\rangle_R = -\kappa\langle\bar{a}(t)\rangle_R \tag{4.35}$$

となる。ただし、(4.20) と (4.9) から得られる

$$\langle R^I(t)\rangle_R = 0 \tag{4.36}$$

を用いた。これより、$\langle\bar{a}(t)\rangle_R$ の緩和時間は

$$\tau = \frac{1}{\kappa} \tag{4.37}$$

である。乱雑平均を取っているので、これは巨視的な物理量の特徴的な時間スケールを与えるものと解釈できる。従って、Langevin 方程式 (4.34) の記述する時間スケールは、(4.31),(4.37) より

$$\frac{\pi}{\Delta\omega} \approx \tau_R \ll t \ll \tau = \frac{1}{\kappa} \tag{4.38}$$

であるべきである。

4.1.3 $R^I(t)$ の性質

(4.34) 右辺の $R^I(t)$ について調べる。(4.20) より、

$$\begin{aligned}[R^I(t), R^I(s)^\dagger] &= \sum_l\sum_m g_l g_m^* e^{-i\omega_l t + i\omega_m s}[b_l, b_m^\dagger] \\ &= \sum_l |g_l|^2 e^{-i\omega_l(t-s)}\end{aligned} \tag{4.39}$$

である。また、(4.10) より、

$$\begin{aligned}\langle R^I(s)^\dagger R^I(t)\rangle_R &= \sum_l\sum_m g_l g_m^* e^{-i\omega_l t + i\omega_m s}\langle b_m^\dagger b_l\rangle_R \\ &= \sum_l\sum_m g_l g_m^* e^{-i\omega_l t + i\omega_m s}\delta_{lm}\bar{n}_l \\ &= \sum_l |g_l|^2 \bar{n}_l e^{-i\omega_l(t-s)}\end{aligned} \tag{4.40}$$

であり、この 2 式より、

$$\begin{aligned}\langle R^I(t)R^I(s)^\dagger\rangle &= \langle R^I(s)^\dagger R^I(t)\rangle_R + \langle[R^I(t), R^I(s)^\dagger]\rangle_R \\ &= \sum_l |g_l|^2(\bar{n}_l+1)e^{-i\omega_l(t-s)}\end{aligned} \tag{4.41}$$

となる。(4.23),(4.26) の下で、

$$\begin{aligned}\sum_l |g_l|^2 f_l e^{-i\omega_l(t-s)} &= \int_0^\infty d\omega\ \mathcal{D}(\omega)|g(\omega)|^2 f(\omega)e^{-i\omega(t-s)} \\ &= |g|^2\mathcal{D}_0\int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} d\omega\ f(\omega)e^{-i\omega(t-s)} \\ (f_l &= 1, \bar{n}_l, \bar{n}_l+1)\end{aligned}$$

である。さらに (4.27) より、

$$\sum_l |g_l|^2 f_l e^{-i\omega_l(t-s)} \;=\; |g|^2 \mathcal{D}_0 f(\omega_0) e^{-i\omega_0(t-s)} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} d\omega'\; e^{-i\omega'(t-s)}$$

で、さらに (4.30) より、

$$\sum_l |g_l|^2 f_l e^{-i\omega_l(t-s)} \;=\; 2\kappa f(\omega_0)\delta(t-s) \tag{4.42}$$

を得る。以上の近似の下、

$$[R^I(t), R^I(s)^\dagger] \;=\; 2\kappa\delta(t-s), \tag{4.43}$$

$$\langle R^I(s)^\dagger R^I(t)\rangle_R \;=\; 2\kappa\bar{n}\delta(t-s) \qquad \Big(\bar{n} = \frac{1}{e^{\omega_0/T}-1}\Big), \tag{4.44}$$

$$\langle R^I(t) R^I(s)^\dagger\rangle_R \;=\; 2\kappa(\bar{n}+1)\delta(t-s) \tag{4.45}$$

となる。また、(4.9) より、

$$\langle R^I(t)\rangle_R = \langle R^I(t)^\dagger\rangle_R = 0 \tag{4.46}$$

である。

(4.20) に (4.15) を代入し、近似 (4.23) をすると、

$$R^I(t) = \sum_l g_l b_l e^{-i\omega_l t} = \int_0^\infty d\omega\; \mathcal{D}(\omega) g(\omega) b(\omega) e^{-i\omega t} \tag{4.47}$$

を得る。この意味で $R^I(t)$ は $b(\omega)$ のフーリエ変換のようなものである。

4.1.4 Boltzmann 方程式の導出

$a^\dagger(t)a(t)$ の時間微分は、(4.17) より、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[a^\dagger(t)a(t)] \;&=\; \frac{da^\dagger(t)}{dt}a(t) + a^\dagger(t)\frac{da(t)}{dt} \\ &=\; [i\omega_0 a^\dagger(t) + iR(t)^\dagger]a(t) + a^\dagger(t)[-i\omega_0 a(t) - iR(t)] \\ &=\; -ia^\dagger(t)R(t) + iR(t)^\dagger a(t) \end{aligned}\tag{4.48}$$

となる。(4.21) の記号でかくと、

$$\frac{d}{dt}[\bar{a}^\dagger(t)\bar{a}(t)] = -i\bar{a}^\dagger(t)\bar{R}(t) + i\bar{R}(t)^\dagger\bar{a}(t) \tag{4.49}$$

である。ところで、(4.18) を (4.20) に代入すると、

$$\bar{R}(t) \;=\; \bar{R}^I(t) - iI(t)$$

であり、$I(t)$ に (4.32) を代入して、

$$\bar{R}(t) \;=\; \bar{R}^I(t) - i\kappa\bar{a}(t) \tag{4.50}$$

となるから、(4.49) は、

$$\frac{d}{dt}[\bar{a}^\dagger(t)\bar{a}(t)] = -2\kappa\bar{a}^\dagger(t)\bar{a}(t) - i\bar{a}^\dagger(t)\bar{R}^I(t) + i\bar{R}^I(t)^\dagger\bar{a}(t) \tag{4.51}$$

となる。これは、

$$\frac{d}{dt}[a^\dagger(t)a(t)] = -2\kappa a^\dagger(t)a(t) - ia^\dagger(t)R^I(t) + iR^I(t)^\dagger a(t) \tag{4.52}$$

とも書ける。これの乱雑平均から

$$\frac{d}{dt}\langle a^\dagger(t)a(t)\rangle_R = -2\kappa\langle a^\dagger(t)a(t)\rangle_R - i\langle a^\dagger(t)R^I(t)\rangle_R + i\langle R^I(t)^\dagger a(t)\rangle_R \tag{4.53}$$

を得る。

(4.33) は、

$$\frac{d}{dt}[\bar{a}(t)e^{\kappa t}] \,=\, -i\bar{R}^I(t)e^{\kappa t} \tag{4.54}$$

と書きなおせる。これを解くと、

$$\begin{aligned}
\bar{a}(t)e^{\kappa t} - a \,&=\, -i\int_0^t ds\ \bar{R}^I(s)e^{\kappa s} \\
\bar{a}(t) \,&=\, ae^{-\kappa t} - i\int_0^t ds\ \bar{R}^I(s)e^{-\kappa(t-s)} \\
a(t) \,&=\, ae^{-\kappa t}e^{-i\omega_0 t} - \int_0^t ds\ R^I(s)e^{-(\kappa - i\omega_0)(t-s)}
\end{aligned} \tag{4.55}$$

となる。これに右から $R^I(t)^\dagger$ を掛けて、乱雑平均 $\langle\cdots\rangle_R$ を取ると、

$$\begin{aligned}
\langle a(t)R^I(t)^\dagger\rangle_R \,&=\, \langle aR^I(t)^\dagger\rangle_R e^{-\kappa t}e^{-i\omega_0 t} - i\int_0^t ds\ \langle R^I(s)R^I(t)^\dagger\rangle_R e^{-(\kappa - i\omega_0)(t-s)} \\
&=\, 0 - i\int_0^t ds\ 2\kappa(\bar{n}+1)\delta(s-t)e^{-(\kappa - i\omega_0)(t-s)} \\
&=\, -i\kappa(\bar{n}+1)
\end{aligned} \tag{4.56}$$

を得る。ただし、第 2 等号で a は $\langle\cdots\rangle_R$ の外に出せることと (4.46)、および (4.45) を用いた。上式の $\dagger$ から、

$$\langle R^I(t)a(t)^\dagger\rangle_R = i\kappa(\bar{n}+1) \tag{4.57}$$

を得る。ただし、

$$\begin{aligned}
\langle AB\rangle_R^\dagger \,&=\, (\sum_\mu \langle\mu|\rho_R AB|\mu\rangle)^\dagger \\
&=\, \sum_\mu \langle\mu|B^\dagger A^\dagger \rho_R^\dagger|\mu\rangle \\
&=\, \sum_{\mu,\nu} \langle\mu|B^\dagger A^\dagger|\nu\rangle\langle\nu|\rho_R^\dagger|\mu\rangle \\
&=\, \sum_{\mu,\nu} \langle\nu|\rho_R^\dagger|\mu\rangle\langle\mu|B^\dagger A^\dagger|\nu\rangle \\
&=\, \sum_\nu \langle\nu|\rho_R^\dagger B^\dagger A^\dagger|\nu\rangle \\
&=\, \mathrm{Tr}_R(\rho_R B^\dagger A^\dagger) \\
&=\, \langle B^\dagger A^\dagger\rangle_R
\end{aligned} \tag{4.58}$$

を用いた。ここで、$\{|\mu\rangle\}$,$\{|\nu\rangle\}$ は熱浴についての完全系である。第 4 等号で $\langle\nu|\rho_R^\dagger|\mu\rangle$ が c 数であることを使った。(4.55) に左から $R^I(t)^\dagger$ を掛けて、乱雑平均 $\langle\cdots\rangle_R$ を取ると、

$$
\begin{aligned}
\langle R^I(t)^\dagger a(t)\rangle_R &= \langle R^I(t)^\dagger a\rangle_R e^{-\kappa t}e^{-i\omega_0 t} - i\int_0^t ds\ \langle R^I(t)^\dagger R^I(s)\rangle_R e^{-(\kappa-i\omega_0)(t-s)} \\
&= 0 - i\int_0^t ds\ 2\kappa\bar{n}\delta(s-t)e^{-(\kappa-i\omega_0)(t-s)} \\
&= -i\kappa\bar{n} \qquad (4.59)
\end{aligned}
$$

を得る。これの $\dagger$ から、

$$
\langle a(t)^\dagger R^I(t)\rangle_R = i\kappa\bar{n} \qquad (4.60)
$$

を得る。(4.59),(4.60) を (4.53) に代入して、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle a^\dagger(t)a(t)\rangle_R &= -2\kappa\langle a^\dagger(t)a(t)\rangle_R + \kappa\bar{n} + \kappa\bar{n} \\
&= -2\kappa[\langle a^\dagger(t)a(t)\rangle_R - \bar{n}] \qquad (4.61)
\end{aligned}
$$

を得る。この式の量子力学的平均

$$
\langle\cdots\rangle \equiv \mathrm{Tr}(\rho(0)\cdots) \qquad (4.62)
$$

を取ると [14)]、Boltzmann 方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}n(t) &= -2\kappa[n(t)-\bar{n}], \qquad (4.63) \\
n(t) &\equiv \langle\langle a^\dagger(t)a(t)\rangle_R\rangle \qquad (4.64)
\end{aligned}
$$

を得る。

4.2 柴田・橋爪による S-H Langevin 方程式の導出

4.2.1 TC 型の運動方程式

注目系のハミルトニアンを H_S, 熱浴のハミルトニアン H_R, 相互作用を H_1 とし、

$$
\begin{aligned}
\hat{H} &= H - \tilde{H}, \qquad (4.65) \\
H &= H_0 + H_1, H_0 = H_S + H_R \qquad (4.66)
\end{aligned}
$$

とする。相互作用描像の演算子は、

$$
X^I(t) = e^{i\hat{H}_0 t}Xe^{-i\hat{H}_0 t} \qquad (4.67)
$$

で定義され、ハイゼンベルク描像の演算子は、

$$
\begin{aligned}
X(t) &= \hat{V}^{-1}(t)X\hat{V}(t), \qquad (4.68) \\
i\frac{d}{dt}\hat{V}(t) &= \hat{H}\hat{V}(t) \qquad (4.69)
\end{aligned}
$$

[14)] ここで $\rho(0)$ は、(4.6) のものである。なお、

$$
\begin{aligned}
\langle\langle a^\dagger(t)a(t)\rangle_R\rangle &= \mathrm{Tr}[\rho(0)\mathrm{Tr}_R(\rho_R a^\dagger(t)a(t))] \\
&= \mathrm{Tr}_{tot}[\rho_{tot}(0)a^\dagger(t)a(t)]
\end{aligned}
$$

である。

で定義される。運動方程式は、

$$\frac{d}{dt}A^I(t) \ = \ i[\hat{H}_0^I(t), A^I(t)], \tag{4.70}$$

$$\frac{d}{dt}A(t) \ = \ i[\hat{H}(t), A(t)] \tag{4.71}$$

である。

$\hat{U}(t)$ を、

$$\hat{V}(t) = e^{-i\hat{H}_0 t}\hat{U}(t) \tag{4.72}$$

によって定義する。この式を微分すると、

$$\begin{aligned} -i\hat{H}e^{-i\hat{H}_0 t}\hat{U}(t) \ &= \ -i\hat{H}_0 e^{-i\hat{H}_0 t}\hat{U}(t) + e^{-i\hat{H}_0 t}\frac{d}{dt}\hat{U}(t) \\ \frac{d}{dt}\hat{U}(t) \ &= \ -i\hat{H}_1^I(t)\hat{U}(t) \end{aligned} \tag{4.73}$$

を得る。初期条件は、$\hat{U}(0) = 1$ である。

$$\hat{U}(t,s) = \hat{U}(t)\hat{U}^{-1}(s) \tag{4.74}$$

とすると、これは、

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t,s) \ = \ -i\hat{H}_1^I(t)\hat{U}(t,s) \tag{4.75}$$

を満たす。また、

$$\hat{U}(t,s) \ = \ \hat{U}(t,t')\hat{U}(t',s), \tag{4.76}$$

$$\hat{U}(t,t) \ = \ 1 \tag{4.77}$$

を満たす。これらより、

$$\hat{U}(s,t) = \hat{U}^{-1}(t,s) \tag{4.78}$$

である。

射影演算子 $\mathcal{P}$ を

$$\mathcal{P}^2 \ = \ \mathcal{P}, \tag{4.79}$$

$$\tilde{\mathcal{P}} \ = \ \mathcal{P} \tag{4.80}$$

を満たす任意の演算子とし、

$$\mathcal{Q} \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1 - \mathcal{P} \tag{4.81}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^2 \ &= \ (1-\mathcal{P})^2 = 1 - 2\mathcal{P} + \mathcal{P}^2 = 1 - \mathcal{P} \\ &= \ \mathcal{Q}, \end{aligned} \tag{4.82}$$

$$\tilde{\mathcal{Q}} \ = \ \mathcal{Q}, \tag{4.83}$$

$$\mathcal{Q}\mathcal{P} \ = \ \mathcal{P} - \mathcal{P}^2 = 0, \tag{4.84}$$

$$\mathcal{P}\mathcal{Q} \ = \ \mathcal{P} - \mathcal{P}^2 = 0 \tag{4.85}$$

が得られる。今、

$$\hat{x}(t) \stackrel{\rm def}{=} \mathcal{Q}\hat{U}(t), \quad \hat{y}(t) \stackrel{\rm def}{=} \mathcal{P}\hat{U}(t) \tag{4.86}$$

とする。(4.73) は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{U}(t) &= -i\hat{H}_1^I(t)[\mathcal{Q}+\mathcal{P}]\hat{U}(t) \\ &= -i\hat{H}_1^I(t)\hat{x}(t) - i\hat{H}_1^I(t)\hat{y}(t) \end{aligned} \tag{4.87}$$

または、(4.82),(4.80) を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{U}(t) &= -i\hat{H}_1^I(t)[\mathcal{Q}^2+\mathcal{P}^2]\hat{U}(t) \\ &= -i\hat{H}_1^I(t)\mathcal{Q}\hat{x}(t) - i\hat{H}_1^I(t)\mathcal{P}\hat{y}(t) \end{aligned} \tag{4.88}$$

ともかける。これに左から $\mathcal{Q}$ を作用させて、

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = -i\hat{H}_{1,QQ}^I(t)\hat{x}(t) - i\hat{H}_{1,QP}^I(t)\hat{y}(t) \tag{4.89}$$

を得る。ここで、

$$\hat{H}_{1,QQ}^I(t) \stackrel{\rm def}{=} \mathcal{Q}\hat{H}_1^I(t)\mathcal{Q}, \quad \hat{H}_{1QP}^I \stackrel{\rm def}{=} \mathcal{Q}\hat{H}_1^I(t)\mathcal{P} \tag{4.90}$$

である。(4.89) より、$\hat{W}(t)$ を任意の演算子として、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\hat{W}(t)\hat{x}(t)] &= -i\hat{W}(t)[\hat{H}_{1,QQ}^I(t)\hat{x}(t) + \hat{H}_{1,QP}^I(t)\hat{y}(t)] + \frac{d\hat{W}(t)}{dt}\hat{x}(t) \\ &= \hat{W}(t)[-i\hat{H}_{1,QQ}^I(t) + \hat{W}^{-1}(t)\frac{d\hat{W}(t)}{dt}]\hat{x}(t) - i\hat{W}(t)\hat{H}_{1,QP}^I(t)\hat{y}(t) \end{aligned} \tag{4.91}$$

である。今、$\hat{W}_{QQ}(t)$ を

$$\begin{aligned} -i\hat{H}_{1,QQ}^I(t) + \hat{W}_{QQ}^{-1}(t)\frac{d\hat{W}_{QQ}(t)}{dt} &= 0, \\ \frac{d\hat{W}_{QQ}(t)}{dt} &= i\hat{W}_{QQ}(t)\hat{H}_{1,QQ}^I(t) \end{aligned} \tag{4.92}$$

を満たす、初期条件

$$\hat{W}_{QQ}(0) = 1 \tag{4.93}$$

の解とする。このとき、(4.91) より、

$$\frac{d}{dt}[\hat{W}_{QQ}(t)\hat{x}(t)] = -\hat{W}_{QQ}(t)i\hat{H}_{1,QP}^I(t)\hat{y}(t) \tag{4.94}$$

を得る。これを解くと、

$$\hat{W}_{QQ}(t)\hat{x}(t) - \hat{W}_{QQ}(0)\hat{x}(0) = -i\int_0^t ds\, \hat{W}_{QQ}(s)\hat{H}_{1,QP}^I(s)\hat{y}(s)$$

であり、(4.93) と (4.86) より $\hat{W}_{QQ}(0)\hat{x}(0) = \mathcal{Q}$ である。上式を $\hat{x}(t)$ について解いて、

$$\hat{x}(t) = \hat{W}_{QQ}^{-1}(t)\mathcal{Q} - i\int_0^t ds\, \hat{W}_{QQ}^{-1}(t)\hat{W}_{QQ}(s)\hat{H}_{1,QP}^I(s)\hat{y}(s) \tag{4.95}$$

を得る。今、

$$\hat{U}_{QQ}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{W}_{QQ}^{-1}(t), \tag{4.96}$$

$$\hat{U}_{QQ}(s,t) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{U}_{QQ}(s)\hat{U}_{QQ}^{-1}(t) \tag{4.97}$$

とする。このとき、

$$\hat{U}_{QQ}(t,t) = 1, \tag{4.98}$$

$$\hat{U}_{QQ}(t,u)\hat{U}_{QQ}(u,s) = \hat{U}_{QQ}(t,s), \tag{4.99}$$

$$\hat{U}_{QQ}(s,t) = \hat{U}_{QQ}^{-1}(t,s) \tag{4.100}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned}\hat{W}_{QQ}^{-1}(t)\hat{W}_{QQ}(s) &= \hat{U}_{QQ}(t,0)\hat{U}_{QQ}(0,s) \\ &= \hat{U}_{QQ}(t,s)\end{aligned} \tag{4.101}$$

である。

(4.101),(4.96) および $\hat{y}(t)$ の定義 (4.86) を使うと、(4.95) は

$$\hat{x}(t) = \hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q} - i\int_0^t ds\, \hat{U}_{QQ}(t,s)\hat{H}_{1,QP}^I(s)\hat{y}(s) \tag{4.102}$$

となる。(4.102),(4.86) の $\hat{y}(t)$ の定義を、(4.87) の右辺に代入して、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{U}(t) = &-i\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q} - \int_0^t ds\, \hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\hat{H}_{1,QP}^I(s)\mathcal{P}\hat{U}(s) \\ &-i\hat{H}_1^I(t)\mathcal{P}\hat{U}(t)\end{aligned} \tag{4.103}$$

を得る。

(4.72) を (4.68) に代入し、(4.67) を用いると、

$$\begin{aligned}X(t) &= \hat{U}^{-1}(t)e^{i\hat{H}_0 t}Xe^{-i\hat{H}_0 t}\hat{U}(t) \\ &= \hat{U}^{-1}(t)X^I(t)\hat{U}(t)\end{aligned} \tag{4.104}$$

を得る。これに真空 $\langle\langle 1| = {}_R\langle 1| \otimes \langle 1|$ を作用させると [15)]、

$$\begin{aligned}\langle\langle 1|X(t) &= \langle\langle 1|\hat{U}^{-1}(t)X^I(t)\hat{U}(t) \\ &= \langle\langle 1|X^I(t)\hat{U}(t)\end{aligned} \tag{4.105}$$

となる。ここで、

$$\langle\langle 1|\hat{U}^{-1}(t) = \langle\langle 1|\hat{U}(0,t) = \langle\langle 1| \tag{4.106}$$

を用いた。これは、(4.75) に $\langle\langle 1|$ を作用させた

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle 1|\hat{U}(t,s) &= -i\langle\langle 1|\hat{H}_1^I(t)\hat{U}(t,s) \\ &= -i\langle\langle 1|e^{i\hat{H}_0 t}\hat{H}_1 e^{-i\hat{H}_0 t}\hat{U}(t,s) \\ &= -i\langle\langle 1|\hat{H}_1 e^{-i\hat{H}_0 t}\hat{U}(t,s) \\ &= 0\end{aligned} \tag{4.107}$$

15) ${}_R\langle 1|$ は熱浴,$\langle 1|$ は注目系のブラ真空である。(2.10) または (3.44) からして、全系のブラ真空は常にこうかける。初期時刻で (4.6) である必要はない。

から得られる。第 3, 第 4 等号で

$$\langle 1|\hat{H}_0 = 0\,, \quad \langle\!\langle 1|\hat{H}_1 \tag{4.108}$$

を用いた。これは、(3.82) より従う。

A を非チルダ演算子とする。(4.105),(4.70) より、

$$\frac{d}{dt}\langle\!\langle 1|A(t) \;=\; i\langle\!\langle 1|[\hat{H}_0^I(t), A^I(t)]\hat{U}(t) + \langle\!\langle 1|A^I(t)\frac{d}{dt}\hat{U}(t) \tag{4.109}$$

を得る [16]。(4.103) を代入して、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle\!\langle 1|A(t) \;&=\; i\langle\!\langle 1|\{\hat{H}_0^I(t)A^I(t) - A^I(t)\hat{H}_0^I(t)\}\hat{U}(t) - i\langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q} \\
&\qquad - \int_0^t ds\, \langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\hat{H}_{1,QP}^I(s)\mathcal{P}\hat{U}(s) - i\langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}_1^I(t)\mathcal{P}\hat{U}(t) \\
&=\; -i\langle\!\langle 1|A^I(t)\Big(\hat{H}_0 - \hat{H}_1^I(t)\mathcal{P}\Big)\hat{U}(t) - i\langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q} \\
&\qquad - \int_0^t ds\, \langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\hat{H}_{1,QP}^I(s)\mathcal{P}\hat{U}(s)
\end{aligned} \tag{4.110}$$

となる。第 2 等号で $\hat{H}_0^I(t) = \hat{H}_0$ と (4.108) を用いた。これが時間畳み込み (TC) 型の運動運動方程式である。

以下では、A を注目系の非チルダ演算子とする。

(4.110) を Langevin 方程式へ移行するために、柴田と橋爪が採用した処方箋は:
処方 1：射影演算子として、

$$\mathcal{P} = |0\rangle_{RR}\langle 1| \tag{4.111}$$

を採用する [17]。
処方 2：(4.110) の右辺の各項で、$\hat{H}_1^I(t)$ について展開し、意味のある最低次までを取る。
処方 3：乱雑演算子に依存する右辺第 2 項において、相互作用描像の演算子をハイゼンベルク描像の演算子に置き換える。

---

[16] ここで、

$$\frac{d}{dt}\langle\!\langle 1|A(t) \;=\; \langle\!\langle 1|B(t)$$

は、次の意味を持つ。(3.82) により、$B(t)$ を非チルダ演算子 $B'(t)$ にかえ、

$$\frac{d}{dt}\langle\!\langle 1|A(t) \;=\; \langle\!\langle 1|B'(t)$$

としたとき、$\bullet$ を時間によらない演算子として、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle\!\langle 1|A(t)|\bullet\rangle\!\rangle \;&=\; \langle\!\langle 1|B'(t)|\bullet\rangle\!\rangle, \\
\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}_{tot}\{A(t)\bullet\} \;&=\; \mathrm{Tr}_{tot}\{B'(t)\bullet\}
\end{aligned}$$

が成立する。

[17] $|0\rangle_R$ は、§ 3.1 の $\rho_R|I\rangle$ または§ 3.2 の $|\rho_R\rangle\!\rangle$ に対応する。これは、(4.6) を仮定したことに対応する。

処方1により、$\langle\!\langle 1|A\mathcal{P}B$ のタイプの項は、

$$
\begin{aligned}
\langle\!\langle 1|A\mathcal{P}B &= {}_R\langle 1|\otimes\langle 1|A|0\rangle_{RR}\langle 1|B \\
&= \langle 1|_R\langle 1|A|0\rangle_{RR}\langle 1|B \\
&= \langle 1|_R\langle 1|\Big[{}_R\langle 1|A|0\rangle_R B\Big] \\
&= \langle\!\langle 1|_R\langle 1|A|0\rangle_R B \\
&= \langle\!\langle 1|\langle A\rangle_R B
\end{aligned}
\tag{4.112}
$$

となる。第3項で ${}_R\langle 1|_R\langle 1|A|0\rangle_R = {}_R\langle 1|A|0\rangle_{RR}\langle 1|$ を用いた。また以下では、簡単のため、

$$
\langle A\rangle_R \equiv {}_R\langle 1|A|0\rangle_R \tag{4.113}
$$

とかく。これにより、(4.110) は、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle\!\langle 1|A(t) &= -i\langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}_0\hat{U}(t) - i\langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t)(1-\mathcal{P}) \\
&\quad -\int_0^t ds\, \langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\hat{H}_{1,QP}^I(s)\mathcal{P}\hat{U}(s) - i\langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}_1^I(t)\mathcal{P}\hat{U}(t) \\
&= -i\langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}_0\hat{U}(t) - i\langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t) + i\langle\!\langle 1|A^I(t)\langle\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t)\rangle_R \\
&\quad -\int_0^t ds\, \langle\!\langle 1|A^I(t)\langle\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)(1-\mathcal{P})\hat{H}_1^I(s)\rangle_R\hat{U}(s) \\
&\quad -i\langle\!\langle 1|A^I(t)\langle\hat{H}_1^I(t)\rangle_R\hat{U}(t) \\
&= -i\langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}_0\hat{U}(t) - i\langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t) + i\langle\!\langle 1|A^I(t)\langle\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t)\rangle_R \\
&\quad -\int_0^t ds\, \Big(\langle\!\langle 1|A^I(t)\langle\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\hat{H}_1^I(s)\rangle_R - \langle\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\rangle_R\langle\hat{H}_1^I(s)\rangle_R\Big)\hat{U}(s) \\
&\quad -i\langle\!\langle 1|A^I(t)\langle\hat{H}_1^I(t)\rangle_R\hat{U}(t)
\end{aligned}
\tag{4.114}
$$

となる。ただし、A を注目系の非チルダ演算子とするとき、$A^I(t)$ も注目系の非チルダ演算子だけでかけて、${}_R\langle 1|A^I(t) = A^I(t)_R\langle 1|$ であることを用いた。また、第2等号で

$$
\hat{U}_{QQ}(t,s)\hat{H}_{1,QP}^I(s)\mathcal{P} = \hat{U}_{QQ}(t,s)(1-\mathcal{P})\hat{H}_1^I(s)\mathcal{P}
$$

を用いた。

$\hat{U}_{QQ}(t,s)$ を $\hat{H}_1^I(t)$ について展開する。まず、$\hat{U}_{QQ}(t,s)$ の従う微分方程式を求める。(4.97),(4.96) より、

$$
\begin{aligned}
\hat{U}_{QQ}(t,s) &= \hat{W}_{QQ}^{-1}(t)\hat{W}_{QQ}(s), \\
\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_{QQ}(t,s) &= [\frac{\partial}{\partial t}\hat{W}_{QQ}^{-1}(t)]\hat{W}_{QQ}(s)
\end{aligned}
\tag{4.115}
$$

である。$\hat{W}_{QQ}(t)\hat{W}_{QQ}^{-1}(t) = 1$ を微分して、

$$
0 = [\frac{d}{dt}\hat{W}_{QQ}(t)]\hat{W}_{QQ}^{-1}(t) + \hat{W}_{QQ}(t)\frac{d}{dt}\hat{W}_{QQ}^{-1}(t), \tag{4.116}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{W}_{QQ}^{-1}(t) &= -\hat{W}_{QQ}^{-1}(t)\Big[\frac{d}{dt}\hat{W}_{QQ}(t)\Big]\hat{W}_{QQ}^{-1}(t) \\
&= -i\hat{W}_{QQ}^{-1}(t)i\hat{W}_{QQ}(t)\hat{H}_{1,QQ}^I(t)\hat{W}_{QQ}^{-1}(t) \\
&= -i\hat{H}_{1,QQ}^I(t)\hat{W}_{QQ}^{-1}(t)
\end{aligned}
\tag{4.117}
$$

を得る。これを (4.115) に代入して、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_{QQ}(t,s) &= -i\hat{H}^I_{1,QQ}(t)\hat{W}^{-1}_{QQ}(t)\hat{W}_{QQ}(s) \\
&= -i\hat{H}^I_{1,QQ}(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)
\end{aligned} \tag{4.118}
$$

を得る。これと初期条件 $\hat{U}_{QQ}(s,s)=1$ より

$$
\hat{U}_{QQ}(t,s) = 1 - i\int_s^t du\ \hat{H}^I_{1,QQ}(u)\hat{U}_{QQ}(u,s) \tag{4.119}
$$

この右辺自身を右辺の $\hat{U}_{QQ}(u,s)$ に代入して、

$$
\begin{aligned}
\hat{U}_{QQ}(t,s) &= 1 - i\int_s^t du\ \hat{H}^I_{1,QQ}(u) - \int_s^t du_1 \int_s^{u_1} du_2\ \hat{H}^I_{1,QQ}(u_1)\hat{H}^I_{1,QQ}(u_2)\hat{U}_{QQ}(u_2,s) \\
&= 1 - i\int_s^t du\ \hat{H}^I_{1,QQ}(u) - \int_s^t du_1 \int_s^{u_1} du_2\ \hat{H}^I_{1,QQ}(u_1)\hat{H}^I_{1,QQ}(u_2) + \mathcal{O}(\hat{H}^I_1)^3
\end{aligned} \tag{4.120}
$$

を得る。$\mathcal{O}(\hat{H}^I_1)^3$ は $\hat{H}^I_1(t)$ について 3 次以上の項である。これより、意味のある最低次は

$$
\hat{H}^I_1(t)\hat{U}_{QQ}(t) \approx \hat{H}^I_1(t), \tag{4.121}
$$

$$
\hat{H}^I_1(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\hat{H}^I_1(s) \approx \hat{H}^I_1(t)\hat{H}^I_1(s) \tag{4.122}
$$

となる。これを (4.114) に代入して、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle\langle 1|A(t) &= -i\langle\langle 1|A^I(t)\hat{H}_0\hat{U}(t) - i\langle\langle 1|A^I(t)\hat{H}^I_1(t) + i\langle\langle 1|A^I(t)\langle\hat{H}^I_1(t)\rangle_R \\
&\quad - \int_0^t ds\ \Big(\langle\langle 1|A^I(t)\langle\hat{H}^I_1(t)\hat{H}^I_1(s)\rangle_R - \langle\hat{H}^I_1(t)\rangle_R\langle\hat{H}^I_1(s)\rangle_R\Big)\hat{U}(s) \\
&\quad -i\langle\langle 1|A^I(t)\langle\hat{H}^I_1(t)\rangle_R\hat{U}(t)
\end{aligned} \tag{4.123}
$$

を得る。いま、マルチンゲールの性質

$$
\langle\hat{H}^I_1(t)\rangle_R = 0 \tag{4.124}
$$

を仮定すると、(4.123) は、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle\langle 1|A(t) &= -i\langle\langle 1|A^I(t)\hat{H}_0\hat{U}(t) - i\langle\langle 1|A^I(t)\hat{H}^I_1(t) \\
&\quad - \int_0^t ds\ \langle\langle 1|A^I(t)\langle\hat{H}^I_1(t)\hat{H}^I_1(s)\rangle_R\hat{U}(s)
\end{aligned} \tag{4.125}
$$

となる。ところで、(4.104),(4.106) より、

$$
\begin{aligned}
\langle\langle 1|A^I(t) &= \langle\langle 1|\hat{U}(t)A(t)\hat{U}^{-1}(t) \\
&= \langle\langle 1|A(t)\hat{U}^{-1}(t)
\end{aligned} \tag{4.126}
$$

であるから、(4.125) は、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle\langle 1|A(t) &= -i\langle\langle 1|A(t)\hat{U}^{-1}(t)\hat{H}_0\hat{U}(t) - i\langle\langle 1|A^I(t)\hat{H}^I_1(t) \\
&\quad - \int_0^t ds\ \langle\langle 1|A(t)\hat{U}^{-1}(t)\langle\hat{H}^I_1(t)\hat{H}^I_1(s)\rangle_R\hat{U}(s) \\
&= -i\langle\langle 1|A(t)\hat{H}_0(t) - i\langle\langle 1|A^I(t)\hat{H}^I_1(t) \\
&\quad - \int_0^t ds\ \langle\langle 1|A(t)\hat{U}^{-1}(t)\langle\hat{H}^I_1(t)\hat{H}^I_1(s)\rangle_R\hat{U}(s)
\end{aligned} \tag{4.127}
$$

ともかける。第 2 項で $H_0 = H_0^I(t)$ と (4.104) を用いた。右辺第 1 項は、

$$
\begin{aligned}
-i\langle\langle 1|A(t)\hat{H}_0(t) &= -i\langle\langle 1|A(t)\hat{H}_0(t) + i\langle\langle 1|\hat{H}_0\hat{U}(t)A(t) \\
&= -i\langle\langle 1|A(t)\hat{H}_0(t) + i\langle\langle 1|\hat{U}^{-1}(t)\hat{H}_0\hat{U}A(t) \\
&= -i\langle\langle 1|[A(t), \hat{H}_0(t)]
\end{aligned} \tag{4.128}
$$

とかける（もともと、最左辺は最右辺に由来する）。ただし、(4.108) および (4.104),(4.106) を用いた。A は注目系の演算子なので、

$$
\begin{aligned}
[A(t), \hat{H}_0(t)] &= \hat{V}^{-1}(t)[A, \hat{H}_0]\hat{V}(t) \\
&= \hat{V}^{-1}(t)[A, \hat{H}_S]\hat{V}(t) \\
&= [A(t), \hat{H}_S(t)]
\end{aligned} \tag{4.129}
$$

である。これを (4.128) に代入して、

$$
\begin{aligned}
-i\langle\langle 1|A(t)\hat{H}_0(t) &= -i\langle\langle 1|[A(t), \hat{H}_S(t)] \\
&= -i\langle\langle 1|A(t)\hat{H}_S(t) + i\langle\langle 1|\hat{H}_S(t)A(t) \\
&= -i\langle\langle 1|A(t)\hat{H}_S(t) + i\langle\langle 1|\hat{U}^{-1}(t)e^{i\hat{H}_0 t}\hat{H}_S\hat{V}(t)A(t) \\
&= -i\langle\langle 1|A(t)\hat{H}_S(t) + i\langle\langle 1|\hat{H}_S\hat{V}(t)A(t) \\
&= -i\langle\langle 1|A(t)\hat{H}_S(t)
\end{aligned} \tag{4.130}
$$

を得る。最後の等号で、

$$
\langle 1|\hat{H}_S = \langle 1|H_S - \langle 1|\tilde{H}_S = 0 \tag{4.131}
$$

を用いた。これは、(3.82) より従う。(4.128) を (4.125) に代入して、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle\langle 1|A(t) &= -i\langle\langle 1|A(t)\hat{H}_S(t) - i\langle\langle 1|A^I(t)\hat{H}_1^I(t) \\
&\quad - \int_0^t ds\, \langle\langle 1|A(t)\hat{U}^{-1}(t)\langle\hat{H}_1^I(t)\hat{H}_1^I(s)\rangle_R\hat{U}(s)
\end{aligned} \tag{4.132}
$$

を得る。

4.2.2 TCL 型の運動方程式

(4.110) は時間非畳み込み (TCL) 型に書き直すことができる。
(4.102) の第 2 項において、

$$
\begin{aligned}
\hat{y}(s) &= \mathcal{P}\hat{U}(s) \\
&= \mathcal{P}\hat{U}(s,t)\hat{U}(t,0) \\
&= \mathcal{P}\hat{U}(s,t)[\mathcal{P}\hat{U}(t) + \mathcal{Q}\hat{U}(t)]
\end{aligned} \tag{4.133}
$$

という変形する（ここで、(4.76),(4.86) を用いた）。さらに、

$$
\hat{\Sigma}(t) \equiv -i\int_0^t ds\, \hat{U}_{QQ}(t,s)\hat{H}_{1,QP}^I(s)\mathcal{P}\hat{U}(s,t) \tag{4.134}
$$

とすると、(4.102) の第 2 項は、(4.133) より

$$-i\int_0^t ds\,\hat{U}_{QQ}(t,s)\hat{H}^I_{1,QP}(s)\hat{y}(s) = \hat{\Sigma}(t)[\hat{x}(t)+\mathcal{P}\hat{U}(t)] \tag{4.135}$$

となる。これより、(4.102) は

$$\hat{x}(t) = \hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q}+\hat{\Sigma}(t)\hat{x}(t)+\hat{\Sigma}(t)\mathcal{P}\hat{U}(t), \tag{4.136}$$

$$\hat{x}(t) = [1-\hat{\Sigma}]^{-1}[\hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q}+\hat{\Sigma}(t)\mathcal{P}\hat{U}(t)] \tag{4.137}$$

と TCL 型になる。これを (4.87) に代入して、

$$\frac{d}{dt}\hat{U}(t) = -i\hat{H}^I_1(t)[1-\hat{\Sigma}]^{-1}[\hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q}+\hat{\Sigma}(t)\mathcal{P}\hat{U}(t)]-i\hat{H}^I_1(t)\mathcal{P}\hat{U}(t) \tag{4.138}$$

(4.109) に (4.138) を代入して、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\!\langle 1|A(t) &= i\langle\!\langle 1|[\hat{H}^I_0(t),A^I(t)]\hat{U}(t)-i\langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}^I_1(t)[1-\hat{\Sigma}]^{-1}\hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q}\\ &\quad -i\langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}^I_1(t)[1-\hat{\Sigma}]^{-1}\hat{\Sigma}(t)\mathcal{P}\hat{U}(t)-i\langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}^I_1(t)\mathcal{P}\hat{U}(t)\\ &= -i\langle\!\langle 1|A^I(t)\Big(\hat{H}_0+\hat{H}^I_1(t)\mathcal{P}\Big)\hat{U}(t)-i\langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}^I_1(t)[1-\hat{\Sigma}]^{-1}\hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q}\\ &\quad -i\langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}^I_1(t)[1-\hat{\Sigma}]^{-1}\hat{\Sigma}(t)\mathcal{P}\hat{U}(t).\end{aligned} \tag{4.139}$$

これが TCL 型の運動運動方程式である。

これに、処方 1,2 を施す。処方 1 より (4.134) は、

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}(t) &= -i\int_0^t ds\,\hat{U}_{QQ}(t,s)\hat{H}^I_{1,QP}(s)\mathcal{P}\hat{U}(s,t)\\ &= -i\int_0^t ds\,\hat{U}_{QQ}(t,s)(1-|0\rangle_{RR}\langle 1|)\hat{H}^I_1(s)(|0\rangle_{RR}\langle 1|)\hat{U}(s,t)\\ &= -i\int_0^t ds\,\hat{U}_{QQ}(t,s)\hat{H}^I_1(s)|0\rangle_{RR}\langle 1|\hat{U}(s,t)\\ &\quad +i\int_0^t ds\,\hat{U}_{QQ}(t,s)|0\rangle_R\langle H^I_1(s)\rangle_{RR}\langle 1|\hat{U}(s,t)\end{aligned} \tag{4.140}$$

となる。さらに (4.120) より、

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}(t) &= -i\int_0^t ds\,\hat{H}^I_1(s)|0\rangle_{RR}\langle 1|\hat{U}(s,t)\\ &\quad +i\int_0^t ds\,|0\rangle_R\langle H^I_1(s)\rangle_{RR}\langle 1|\hat{U}(s,t)+\mathcal{O}(\hat{H}^I_1)^2\\ &= -i\int_0^t ds\,\hat{H}^I_1(s)|0\rangle_{RR}\langle 1|\hat{U}(s,t)\end{aligned} \tag{4.141}$$

となる。ただし、(4.124) を用いた。よって、

$$[1-\hat{\Sigma}]^{-1} = 1+\mathcal{O}(\hat{H}^I_1) \tag{4.142}$$

となる。処方 2 のもとで、(4.139) は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\!\langle 1|A(t) &= -i\langle\!\langle 1|A^I(t)\Big(\hat{H}_0+\hat{H}^I_1(t)\mathcal{P}\Big)\hat{U}(t)-i\langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}^I_1(t)\hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q}\\ &\quad -i\langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}^I_1(t)\hat{\Sigma}(t)\mathcal{P}\hat{U}(t)\end{aligned} \tag{4.143}$$

となり、これは (4.110) と第 3 項のみが異なる。(4.141) より、

$$
\begin{aligned}
-i\langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}_1^I(t)\hat{\Sigma}(t)\mathcal{P} &= -\int_0^t ds\ \langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}_1^I(t)\hat{H}_1^I(s)|0\rangle_{RR}\langle 1|\hat{U}(s,t)|0\rangle_{RR}\langle 1| \\
&= -\int_0^t ds\ \langle\!\langle 1|A^I(t)\langle\hat{H}_1^I(t)\hat{H}_1^I(s)\rangle_R\langle\hat{U}(s,t)\rangle_R \qquad (4.144)
\end{aligned}
$$

となる。よって、(4.143) の第 3 項は、

$$
\begin{aligned}
-i\langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}_1^I(t)\hat{\Sigma}(t)\mathcal{P}\hat{U}(t) &= -\int_0^t ds\ \langle\!\langle 1|A^I(t)\langle\hat{H}_1^I(t)\hat{H}_1^I(s)\rangle_R\langle\hat{U}(s,t)\rangle_R\hat{U}(t) \\
&= -\int_0^t ds\ \langle\!\langle 1|A(t)\hat{U}^{-1}(t)\langle\hat{H}_1^I(t)\hat{H}_1^I(s)\rangle_R\langle\hat{U}(s,t)\rangle_R\hat{U}(t) \qquad (4.145)
\end{aligned}
$$

となる。第 2 項で、(4.126) を用いた。よって、(4.132) の対応物は、それと第 3 項だけが異なった、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle\!\langle 1|A(t) &= -i\langle\!\langle 1|A(t)\hat{H}_S(t) - i\langle\!\langle 1|A^I(t)\hat{H}_1^I(t) \\
&\quad -\int_0^t ds\ \langle\!\langle 1|A(t)\hat{U}^{-1}(t)\langle\hat{H}_1^I(t)\hat{H}_1^I(s)\rangle_R\langle\hat{U}(s,t)\rangle_R\hat{U}(t) \qquad (4.146)
\end{aligned}
$$

となる。

4.2.3 ボソン系の場合

§ 4.1.1 のモデルについて考える。すなわち、

$$
\begin{aligned}
H_S &= \omega_0 a^\dagger a, && (4.147)\\
H_R &= \sum_l \omega_l b_l^\dagger b_l, && (4.148)\\
H_1 &= a^\dagger R + R^\dagger a\,, \quad R = \sum_l g_l b_l && (4.149)
\end{aligned}
$$

とする。(4.149) より、

$$
\hat{H}_1^I(t) = a^I(t)R^I(t)^\dagger + R^I(t)a^I(t)^\dagger - \tilde{a}^I(t)\tilde{R}^I(t)^\dagger - \tilde{R}^I(t)\tilde{a}^I(t)^\dagger \qquad (4.150)
$$

である。なお、

$$
a^I(t) = ae^{-i\omega_0 t}\,, \quad \tilde{a}^I(t) = \tilde{a}e^{i\omega_0 t} \qquad (4.151)
$$

である。

(4.132) を評価したい。$\hat{H}_1^I(t)\hat{H}_1^I(s)$ は、

$$
\begin{aligned}
\hat{H}_1^I(t)\hat{H}_1^I(s) &= [ae^{-i\omega_0 t}R^I(t)^\dagger + R^I(t)a^\dagger e^{i\omega_0 t} - \tilde{a}e^{i\omega_0 t}\tilde{R}^I(t)^\dagger - \tilde{R}^I(s)\tilde{a}^\dagger e^{-i\omega_0 t}] \\
&\quad \times[ae^{-i\omega_0 s}R^I(s)^\dagger + R^I(s)a^\dagger e^{i\omega_0 s} - \tilde{a}e^{i\omega_0 s}\tilde{R}^I(s)^\dagger - \tilde{R}^I(s)\tilde{a}^\dagger e^{-i\omega_0 s}] \\
&= e^{-i\omega_0(t-s)}[aa^\dagger R^I(t)^\dagger R^I(s) - a\tilde{a}R^I(t)^\dagger\tilde{R}^I(s)^\dagger - \tilde{a}^\dagger a^\dagger\tilde{R}^I(t)R^I(s) + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}\tilde{R}^I(t)\tilde{R}^I(s)^\dagger] \\
&\quad + e^{i\omega_0(t-s)}[a^\dagger aR^I(t)R^I(s)^\dagger - a^\dagger\tilde{a}^\dagger R^I(t)\tilde{R}^I(s) - \tilde{a}a\tilde{R}^I(t)^\dagger R^I(s)^\dagger + \tilde{a}\tilde{a}^\dagger\tilde{R}^I(t)^\dagger\tilde{R}^I(s)] \\
&\quad + e^{-i\omega_0(t+s)}[aaR^I(t)^\dagger R^I(s)^\dagger - a\tilde{a}^\dagger R^I(t)^\dagger\tilde{R}^I(s) - \tilde{a}^\dagger a\tilde{R}^I(t)R^I(s)^\dagger + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}^\dagger\tilde{R}^I(t)\tilde{R}^I(s)] \\
&\quad + e^{i\omega_0(t+s)}[a^\dagger a^\dagger R^I(t)R^I(s) - a^\dagger\tilde{a}R^I(t)\tilde{R}^I(s)^\dagger - \tilde{a}a^\dagger\tilde{R}^I(t)^\dagger R^I(s) + \tilde{a}\tilde{a}\tilde{R}^I(t)^\dagger\tilde{R}^I(s)^\dagger]
\end{aligned}
$$

(4.152)

である。(4.46) より、

$$\langle R^I(t)R^I(s)\rangle_R = \langle R^I(t)^\dagger R^I(s)^\dagger\rangle_R = 0 \tag{4.153}$$

なので、

$$\begin{aligned}
&\langle \hat{H}_1^I(t)\hat{H}_1^I(s)\rangle \\
=\ & e^{-i\omega_0(t-s)}[aa^\dagger\langle R^I(t)^\dagger R^I(s)\rangle_R - a\tilde{a}\langle R^I(t)^\dagger \tilde{R}^I(s)^\dagger\rangle_R - \tilde{a}^\dagger a^\dagger\langle \tilde{R}^I(t)R^I(s)\rangle_R + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}\langle \tilde{R}^I(t)\tilde{R}^I(s)^\dagger\rangle_R] \\
+\ & e^{i\omega_0(t-s)}[a^\dagger a\langle R^I(t)R^I(s)^\dagger\rangle_R - a^\dagger\tilde{a}^\dagger\langle R^I(t)\tilde{R}^I(s)\rangle_R - \tilde{a}a\langle \tilde{R}^I(t)^\dagger R^I(s)^\dagger\rangle_R + \tilde{a}\tilde{a}^\dagger\langle \tilde{R}^I(t)^\dagger \tilde{R}^I(t)\rangle_R] \\
=\ & e^{-i\omega_0(t-s)}[aa^\dagger\langle R^I(t)^\dagger R^I(s)\rangle_R - a\tilde{a}\langle R^I(s)R^I(t)^\dagger\rangle_R - \tilde{a}^\dagger a^\dagger\langle R^I(t)^\dagger R^I(s)\rangle_R + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}\langle R^I(s)R^I(t)^\dagger\rangle_R] \\
+\ & e^{i\omega_0(t-s)}[a^\dagger a\langle R^I(t)R^I(s)^\dagger\rangle_R - a^\dagger\tilde{a}^\dagger\langle R^I(s)^\dagger R^I(t)\rangle_R - \tilde{a}a\langle R^I(t)R^I(s)^\dagger\rangle_R + \tilde{a}\tilde{a}^\dagger\langle R^I(t)^\dagger R^I(t)\rangle_R]
\end{aligned} \tag{4.154}$$

となる。第 2 等号で、

$$\begin{aligned}
{}_R\langle 1|\tilde{R}^I(t) &= {}_R\langle 1|\sum_l g_l^*\tilde{b}_l^I(t) \\
&= \sum_l g_l^*{}_R\langle 1|\tilde{b}_l e^{i\omega_l t} \\
&= \sum_l g_l^*{}_R\langle 1|b_l^\dagger e^{i\omega_l t} \\
&= {}_R\langle 1|\Big[\sum_l g_l b_l e^{-i\omega_l t}\Big]^\dagger \\
&= {}_R\langle 1|R^I(t)^\dagger
\end{aligned} \tag{4.155}$$

などを用いた。これを (4.132) の第 3 項に代入して、

$$\begin{aligned}
&-\int_0^t ds\ \langle\langle 1|A(t)\hat{U}^{-1}(t)\langle \hat{H}_1^I(t)\hat{H}_1^I(s)\rangle_R\hat{U}(s) \\
=\ &-\int_0^t ds\ \langle\langle 1|A(t)\hat{U}^{-1}(t)\Big(e^{-i\omega_0(t-s)}[aa^\dagger\langle R^I(t)^\dagger R^I(s)\rangle_R - a\tilde{a}\langle R^I(s)R^I(t)^\dagger\rangle_R - \tilde{a}^\dagger a^\dagger\langle R^I(t)^\dagger R^I(s)\rangle_R \\
&+\tilde{a}^\dagger\tilde{a}\langle R^I(s)R^I(t)^\dagger\rangle_R] + e^{i\omega_0(t-s)}[a^\dagger a\langle R^I(t)R^I(s)^\dagger\rangle_R - a^\dagger\tilde{a}^\dagger\langle R^I(s)^\dagger R^I(t)\rangle_R \\
&-\tilde{a}a\langle R^I(t)R^I(s)^\dagger\rangle_R + \tilde{a}\tilde{a}^\dagger\langle R^I(t)^\dagger R^I(t)\rangle_R]\ \Big)\hat{U}(s).
\end{aligned} \tag{4.156}$$

例えば、右辺第 1 項は

$$\begin{aligned}
&-\int_0^t ds\ \langle\langle 1|A(t)\hat{U}^{-1}(t)e^{-i\omega_0(t-s)}aa^\dagger\langle R^I(t)^\dagger R^I(s)\rangle_R\hat{U}(s) \\
=\ &-\int_0^t ds\ \langle\langle 1|A(t)\hat{U}^{-1}(t)e^{-i\omega_0(t-s)}aa^\dagger\hat{U}(s)\langle R^I(t)^\dagger R^I(s)\rangle_R \\
=\ &-\int_0^t ds\ \langle\langle 1|A(t)\hat{U}^{-1}(t)e^{-i\omega_0(t-s)}a^I(t)a^I(t)^\dagger\hat{U}(t)\hat{U}^{-1}(t)\hat{U}(s)\langle R^I(t)^\dagger R^I(s)\rangle_R \\
=\ &-\int_0^t ds\ \langle\langle 1|A(t)a(t)a(t)^\dagger\hat{U}^{-1}(t)\hat{U}(s)\langle R^I(t)^\dagger R^I(s)\rangle_R \\
=\ &-\langle\langle 1|A(t)a(t)a^\dagger(t)\hat{U}^{-1}(t)\int_0^t ds\ e^{-i\omega_0(t-s)}\hat{U}(s)\langle R^I(t)^\dagger R^I(s)\rangle_R
\end{aligned} \tag{4.157}$$

となる。ただし、(4.104) を用いた。ところで、(4.44),(4.45) は、

$$\langle R^I(s)^\dagger R^I(t)\rangle_R \;=\; 2\kappa\bar{n}\delta(t-s), \tag{4.158}$$
$$\langle R^I(t)R^I(s)^\dagger\rangle_R \;=\; 2\kappa(\bar{n}+1)\delta(t-s) \tag{4.159}$$

であった。これを使うと、(4.132) の第 3 項は、

$$\begin{aligned}
&-\int_0^t ds\ \langle\langle 1|A(t)\hat{U}^{-1}(t)\langle\hat{H}_1^I(t)\hat{H}_1^I(s)\rangle_R\hat{U}(s)\\
=&\ -\langle\langle 1|A(t)\Big([a(t)a^\dagger(t)\kappa\bar{n}-a(t)\tilde{a}(t)\kappa(\bar{n}+1)-\tilde{a}^\dagger(t)a^\dagger(t)\kappa\bar{n}+\tilde{a}^\dagger(t)\tilde{a}(t)\kappa(\bar{n}+1)]\\
&\quad+[a^\dagger(t)a(t)\kappa(\bar{n}+1)-a^\dagger(t)\tilde{a}^\dagger(t)\kappa\bar{n}-\tilde{a}(t)a(t)\kappa(\bar{n}+1)+\tilde{a}(t)\tilde{a}^\dagger(t)\kappa\bar{n}]\Big)\\
=&\ -\langle\langle 1|A(t)a(t)a^\dagger(t)\kappa\bar{n}+\langle\langle 1|\tilde{a}(t)A(t)a(t)\kappa(\bar{n}+1)+\langle\langle 1|\tilde{a}^\dagger(t)A(t)a^\dagger(t)\kappa\bar{n}\\
&\quad-\langle\langle 1|\tilde{a}^\dagger(t)\tilde{a}(t)A(t)\kappa(\bar{n}+1)-\langle\langle 1|A(t)a^\dagger(t)a(t)\kappa(\bar{n}+1)+\langle\langle 1|\tilde{a}^\dagger(t)A(t)a^\dagger(t)\kappa\bar{n}\\
&\quad+\langle\langle 1|\tilde{a}(t)A(t)a(t)\kappa(\bar{n}+1)-\langle\langle 1|\tilde{a}(t)\tilde{a}^\dagger(t)A(t)\kappa\bar{n}\\
=&\ -\langle\langle 1|A(t)a(t)a^\dagger(t)\kappa\bar{n}+\langle\langle 1|a^\dagger(t)A(t)a(t)\kappa(\bar{n}+1)+\langle\langle 1|a(t)A(t)a^\dagger(t)\kappa\bar{n}\\
&\quad-\langle\langle 1|a^\dagger(t)a(t)A(t)\kappa(\bar{n}+1)-\langle\langle 1|A(t)a^\dagger(t)a(t)\kappa(\bar{n}+1)+\langle\langle 1|a(t)A(t)a^\dagger(t)\kappa\bar{n}\\
&\quad+\langle\langle 1|a^\dagger(t)A(t)a(t)\kappa(\bar{n}+1)-\langle\langle 1|a(t)a^\dagger(t)A(t)\kappa\bar{n}\\
=&\ \langle\langle 1|\Big(\kappa\bar{n}\big[-A(t)a(t)a(t)^\dagger+a(t)A(t)a(t)^\dagger+a(t)A(t)a(t)^\dagger-a(t)a(t)^\dagger A(t)\big]\\
&\quad+\kappa(\bar{n}+1)\big[a^\dagger(t)A(t)a(t)-a^\dagger(t)a(t)A(t)-A(t)a^\dagger(t)a(t)+a^\dagger(t)A(t)a(t)\big]\Big)\\
=&\ \langle\langle 1|\Big(\kappa\Big\{a^\dagger(t)[A(t),a(t)]+[a^\dagger(t),A(t)]a(t)\Big\}+2\kappa\bar{n}\big[a^\dagger(t),[A(t),a(t)]\big]\Big)
\end{aligned} \tag{4.160}$$

となる。第 3 等号で、

$$\begin{aligned}
\langle\langle 1|\tilde{a}(t) &= \langle\langle 1|\hat{U}^{-1}(t)e^{i\hat{H}_0 t}\tilde{a}\hat{V}(t)\\
&= \langle\langle 1|\tilde{a}\hat{V}(t)\\
&= \langle\langle 1|\hat{U}^{-1}(t)e^{i\hat{H}_0 t}a^\dagger\hat{V}(t)\\
&= \langle\langle 1|a^\dagger(t)
\end{aligned} \tag{4.161}$$

などを用いた。よって、(4.132) は、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle\langle 1|A(t) \;=&\; -i\langle\langle 1|A(t)\hat{H}_S(t)-i\langle\langle 1|A^I(t)\hat{H}_1^I(t)\\
&+\langle\langle 1|\Big(\kappa\Big\{a^\dagger(t)[A(t),a(t)]+[a^\dagger(t),A(t)]a(t)\Big\}+2\kappa\bar{n}\big[a^\dagger(t),[A(t),a(t)]\big]\Big)
\end{aligned} \tag{4.162}$$

となる。これの第 1 項を変形して、

$$\begin{aligned}
-i\langle\langle 1|A(t)\hat{H}_S(t) &= -i\langle\langle 1|A(t)\hat{H}_S(t)+i\langle\langle 1|\hat{H}_S(t)A(t)\\
&= i\langle\langle 1|[\hat{H}_S(t),A(t)]\\
&= i\langle\langle 1|[H_S(t),A(t)]
\end{aligned} \tag{4.163}$$

とかける。(4.162) の第 2 項は、

$$\begin{aligned}-i\langle\langle 1|A^I(t)\hat{H}_1^I(t) &= -i\langle\langle 1|A^I(t)[a^I(t)R^I(t)^\dagger + a^I(t)^\dagger R^I(t)] \\ &\quad +i\langle\langle 1|[\tilde{a}^I(t)\tilde{R}^I(t)^\dagger + \tilde{a}^I(t)^\dagger \tilde{R}^I(t)]A^I(t) \\ &= -i\langle\langle 1|A^I(t)a^I(t)R^I(t)^\dagger - i\langle\langle 1|A^I(t)a^I(t)^\dagger R^I(t) \\ &\quad +i\langle\langle 1|a^I(t)^\dagger R^I(t)A^I(t) + i\langle\langle 1|a^I(t)R^I(t)^\dagger A^I(t) \\ &= -i\langle\langle 1|R^I(t)^\dagger[A^I(t), a^I(t)] - i\langle\langle 1|[A^I(t), a^I(t)^\dagger]R^I(t) \end{aligned} \tag{4.164}$$

であるから、(4.163),(4.164) より、(4.162) は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\langle 1|A(t) &= \langle\langle 1|\Big[i[H_S(t), A(t)] - iR^I(t)^\dagger[A^I(t), a^I(t)] - i[A^I(t), a^I(t)^\dagger]R^I(t) \\ &\quad +\Big(\kappa\Big\{a^\dagger(t)[A(t), a(t)] + [a^\dagger(t), A(t)]a(t)\Big\} + 2\kappa\bar{n}\big[a^\dagger(t), [A(t), a(t)]\big]\Big)\Big] \end{aligned} \tag{4.165}$$

となる。処方 3 により、この第 2 項は、

$$-iR^I(t)^\dagger[A^I(t), a^I(t)] - i\langle\langle 1|[A^I(t), a^I(t)^\dagger]R^I(t) \to \sqrt{2\kappa}b_t^\dagger[A(t), a(t)] + \sqrt{2\kappa}[A(t), a(t)^\dagger]b_t \tag{4.166}$$

となる。ここで、

$$-iR^I(t) \to \sqrt{2\kappa}b_t \tag{4.167}$$

は乱雑力演算子である。(4.43) より、

$$[b_t, b_s^\dagger] = \delta(t-s) \tag{4.168}$$

である。(4.166) より、(4.169) は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\langle 1|A(t) &= \langle\langle 1|\Big[i[H_S(t), A(t)] + \sqrt{2\kappa}b_t^\dagger[A(t), a(t)] + \sqrt{2\kappa}[A(t), a^\dagger(t)]b_t \\ &\quad +\Big(\kappa\Big\{a^\dagger(t)[A(t), a(t)] + [a^\dagger(t), A(t)]a(t)\Big\} + 2\kappa\bar{n}\big[a^\dagger(t), [A(t), a(t)]\big]\Big)\Big] \end{aligned} \tag{4.169}$$

となる。TCL 型の (4.146) からも (4.44),(4.45) の近似の下では、同じ方程式が得られる。

4.3 $\hat{\Pi}$ の導出

ケット真空は、

$$\begin{aligned}|0(t)\rangle\rangle &= \hat{V}(t)|0\rangle\rangle \\ &= e^{-i\hat{H}_0 t}|0_I(t)\rangle\rangle, \end{aligned} \tag{4.170}$$

$$|0_I(t)\rangle\rangle \overset{\text{def}}{=} \hat{U}(t)|0\rangle\rangle \tag{4.171}$$

とかける。これより、

$$\frac{d}{dt}|0_I(t)\rangle\rangle = \frac{d\hat{U}(t)}{dt}|0\rangle\rangle \tag{4.172}$$

であり、(4.103) より、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{U}(t) &= -i\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q} - \int_0^t ds\ \hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\hat{H}_{1,QP}^I(s)\mathcal{P}\hat{U}(s) \\ &\quad -i\hat{H}_1^I(t)\mathcal{P}\hat{U}(t) \end{aligned} \tag{4.173}$$

でるから、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|0_I(t)\rangle\!\rangle &= -i\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q}|0\rangle\!\rangle - \int_0^t ds\; \hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\hat{H}_{1,QP}^I(s)\mathcal{P}\hat{U}(s)|0\rangle\!\rangle \\
&\quad -i\hat{H}_1^I(t)\mathcal{P}\hat{U}(t)|0\rangle\!\rangle \\
&= -i\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q}|0\rangle\!\rangle - \int_0^t ds\; \hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\hat{H}_{1,QP}^I(s)\mathcal{P}|0_I(s)\rangle\!\rangle \\
&\quad -i\hat{H}_1^I(t)\mathcal{P}|0_I(t)\rangle\!\rangle
\end{aligned} \tag{4.174}$$

となる。左から $\mathcal{P}$ をかけて、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{P}|0_I(t)\rangle\!\rangle &= -i\mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q}|0\rangle\!\rangle - \int_0^t ds\; \mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\hat{H}_{1,QP}^I(s)\mathcal{P}|0_I(s)\rangle\!\rangle \\
&\quad -i\mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\mathcal{P}|0_I(t)\rangle\!\rangle
\end{aligned} \tag{4.175}$$

を得る。(4.120) より、右辺第 1 項は、

$$\begin{aligned}
&-i\mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q}|0\rangle\!\rangle \\
&= -i\mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\mathcal{Q}|0\rangle\!\rangle - \int_0^t ds\; \mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\hat{H}_{1,QQ}^I(s)\mathcal{Q}|0\rangle\!\rangle + \mathcal{O}(\hat{H}_1^I)^3 \\
&= -i\mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)|0\rangle\!\rangle + i\mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\mathcal{P}\mathcal{P}|0\rangle\!\rangle - \int_0^t ds\; \mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\hat{H}_{1,QQ}^I(s)\mathcal{Q}|0\rangle\!\rangle + \mathcal{O}(\hat{H}_1^I)^3
\end{aligned} \tag{4.176}$$

右辺第 2 項は、

$$\begin{aligned}
&-\int_0^t ds\; \mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\hat{H}_{1,QP}^I(s)\mathcal{P}|0_I(s)\rangle\!\rangle \\
&= -\int_0^t ds\; \mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\hat{H}_{1,QP}^I(s)\mathcal{P}|0_I(s)\rangle\!\rangle + \mathcal{O}(\hat{H}_1^I)^3 \\
&= -\int_0^t ds\; \mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)(1-\mathcal{P})\hat{H}_1^I(s)\mathcal{P}|0_I(s)\rangle\!\rangle + \mathcal{O}(\hat{H}_1^I)^3 \\
&= -\int_0^t ds\; [\mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\hat{H}_1^I(s)\mathcal{P}\mathcal{P}|0_I(s)\rangle\!\rangle - \mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\mathcal{P}\hat{H}_1^I(s)\mathcal{P}\mathcal{P}|0_I(s)\rangle\!\rangle] + \mathcal{O}(\hat{H}_1^I)^3
\end{aligned} \tag{4.177}$$

となる。今、$\mathcal{P}$ として、(4.111) を選ぶ。すると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)|0\rangle\!\rangle &= |0\rangle_{RR}\langle 1|\hat{H}_1^I(t)|0\rangle\!\rangle \\
&= |0\rangle\!\rangle\langle\hat{H}_1^I(t)\rangle_R, \qquad (4.178)\\
\mathcal{Q}|0\rangle\!\rangle &= |0\rangle\!\rangle - |0\rangle_{RR}\langle 1|0\rangle_R \otimes |1\rangle \\
&= 0, \qquad (4.179)\\
\mathcal{P}\hat{X}\mathcal{P} &= |0\rangle_{RR}\langle 1|\hat{X}|0\rangle_{RR}\langle 1| \\
&= \mathcal{P}\langle\hat{X}\rangle_R \qquad (4.180)
\end{aligned}$$

などが成り立つ。マルチンゲールの性質 (4.124) を仮定すると、

$$\begin{aligned}
(4.176) &= \mathcal{O}(\hat{H}_1^I)^3, \qquad (4.181)\\
(4.177) &= \int_0^t ds\; \mathcal{P}\langle\hat{H}_1^I(t)\hat{H}_1^I(s)\rangle_R\mathcal{P}|0_I(s)\rangle\!\rangle + \mathcal{O}(\hat{H}_1^I)^3 \qquad (4.182)
\end{aligned}$$

となる。よって、(4.175) は、

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}|0_I(t)\rangle\!\rangle = -\int_0^t ds\,\mathcal{P}\langle \hat{H}_1^I(t)\hat{H}_1^I(s)\rangle_R \mathcal{P}|0_I(s)\rangle\!\rangle + \mathcal{O}(\hat{H}_1^I)^3 \tag{4.183}$$

となる。

今、注目系の相互作用描像のケット真空を、

$$|0_I(t)\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} {}_R\langle 1|0_I(t)\rangle\!\rangle \tag{4.184}$$

で定義する [18] と、

$$\mathcal{P}|0_I(t)\rangle\!\rangle = |0\rangle_R \otimes |0_I(t)\rangle \tag{4.186}$$

となるから、(4.183) は、

$$\begin{aligned} |0\rangle_R \otimes \frac{d}{dt}|0_I(t)\rangle &= -\int_0^t ds\,|0\rangle_{RR}\langle 1|\langle \hat{H}_1^I(t)\hat{H}_1^I(s)\rangle_R|0\rangle_R \otimes |0_I(s)\rangle \\ &= -|0\rangle_R \otimes \int_0^t ds\,\langle \hat{H}_1^I(t)\hat{H}_1^I(s)\rangle_R|0_I(s)\rangle, \\ \frac{d}{dt}|0_I(t)\rangle &= -\int_0^t ds\,\langle \hat{H}_1^I(t)\hat{H}_1^I(s)\rangle_R|0_I(s)\rangle \end{aligned} \tag{4.187}$$

となる。

今、

$$H_S = \omega_0 a^\dagger a, \tag{4.188}$$
$$H_1 = a^\dagger R + R^\dagger a \tag{4.189}$$

とし、(4.44),(4.45),(4.46) を仮定すると、(4.154) より、

$$\begin{aligned} &\langle \hat{H}_1^I(t)\hat{H}_1^I(s)\rangle \\ &= 2\delta(t-s)[a^I(t)a^I(t)^\dagger\kappa\bar{n} - a^I(t)\tilde{a}^I(s)\kappa(\bar{n}+1) - \tilde{a}^I(t)^\dagger a^I(s)^\dagger\kappa\bar{n} + \tilde{a}^I(t)^\dagger\tilde{a}^I(s)\kappa(\bar{n}+1)] \\ &+ 2\delta(t-s)[a^I(t)^\dagger a^I(s)\kappa(\bar{n}+1) - a^I(t)^\dagger\tilde{a}^I(s)^\dagger\kappa\bar{n} - \tilde{a}^I(t)a^I(s)\kappa(\bar{n}+1) + \tilde{a}^I(t)\tilde{a}^I(s)^\dagger\kappa\bar{n}] \end{aligned} \tag{4.190}$$

となる。よって、(4.187) は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|0_I(t)\rangle &= -\Big(a^I(t)a^I(t)^\dagger\kappa\bar{n} - a^I(t)\tilde{a}^I(t)\kappa(\bar{n}+1) - \tilde{a}^I(t)^\dagger a^I(t)^\dagger\kappa\bar{n} + \tilde{a}^I(t)^\dagger\tilde{a}^I(t)\kappa(\bar{n}+1) \\ &+ a^I(t)^\dagger a^I(t)\kappa(\bar{n}+1) - a^I(t)^\dagger\tilde{a}^I(t)^\dagger\kappa\bar{n} - \tilde{a}^I(t)a^I(t)\kappa(\bar{n}+1) + \tilde{a}^I(t)\tilde{a}^I(t)^\dagger\kappa\bar{n}\Big)|0_I(t)\rangle \\ &\equiv \hat{\Pi}^I(t)|0_I(t)\rangle \end{aligned} \tag{4.191}$$

となる。

今、

$$|0(t)\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} {}_R\langle 1|0(t)\rangle\!\rangle \tag{4.192}$$

[18] これは、

$$\rho^I(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Tr}_R[\rho_{tot}^I(t)] \tag{4.185}$$

を意味する。

とすると[19]、(4.170) より、

$$\begin{aligned}|0(t)\rangle &= {}_R\langle 1|e^{-i\hat{H}_0 t}|0_I(t)\rangle\rangle \\ &= {}_R\langle 1|e^{-i\hat{H}_S t}|0_I(t)\rangle\rangle \\ &= e^{-i\hat{H}_S t}{}_R\langle 1|0_I(t)\rangle\rangle \\ &= e^{-i\hat{H}_S t}|0_I(t)\rangle \end{aligned} \tag{4.194}$$

を得る。第 1 等号で

$$ {}_R\langle 1|\hat{H}_R = 0 \tag{4.195}$$

を用いた。(4.194),(4.191) より、

$$ i\frac{d}{dt}|0(t)\rangle = (\hat{H}_S + i\hat{\Pi})|0(t)\rangle, \tag{4.196}$$

$$ \hat{\Pi} = e^{-i\hat{H}_S t}\hat{\Pi}^I(t)e^{i\hat{H}_S t} \tag{4.197}$$

を得る。これは (3.16),(3.17) である。(4.197) の $\hat{\Pi}$ は (3.28) すなわち、

$$ \hat{\Pi} = -\kappa[(1+2\bar{n})(a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger \tilde{a}) - 2(1+\bar{n})a\tilde{a} - 2\bar{n}a^\dagger \tilde{a}^\dagger] - 2\kappa\bar{n} \tag{4.198}$$

と一致する。

---

[19] これは、

$$ \rho(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Tr}_R[\rho_{tot}(t)] \tag{4.193}$$

を意味する。

5 Stochastic NETFD

5.1 量子 Brown 運動

5.1.1 量子 Brown 運動と確率積分

今、

$$[b_t, b_s^\dagger] \;=\; \delta(t-s) \tag{5.1}$$

を満たす演算子 $b_t, b_t^\dagger (t, s \geq 0)$ を考える。$t \geq 0$ に対して、

$$B_t \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t dt'\, b_{t'}\,, \quad B_t^\dagger \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t dt'\, b_{t'}^\dagger \tag{5.2}$$

を導入する。このとき、

$$\begin{aligned}
[B_t, B_s^\dagger] \;&=\; \int_0^t dt_1 \int_0^s dt_2\, [b_{t_1}, b_{t_2}^\dagger] \\
&=\; \int_0^t dt_1 \int_0^s dt_2\, \delta(t_1 - t_2) \\
&=\; \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2\, \theta(t-t_1)\theta(t_1-t)\theta(s-t_2)\theta(t_2-s)\delta(t_1-t_2) \\
&=\; \int_{-\infty}^{\infty} dt_1\, \theta(t-t_1)\theta(t_1-t)\theta(s-t_1)\theta(t_1-s) \\
&=\; \min(t, s)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

となる。この性質を持つ $B_t, B_t^\dagger$ を量子 Brown 運動という。今、$\sharp$ を無印か $\dagger$ とし、差分

$$\Delta B_t^\sharp \;=\; B_{t+\Delta t}^\sharp - B_t^\sharp = \int_t^{t+\Delta t} dt' b_t^\sharp \tag{5.4}$$

を考える $(\Delta t > 0)$。これを

$$\Delta B_t^\sharp = \int_t^{t+\Delta t} dB_t^\sharp, \quad dB_t^\sharp = b_t^\sharp dt \tag{5.5}$$

ともかく。このとき、

$$\begin{aligned}
\Delta B_t \Delta B_t^\dagger \;&=\; B_{t+\Delta t} B_{t+\Delta t}^\dagger + B_t B_t^\dagger - B_{t+\Delta t} B_t^\dagger - B_t B_{t+\Delta t}^\dagger \\
&=\; [B_{t+\Delta t}^\dagger B_{t+\Delta t} + t + \Delta t] + [B_t^\dagger B_t + t] - [B_t^\dagger B_{t+\Delta t} + t] - [B_{t+\Delta t}^\dagger B_t + t] \\
&=\; \Delta B_t^\dagger \Delta B_t + \Delta t
\end{aligned} \tag{5.6}$$

となる。第 2 等号で (5.3) を用いた。上式は、

$$[\Delta B_t, \Delta B_t^\dagger] = \Delta t \tag{5.7}$$

を意味する。

$t \geq 0$ に対する（伊藤型）確率積分

$$I_t \;=\; \int_0^t ds\, [dB_s^\dagger F_s + G_s dB_s + E_s ds] \tag{5.8}$$

が well-defined だとする。このとき、

$$I_t = \int_0^t dI_s\,, \quad dI_s = [dB_s^\dagger F_s + G_s dB_s + E_s ds] \tag{5.9}$$

とかく。このとき、

$$I_t^{(i)} = \int_0^t dI_s\,, \quad dI_s = [dB_s^\dagger F_s^{(i)} + G_s^{(i)} dB_s + E_s^{(i)} ds] \quad (i=1,2)$$

に対して、

$$\begin{aligned}
\Delta(I_t^{(1)} I_t^{(2)}) &= \Big[\int_0^{t+\Delta t}\int_0^{t+\Delta t} - \int_0^t\int_0^t\Big] dI_{t_1}^{(1)} dI_{t_2}^{(2)} \\
&= \Big[\int_0^{t+\Delta t}\int_0^{t+\Delta t} - \int_0^{t+\Delta t}\int_0^t + \int_0^{t+\Delta t}\int_0^{t+} - \int_0^t\int_0^t\Big] dI_{t_1}^{(1)} dI_{t_2}^{(2)} \\
&= \Big[\int_0^{t+\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} + \int_t^{t+\Delta t}\int_0^t\Big] dI_{t_1}^{(1)} dI_{t_2}^{(2)} \\
&= \Big[\int_0^t\int_t^{t+\Delta t} + \int_t^{t+\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} + \int_t^{t+\Delta t}\int_0^t\Big] dI_{t_1}^{(1)} dI_{t_2}^{(2)} \\
&= I_t^{(1)}\Delta I_t^{(2)} + \Delta I_t^{(1)}\Delta I_t^{(2)} + \Delta I_t^{(1)} I_t^{(2)} \\
&= \Delta I_t^{(1)} I_t^{(2)} + I_t^{(1)}\Delta I_t^{(2)} + \Delta I_t^{(1)}\Delta I_t^{(2)}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

が示される。

あくまでも Δ に対する差分 $\Delta\bullet$ を扱っているのであるが、以下これを

$$\Delta \to dt\,, \quad \Delta\bullet \to d\bullet \tag{5.11}$$

とかく。この記法で (5.10) は、

$$d(I_t^{(1)} I_t^{(2)}) = dI_t^{(1)} I_t^{(2)} + I_t^{(1)} dI_t^{(2)} + dI_t^{(1)} dI_t^{(2)} \tag{5.12}$$

となり、(5.7) は、

$$[dB_t, dB_t^\dagger] = dt \tag{5.13}$$

となる。

5.1.2 伊藤積と Stratonovich 積

ハイゼンベルク描像の確率的 $X(t), Y(t)$ の伊藤型の確率積（伊藤積）は、

$$X(t)\cdot dY(t) \stackrel{\text{def}}{=} X(t)[Y(t+dt) - Y(t)], \tag{5.14}$$

$$dX(t)\cdot Y(t) \stackrel{\text{def}}{=} [X(t+dt) - X(t)]Y(t) \tag{5.15}$$

であり、Stratonovich 型の確率積（Stratonovich 積）は、

$$X(t)\circ dY(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{X(t+dt)+X(t)}{2}[Y(t+dt) - Y(t)], \tag{5.16}$$

$$dX(t)\circ Y(t) \stackrel{\text{def}}{=} [X(t+dt) - X(t)]\frac{Y(t+dt)+Y(t)}{2} \tag{5.17}$$

で与えられる。変換公式は

$$
\begin{aligned}
X(t) \circ dY(t) &= X(t) \cdot dY(t) + \frac{1}{2} dX(t) \cdot dY(t), && (5.18)\\
dX(t) \circ Y(t) &= dX(t) \cdot Y(t) + \frac{1}{2} dX(t) \cdot dY(t), && (5.19)\\
dX(t) &\equiv X(t+dt) - X(t) && (5.20)
\end{aligned}
$$

である。シュレーディンガー描像の場合は、(t) を $_t$ にかえれば良い。

$\hat{A}$ をシュレーディンガー描像の注目系の演算子とすると、

$$
[\hat{A}, dB_t^\sharp] = \hat{A} \cdot dB_t^\sharp - dB_t^\sharp \cdot \hat{A} = 0 \quad (^\sharp = \text{無印}, ^\dagger, ^\sim, ^{\dagger\sim}) \tag{5.21}
$$

である。

5.1.3 量子 Brown 運動への移行

(4.34),(4.52) は

$$
\begin{aligned}
da(t) &= -i\omega_0 a(t)dt - \kappa a(t)dt + \sqrt{2\kappa} dB_t, && (5.22)\\
d[a^\dagger(t)a(t)] &= -2\kappa a^\dagger(t)a(t)dt + \sqrt{2\kappa} a^\dagger(t) dB_t + \sqrt{2\kappa} dB_t^\dagger a(t) && (5.23)
\end{aligned}
$$

と書くべきものである。ここで、

$$
\begin{aligned}
dB_t &= b_t\, dt, && (5.24)\\
\sqrt{2\kappa} b_t &\equiv -iR^I(t) && (5.25)
\end{aligned}
$$

は乱雑力演算子である。(4.43) より、

$$
[b_t, b_s^\dagger] = \delta(t-s) \tag{5.26}
$$

である。これは、(5.1) と同じである。

(5.11) の表記の下で、(4.43),(4.44),(4.45) は、

$$
\langle dB_t dB_t^\dagger \rangle_R = (\bar{n}+1)dt\,, \quad \langle dB_t^\dagger dB_t \rangle_R = \bar{n} dt \tag{5.27}
$$

とかける。

さて、(4.56),(4.56),(4.59),(4.60) は、

$$
\begin{aligned}
\langle a^\dagger(t) \circ dB_t \rangle_R = \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \bar{n} dt \quad &, \quad \langle dB_t^\dagger \circ a(t) \rangle_R = \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \bar{n} dt, && (5.28)\\
\langle dB_t \circ a^\dagger(t) \rangle_R = \sqrt{\frac{\kappa}{2}} (\bar{n}+1) dt \quad &, \quad \langle a(t) \circ dB_t^\dagger \rangle_R = \sqrt{\frac{\kappa}{2}} (\bar{n}+1) dt && (5.29)
\end{aligned}
$$

と理解すべきである。よって、(5.23) は、

$$
d[a^\dagger(t)a(t)] = -2\kappa a^\dagger(t)a(t)dt + \sqrt{2\kappa} a^\dagger(t) \circ dB_t + \sqrt{2\kappa} dB_t^\dagger \circ a(t) \tag{5.30}
$$

と理解すべきである。伊藤型の確率積では、時刻 t より未来の乱雑力 $dB_t, dB_t^\dagger$ が現在の $a(t), a^\dagger(t)$ に影響を与えることはないので、

$$
\langle a^\dagger(t) \cdot dB_t \rangle_R = 0\,, \quad \langle dB_t^\dagger(t) \cdot a(t) \rangle_R = 0 \tag{5.31}
$$

である。

(4.169) も、正確には、

$$
\begin{aligned}
d\langle\!\langle 1|A(t) &= \langle\!\langle 1|\Big[i[H_S(t),A(t)]dt+\sqrt{2\kappa}dB_t^\dagger[A(t),a(t)]+\sqrt{2\kappa}[A(t),a^\dagger(t)]dB_t \\
&\quad+\Big(\kappa\Big\{a^\dagger(t)[A(t),a(t)]+[a^\dagger(t),A(t)]a(t)\Big\}dt+2\kappa\bar{n}\big[a^\dagger(t),[A(t),a(t)]\big]dt\Big)\Big], \quad (5.32)\\
dB_t &= b_t dt \quad (5.33)
\end{aligned}
$$

と解釈すべきである。(5.32) を、

$$
\begin{aligned}
dA(t) &= i[H_S(t),A(t)]dt+\sqrt{2\kappa}dB_t^\dagger[A(t),a(t)]+\sqrt{2\kappa}[A(t),a^\dagger(t)]dB_t \\
&\quad+\Big(\kappa\Big\{a^\dagger(t)[A(t),a(t)]+[a^\dagger(t),A(t)]a(t)\Big\}dt+2\kappa\bar{n}\big[a^\dagger(t),[A(t),a(t)]\big]dt\Big) \quad (5.34)
\end{aligned}
$$

とかく。$A=a,a^\dagger,a^\dagger a$ として、

$$
\begin{aligned}
da(t) &= -i\omega_0 a(t)dt-\kappa a(t)dt+\sqrt{2\kappa}dB_t, \quad (5.35)\\
da^\dagger(t) &= i\omega_0 a^\dagger(t)dt-\kappa a^\dagger(t)dt+\sqrt{2\kappa}dB_t^\dagger, \quad (5.36)\\
d[a^\dagger(t)a(t)] &= -2\kappa[a^\dagger(t)a(t)-\bar{n}]dt+\sqrt{2\kappa}a^\dagger(t)dB_t+\sqrt{2\kappa}dB_t^\dagger a(t) \quad (5.37)
\end{aligned}
$$

を得る。(5.35) は (5.22) に等しい。 (5.35),(5.36) では、乱雑力を含む項に注目系の演算子がかかっていないので、伊藤型と Stratonvich 型で確率微分方程式は区別がない。(5.37) では、第 2 項, 第 3 項の積が伊藤型かと Stratonvich 型かが問題である。これを検証しよう。

もしも、(5.37) が Stratonvich 型の確率微分方程式ならば、

$$
da^\dagger(t)\circ a(t)+a^\dagger(t)\circ da(t)=-2\kappa[a^\dagger(t)a(t)-\bar{n}]dt+\sqrt{2\kappa}a^\dagger(t)\circ dB_t+\sqrt{2\kappa}dB_t\circ^\dagger a(t) \quad (5.38)
$$

となるべきである。しかし、これは、(5.35),(5.36) と矛盾する。(5.37) が伊藤型の確率微分方程式ならば、左辺は (5.10) より、

$$
d[a^\dagger(t)a(t)] = da^\dagger(t)\cdot a(t)+a^\dagger(t)\cdot da(t)+da^\dagger(t)\cdot da(t) \quad (5.39)
$$

である。(5.35),(5.36) を代入し、dt のオーダーのものを残すと、

$$
\begin{aligned}
(5.37)\text{ の左辺} &= da^\dagger(t)\cdot a(t)+a^\dagger(t)\cdot da(t)+da^\dagger(t)\cdot da(t)\\
&= \sqrt{2\kappa}dB_t^\dagger a(t)+\sqrt{2\kappa}a^\dagger(t)dB_t-2\kappa a^\dagger(t)a(t)dt+2\kappa dB_t^\dagger dB_t\\
&\overset{\text{w}}{=} \sqrt{2\kappa}dB_t^\dagger a(t)+\sqrt{2\kappa}a^\dagger(t)dB_t-2\kappa a^\dagger(t)a(t)dt+2\kappa\bar{n}dt\\
&= (5.37)\text{ の右辺} \quad (5.40)
\end{aligned}
$$

となる。ただし、第 3 等号で (5.27) より従う、

$$
2\kappa dB_t^\dagger dB_t \overset{\text{w}}{=} 2\bar{n}dt \quad (5.41)
$$

を用いた。ここで、$\overset{\text{w}}{=}$ は乱雑平均 $\langle\cdots\rangle_R={}_R\langle 1|\cdots|0\rangle_R$ のもとで成立する式である。以上より、柴田・橋爪の方法で得られら Langevin 方程式は伊藤型であることが分かった。

5.1.4 熱的量子 Brown 運動

今、

$$b_t|0) = 0 \tag{5.42}$$

により、真空 $|0)$ を導入する。上式の $\dagger$ より、

$$(0|b_t^\dagger = 0\,, \quad (0| = |0)^\dagger \tag{5.43}$$

を得る。これより、

$$\begin{aligned} (0|dB_t|0) = 0 \quad &, \quad (0|dB_t^\dagger|0) = 0, && (5.44)\\ (0|dB_t dB_t|0) = 0 \quad &, \quad (0|dB_t^\dagger B_t^\dagger|0) = 0, && (5.45)\\ (0|dB_t dB_t^\dagger|0) = 0 \quad &, \quad (0|dB_t^\dagger B_t|0) = dt && (5.46) \end{aligned}$$

を得る。

$b_t, b_t^\dagger$ のチルダ共役 $\tilde{b}_t, \tilde{b}_t^\dagger$ を導入する。

$$|0,\tilde{0}) \;=\; |0) \otimes |0)^{\sim} \tag{5.47}$$

とすると、

$$dB_t|0,\tilde{0}) = d\tilde{B}_t|0,\tilde{0}) = 0\,, \quad (0,\tilde{0}|dB_t^\dagger = (0,\tilde{0}|d\tilde{B}_t^\dagger \tag{5.48}$$

となる。ただし、

$$d\tilde{B}_t = \tilde{b}_t dt\,, \quad d\tilde{B}_t^\dagger = \tilde{b}_t^\dagger dt \tag{5.49}$$

である。

dB_t は、熱浴が§ 4.1.1 の場合は、

$$\begin{aligned} dB_t \;&=\; dt\frac{1}{\sqrt{2\kappa}}R^I(t)\\ &=\; dt\frac{1}{\sqrt{2\kappa}}\sum_l g_l b_l e^{-i\omega_l t}\\ &=\; dt\frac{1}{\sqrt{2\kappa}}\int_0^\infty d\omega\;\mathcal{D}(\omega)g(\omega)b(\omega)e^{-i\omega t} \equiv dt\; b_t \end{aligned} \tag{5.50}$$

である。第 3 等号で (4.47) を用いた。さて、熱平衡状態では、(3.9) より、

$$b_l|0\rangle_R = e^{\omega_l/T}\tilde{b}_l^\dagger|0\rangle_R \tag{5.51}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} b_t|0\rangle_R \;&=\; \frac{1}{\sqrt{2\kappa}}\int_0^\infty d\omega\;\mathcal{D}(\omega)g(\omega)\tilde{b}^\dagger(\omega)e^{-i\omega t}e^{\omega/T}|0\rangle_R\\ &\approx\; \frac{1}{\sqrt{2\kappa}}e^{\omega_0/T}\int_0^\infty d\omega\;\mathcal{D}(\omega)g(\omega)\tilde{b}^\dagger(\omega)e^{-i\omega t}|0\rangle_R\\ &=\; e^{\omega_0/T}\tilde{b}_t^\dagger|0\rangle_R \end{aligned} \tag{5.52}$$

となる。これより、熱浴の詳細によらず、一般に

$$dB_t|0\rangle_R \,=\, e^{\omega_0/T} d\tilde{B}_t^\dagger|0\rangle_R \tag{5.53}$$

となることが予想される（むしろこの式を $|0\rangle_R$ の定義とする）。また、ブラ真空に対する熱状態条件は、

$$_R\langle 1|dB_t = {}_R\langle 1|d\tilde{B}_t^\dagger \tag{5.54}$$

となる。

今、

$$dC_t|0\rangle_R = d\tilde{C}_t|0\rangle_R \,=\, 0, \tag{5.55}$$

$$_R\langle 1|dC_t^{\female} = {}_R\langle 1|d\tilde{C}_t^{\female} \,=\, 0 \tag{5.56}$$

および

$$[dC^\mu, d\bar{C}^\nu] = dt\delta^{\mu\nu} \tag{5.57}$$

を満たす $dC^\mu, d\bar{C}^\mu$ を考える。ただし、ダブレット

$$dC_t^{\mu=1} = dC_t \quad , \quad dC_t^{\mu=2} = d\tilde{C}_t^{\female}, \tag{5.58}$$

$$d\bar{C}_t^{\mu=1} = dC_t^{\female} \quad , \quad dC_t^{\mu=2} = -d\tilde{C}_t \tag{5.59}$$

を導入した。$dC^\mu, d\bar{C}^\mu$ は、熱的 Bogolibov 変換

$$dC_t \,=\, \mathcal{B}_T^{\mu\nu} dB_t^\nu\,, \quad d\bar{C}_t = d\bar{B}_t^\mu (\mathcal{B}_T^{-1})^{\nu\mu}, \tag{5.60}$$

$$\mathcal{B}_T \,=\, \begin{pmatrix} 1+\bar{n} & -\bar{n} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{n} = \frac{1}{e^{\omega_0/T}-1} \tag{5.61}$$

でかける [20]。ただし、

$$dB_t^{\mu=1} = dB_t \quad , \quad dB_t^{\mu=2} = d\tilde{B}_t^\dagger, \tag{5.63}$$

$$d\bar{B}_t^{\mu=1} = dB_t^\dagger \quad , \quad dB_t^{\mu=2} = -d\tilde{B}_t \tag{5.64}$$

である。(5.60) より、

$$dB_t = dC_t + \bar{n} d\tilde{C}_t, \quad dB_t^\dagger = (1+\bar{n})dC_t^{\female} + d\tilde{C}_t \tag{5.65}$$

である。これと (5.58),(5.59),(5.57),(5.54) より、$\langle\cdots\rangle_R \equiv {}_R\langle 1|\cdots|0\rangle_R$ として、

$$\langle dB_t\rangle_R = 0, \langle dB_t^\dagger\rangle_R = 0\,, \langle d\tilde{B}_t\rangle_R = 0, \langle d\tilde{B}_t^\dagger\rangle_R = 0, \tag{5.66}$$

$$\langle dB_t dB_t^\dagger\rangle_R = (\bar{n}+1)dt \quad , \quad \langle dB_t^\dagger dB_t\rangle_R = \bar{n}dt, \tag{5.67}$$

$$\langle d\tilde{B}_t^\dagger dB_t^\dagger\rangle_R = (\bar{n}+1)dt \quad , \quad \langle d\tilde{B}_t dB_t\rangle_R = \bar{n}dt \tag{5.68}$$

---

[20] これは、§ 2.2 で (2.88) とせず、

$$b_{22} = 1 \tag{5.62}$$

とした場合である。

を得る。これ以外の 2 次モーメントは 0 である。これを真空平均 ${}_R\langle 1|\cdots|0\rangle_R$ を取ることを念頭に置いて、

$$dB_t \overset{\mathrm{w}}{=} 0, dB_t^\dagger \overset{\mathrm{w}}{=} 0\,, d\tilde{B}_t \overset{\mathrm{w}}{=} 0, d\tilde{B}_t^\dagger \overset{\mathrm{w}}{=} 0, \tag{5.69}$$

$$dB_t dB_t^\dagger \overset{\mathrm{w}}{=} (\bar{n}+1)dt \quad , \quad dB_t^\dagger dB_t \overset{\mathrm{w}}{=} \bar{n}dt, \tag{5.70}$$

$$d\tilde{B}_t^\dagger dB_t^\dagger \overset{\mathrm{w}}{=} (\bar{n}+1)dt \quad , \quad d\tilde{B}_t dB_t \overset{\mathrm{w}}{=} \bar{n}dt \tag{5.71}$$

とかく。

確率積分は、一般に

$$\hat{I}_t = \int_0^t d\hat{I}_s, \tag{5.72}$$

$$d\hat{I}_t = dB_t^\dagger \hat{F}_t + \hat{G}_t dB_t + d\tilde{B}_t^\dagger \hat{J}_t + \hat{K}_t d\tilde{B}_t + \hat{E}_t dt \tag{5.73}$$

の形になる。確率積分は well-defined だとする。(5.10) の一般化は、

$$d(\hat{I}_t^{(1)}\hat{I}_t^{(2)}) = d\hat{I}_t^{(1)}\hat{I}_t^{(2)} + \hat{I}_t^{(1)}d\hat{I}_t^{(2)} + d\hat{I}_t^{(1)}d\hat{I}_t^{(2)} \tag{5.74}$$

である。

5.2 量子確率微分方程式

5.2.1 伊藤型

以下では、伊藤積の · は省略する。

伊藤型の量子確率 Liouville 方程式

$$d|0_f(t)\rangle = -id\hat{\mathcal{H}}_{f,t}|0_f(t)\rangle \tag{5.75}$$

を考える。ここで、$|0_f(t)\rangle$ は注目系＋熱浴の有効的なケット真空である。この式の左から ${}_R\langle 1|$ をかけると、注目系の散逸シュレーディンガー方程式

$$\frac{d}{dt}|0(t)\rangle = -i\hat{H}|0(t)\rangle, \tag{5.76}$$

$$|0(t)\rangle = {}_R\langle 1|0_f(t)\rangle, \tag{5.77}$$

$$\hat{H}dt|0(t)\rangle = {}_R\langle 1|d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}|0_f(t)\rangle \tag{5.78}$$

を得る。$\hat{H}$ は一般に、

$$\hat{H} = \hat{H}_S + i\hat{\Pi}, \tag{5.79}$$

$$\hat{H}_S = H_S - \tilde{H}_S, \tag{5.80}$$

$$\hat{\Pi} = \hat{\Pi}_R + \hat{\Pi}_D \tag{5.81}$$

とかける。$\hat{\Pi}_R$ は緩和,$\hat{\Pi}_D$ は散逸を司る部分である。$id\hat{\mathcal{H}}_{f,t}$ は、チルディアン

$$(id\hat{\mathcal{H}}_{f,t})^\sim = id\hat{\mathcal{H}}_{f,t} \tag{5.82}$$

である。また、確率の保存に対応して、

$$\langle\langle 1|d\hat{\mathcal{H}}_{f,t} = 0 \tag{5.83}$$

である。さらに、

$$|0_f(t)\rangle^{\sim} = |0_f(t)\rangle \tag{5.84}$$

を仮定する。(5.75),(5.84) より (5.75) のチルダ共役は (5.75) 自身となる。

以下では、$d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}$ が有効的に

$$d\hat{\mathcal{H}}_{f,t} \;=\; \hat{H}dt + d\hat{M}_t \tag{5.85}$$

とできるという近似を行う。$d\hat{M}_t$ は注目系の演算子と $dB_t, dB_t^\dagger$ の積の線形結合と仮定する。注目系のハミルトニアンが

$$H_S \;=\; \omega_0 a^\dagger a \tag{5.86}$$

であるとき、

$$\begin{aligned} d\hat{M}_t \;=\; & i[h_1 a^\dagger\; dB_t + h_2 a^\dagger\; d\tilde{B}_t^\dagger + h_3 \tilde{a}\; dB_t + h_4 \tilde{a}\; d\tilde{B}_t^\dagger \\ & + h_1^* \tilde{a}^\dagger\; d\tilde{B}_t + h_2^* \tilde{a}^\dagger\; dB_t^\dagger + h_3^* a\; d\tilde{B}_t + h_4^* a\; dB_t^\dagger] \end{aligned} \tag{5.87}$$

である。たたし、(5.82) と、

$$a \to a e^{i\theta}, \quad dB_t \to dB_t e^{i\theta} \tag{5.88}$$

に対する不変性を仮定した。以下では、

$$|0_f(0)\rangle = |0\rangle_R \otimes |0(0)\rangle \tag{5.89}$$

を仮定し、

$${}_R\langle 1|d\hat{M}_t|0\rangle_R = 0 \tag{5.90}$$

となるものを考える。ただし、$|0\rangle_R$ は、

$$dB_t|0\rangle_R \;=\; f d\tilde{B}_t^\dagger|0\rangle_R, \tag{5.91}$$

$$f \;=\; \frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}, \quad \bar{n} = \frac{1}{e^{\omega_0/T}-1} \tag{5.92}$$

を満たすと仮定する。これは、$|0\rangle_R$ が温度 T の熱平衡状態にあることを意味する。(5.52) を見よ。なお、(5.83),(5.85) と

$$\langle 1|\hat{H} = 0 \tag{5.93}$$

から、

$$\langle\langle 1|d\hat{M}_t = 0 \tag{5.94}$$

となる。

dB_t は、熱浴が§ 4.1.1 の場合は、

$$\begin{aligned} dB_t \;&=\; dt\frac{1}{\sqrt{2\kappa}}R^I(t) \\ &=\; dt\frac{1}{\sqrt{2\kappa}}\sum_l g_l b_l e^{-i\omega_l t} \end{aligned} \tag{5.95}$$

である。$d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}$ は、シュレーディンガー描像のハミルトニアンのようなものだが、それが (5.87) のようにかける（時間にように依存する）というのである。また、$d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}$ には熱浴のハミルトニアン H_R の情報は含まれない。(5.75) の $|0_f(t)\rangle$ が§ 4.2 の $|0(t)\rangle\rangle$ と同じように時間発展することはないだろう。しかし、A を注目系の演算子とし、

$$
\begin{aligned}
|0_f(t)\rangle &= \hat{V}_f(t)|0_f(0)\rangle, && (5.96)\\
A(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \hat{V}_f^{-1}(t)A\hat{V}_f(t) && (5.97)
\end{aligned}
$$

としたとき、$\langle\langle 1|A(t)$ の運動方程式は正しいかもしれない。ところで、(5.78) より、

$$
{}_R\langle 1|d\hat{M}_t|0_f(t)\rangle = 0 \tag{5.98}
$$

となる。これは、

$$
{}_R\langle 1|d\hat{M}_t\hat{V}_f(t)|0_f(0)\rangle = {}_R\langle 1|d\hat{M}_t\hat{V}_f(t)|0\rangle_R|0(0)\rangle = 0 \tag{5.99}
$$

を意味する。これは、$s \le t$ の B_s のみに依存する演算子 A_t に対して、

$$
{}_R\langle 1|dB_t^\sharp A_t|0\rangle_R = 0 \quad (^\sharp = \text{無印}, ^\dagger, ^\sim, ^{\dagger\sim}) \tag{5.100}
$$

となることから従う。

$\hat{V}_f(t)$ は、

$$
d\hat{V}_f(t) = -id\hat{\mathcal{H}}_{f,t}\hat{V}_f(t) \tag{5.101}
$$

に従う。$\hat{V}_f(t)\hat{V}_f^{-1}(t) = 1$ を微分すると、(5.74) より、

$$
\begin{aligned}
0 &= d\hat{V}_f(t)\hat{V}_f^{-1}(t) + \hat{V}_f(t)d\hat{V}_f^{-1}(t) + d\hat{V}_f(t)d\hat{V}_f^{-1}(t),\\
d\hat{V}_f^{-1}(t) &= -[\hat{V}_f(t) + d\hat{V}_f(t)]^{-1}d\hat{V}_f(t)\hat{V}_f^{-1}(t) && (5.102)
\end{aligned}
$$

を得る。ここで、

$$
\begin{aligned}
[\hat{V}_f(t) + d\hat{V}_f(t)]^{-1} &= \Big(\hat{V}_f(t)[1 + \hat{V}_f^{-1}(t)d\hat{V}_f(t)]\Big)^{-1}\\
&= [1 + \hat{V}_f^{-1}(t)d\hat{V}_f(t)]^{-1}\hat{V}_f^{-1}(t)\\
&= [1 - \hat{V}_f^{-1}(t)d\hat{V}_f(t) + \{\hat{V}_f^{-1}(t)d\hat{V}_f(t)\}^2 - \cdots]\hat{V}_f^{-1}(t)\\
&= \hat{V}_f^{-1}(t) - \hat{V}_f^{-1}(t)d\hat{V}_f(t)\hat{V}_f^{-1}(t) + \mathcal{O}(dt) && (5.103)
\end{aligned}
$$

であり、(5.101) より、

$$
d\hat{V}_f(t)\hat{V}_f^{-1}(t) = -id\hat{\mathcal{H}}_{f,t} \tag{5.104}
$$

なので、

$$
\begin{aligned}
d\hat{V}_f^{-1}(t) &= i\hat{V}_f^{-1}(t)[d\hat{\mathcal{H}}_{f,t} + id\hat{\mathcal{H}}_{f,t}d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}]\\
&= i\hat{V}_f^{-1}(t)[d\hat{\mathcal{H}}_{f,t} + id\hat{M}_t d\hat{M}_t]\\
&= i\hat{V}_f^{-1}(t)d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}^-, && (5.105)\\
d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}^- &= d\hat{\mathcal{H}}_{f,t} + id\hat{M}_t d\hat{M}_t && (5.106)
\end{aligned}
$$

となる。

(5.97),(5.74) より、

$$\begin{aligned} dA(t) &= d\hat{V}_f{}^{-1}(t)A\hat{V}_f(t) + \hat{V}_f{}^{-1}(t)Ad\hat{V}_f(t) + d\hat{V}_f{}^{-1}(t)Ad\hat{V}_f(t) \\ &= d\hat{V}_f{}^{-1}(t)\hat{V}_f(t)A(t) + A(t)\hat{V}_f{}^{-1}(t)d\hat{V}_f(t) + d\hat{V}_f{}^{-1}(t)\hat{V}_f(t)A(t)\hat{V}_f{}^{-1}(t)d\hat{V}_f(t) \end{aligned} \tag{5.107}$$

である。(5.101),(5.106) を代入して、

$$\begin{aligned} dA(t) &= i\hat{V}_f{}^{-1}(t)[d\hat{\mathcal{H}}_{f,t} + id\hat{M}_t d\hat{M}_t]\hat{V}_f(t)A(t) - iA(t)\hat{V}_f{}^{-1}(t)d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}\hat{V}_f(t) \\ &\quad +\hat{V}_f{}^{-1}(t)[d\hat{\mathcal{H}}_{f,t} + id\hat{M}_t d\hat{M}_t]\hat{V}_f(t)A(t)\hat{V}_f{}^{-1}(t)d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}\hat{V}_f(t) \\ &= i\hat{V}_f{}^{-1}(t)[d\hat{\mathcal{H}}_{f,t} + id\hat{M}_t d\hat{M}_t]\hat{V}_f(t)A(t) - iA(t)\hat{V}_f{}^{-1}(t)d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}\hat{V}_f(t) \\ &\quad +\hat{V}_f{}^{-1}(t)d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}\hat{V}_f(t)A(t)\hat{V}_f{}^{-1}(t)d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}\hat{V}_f(t) \\ &= i[d\hat{\mathcal{H}}_f(t) + id'\hat{M}(t)d'\hat{M}(t)]A(t) - iA(t)d\hat{\mathcal{H}}_f(t) + d\hat{\mathcal{H}}_f(t)A(t)d\hat{\mathcal{H}}_f(t) \\ &= i[d\hat{\mathcal{H}}_f(t), A(t)] - d'\hat{M}(t)[d'\hat{M}(t), A(t)] \end{aligned} \tag{5.108}$$

を得る。ただし、

$$d\hat{\mathcal{H}}_f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{V}_f{}^{-1}(t)d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}\hat{V}_f(t) = \hat{H}(t)dt + d'\hat{M}(t), \tag{5.109}$$

$$d'\hat{M}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{V}_f{}^{-1}(t)d\hat{M}_t\hat{V}_f(t) \tag{5.110}$$

である。(5.108) に $\langle\!\langle 1|$ を作用させて、

$$\begin{aligned} \langle\!\langle 1|dA(t) &= \langle\!\langle 1|i[d\hat{\mathcal{H}}_f(t), A(t)] - id'\hat{M}(t)[d'\hat{M}(t), A(t)] \\ &= i\langle\!\langle 1|[\hat{H}_S(t), A(t)]dt - \langle\!\langle 1|[\hat{\Pi}(t), A(t)]dt + i\langle\!\langle 1|[d'\hat{M}(t), A(t)] - i\langle\!\langle 1|d'\hat{M}(t)[d'\hat{M}(t), A(t)] \\ &= i\langle\!\langle 1|[H_S(t), A(t)]dt + \langle\!\langle 1|A(t)\hat{\Pi}(t)dt - i\langle\!\langle 1|A(t)d'\hat{M}(t) \end{aligned} \tag{5.111}$$

を得る。第 3 等号で、

$$\langle\!\langle 1|\hat{V}_f(t) = \langle\!\langle 1| \tag{5.112}$$

と (3.20) すなわち、

$$\langle 1|\hat{\Pi} = 0 \tag{5.113}$$

と (5.83) を用いた。(5.112) は、(5.101) に $\langle\!\langle 1|$ を作用させ、(5.83) を使えば得られる。

5.2.2 Stratonovich 型

Stratonovich 型の量子確率 Liouville 方程式を

$$d|0_f(t)\rangle = -id\hat{H}_{f,t} \circ |0_f(t)\rangle \tag{5.114}$$

とかく。$d\hat{H}_{f,t}$ を求めよう。(5.75),(5.19) より、

$$\begin{aligned} -id\hat{\mathcal{H}}_{f,t} \circ |0_f(t)\rangle &= -id\hat{\mathcal{H}}_{f.t} \cdot |0_f(t)\rangle - i\frac{1}{2}d\hat{\mathcal{H}}_{f.t} \cdot d|0_f(t)\rangle \\ &= d|0_f(t)\rangle - i\frac{1}{2}d\hat{\mathcal{H}}_{f.t} \cdot d|0_f(t)\rangle \\ &= (1 - i\frac{1}{2}d\hat{\mathcal{H}}_{f.t}) \cdot d|0_f(t)\rangle \end{aligned} \tag{5.115}$$

である。よって、$\mathcal{O}(dt)$ までで、

$$
\begin{aligned}
d|0_f(t)\rangle &= -i(1 - i\frac{1}{2}d\hat{\mathcal{H}}_{f.t})^{-1} \cdot d\hat{\mathcal{H}}_{f,t} \circ |0_f(t)\rangle \\
&= -i\Big[d\hat{\mathcal{H}}_{f,t} + i\frac{1}{2}d\hat{\mathcal{H}}_{f.t}d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}\Big] \circ |0_f(t)\rangle \\
&= -i\Big[d\hat{\mathcal{H}}_{f,t} + i\frac{1}{2}d\hat{M}_t d\hat{M}_t\Big] \circ |0_f(t)\rangle \qquad (5.116)
\end{aligned}
$$

となる。これより、

$$
\begin{aligned}
d\hat{H}_{f,t} &= d\hat{\mathcal{H}}_{f,t} + i\frac{1}{2}d\hat{M}_t d\hat{M}_t \qquad (5.117) \\
&= \hat{H}_S dt + i\Big(\hat{\Pi} + \frac{1}{2}d\hat{M}_t d\hat{M}_t\Big) + d\hat{M}_t \qquad (5.118)
\end{aligned}
$$

を得る。

ところで、古典論では、Stratonovich 型の確率微分方程式は散逸項を含まない。これが量子系でも成り立つとしよう。すると、(5.118) より、

$$
\begin{aligned}
\hat{\Pi} + \frac{1}{2}d\hat{M}_t d\hat{M}_t &\overset{\mathrm{w}}{=} \hat{\Pi}_R, \qquad (5.119) \\
d\hat{M}_t d\hat{M}_t &\overset{\mathrm{w}}{=} -2\hat{\Pi}_D \qquad (5.120)
\end{aligned}
$$

を得る。これは、「一般化された第 2 種揺動散逸定理」と呼ぶべきものである。

伊藤型の確率 Langevin 方程式 (5.108) は、

$$
\begin{aligned}
dA(t) &= i[d\hat{\mathcal{H}}_f(t), A(t)] - id'\hat{M}(t)[d'\hat{M}(t), A(t)] \\
&= i[\hat{H}_S(t)dt + i\hat{\Pi}(t)dt, A(t)] + i[d'\hat{M}(t), A(t)] - d'\hat{M}(t)[d'\hat{M}(t), A(t)] \qquad (5.121)
\end{aligned}
$$

であった。ここで、

$$
\begin{aligned}
[dX(t), Y(t)] &\equiv dX(t) \cdot Y(t) - Y(t) \cdot dX(t) \\
&= dX(t) \circ Y(t) - Y(t) \circ dX(t) - \frac{1}{2}[dX(t) \cdot dY(t) - dY(t) \cdot dX(t)] \\
&= [dX(t) \overset{\circ}{,} Y(t)] - \frac{1}{2}[dX(t), dY(t)] \qquad (5.122)
\end{aligned}
$$

である。ただし、

$$
[Z(t) \overset{\circ}{,} W(t)] \equiv Z(t) \circ W(t) - W(t) \circ Y(t). \qquad (5.123)
$$

これと、(5.121) より、$\mathcal{O}(dt)$ で

$$
\begin{aligned}
[d'\hat{M}(t), A(t)] &= [d'\hat{M}(t) \overset{\circ}{,} A(t)] - \frac{1}{2}[d'\hat{M}(t), dA(t)] \\
&= [d'\hat{M}(t) \overset{\circ}{,} A(t)] - i\frac{1}{2}\big[d'\hat{M}(t), [d'\hat{M}(t), A(t)]\big] \qquad (5.124)
\end{aligned}
$$

となる。これを、(5.121) の第 2 項に用いて、

$$
\begin{aligned}
dA(t) \;&=\; i[\hat{H}_S(t)dt + i\hat{\Pi}(t)dt, A(t)] + i[d'\hat{M}(t)\overset{\circ}{,} A(t)] \\
&\quad + \frac{1}{2}\big[d'\hat{M}(t), [d'\hat{M}(t), A(t)]\big] - d'\hat{M}(t)[d'\hat{M}(t), A(t)] \\
&= i[\hat{H}_S(t)dt + i\hat{\Pi}(t)dt, A(t)] + i[d'\hat{M}(t)\overset{\circ}{,} A(t)] - \frac{1}{2}\Big\{d'\hat{M}(t), [d'\hat{M}(t), A(t)]\Big\} \\
&= i[\hat{H}_S(t)dt + i\hat{\Pi}(t)dt, A(t)] + i[d'\hat{M}(t)\overset{\circ}{,} A(t)] - \frac{1}{2}[d'\hat{M}(t)d'\hat{M}(t), A(t)] \\
&= i[\hat{H}_S(t)dt + i\hat{\Pi}(t)dt + id'\hat{M}(t) + i\frac{1}{2}d'\hat{M}(t)d'\hat{M}(t)\overset{\circ}{,} A(t)] \\
&= i[d\hat{H}_f(t)\overset{\circ}{,} A(t)], \qquad (5.125) \\
d\hat{H}_f(t) \;&=\; \hat{H}_S(t)dt + i\Big(\hat{\Pi}(t)dt + \frac{1}{2}d'\hat{M}(t)d'\hat{M}(t)\Big) + d'\hat{M}(t) \qquad (5.126)
\end{aligned}
$$

を得る。

5.3 ボソン系の確率微分方程式

5.3.1 注目系だけで確率が保存する場合

注目系のハミルトニアンが

$$H_S \;=\; \omega_0 a^\dagger a$$

である場合を考える。このとき、(5.87) より、

$$
\begin{aligned}
d\hat{M}_t \;&=\; i[h_1 a^\dagger\, dB_t + h_2 a^\dagger\, d\tilde{B}_t^\dagger + h_3 \tilde{a}\, dB_t + h_4 \tilde{a}\, d\tilde{B}_t^\dagger \\
&\quad + h_1^* \tilde{a}^\dagger\, d\tilde{B}_t + h_2^* \tilde{a}^\dagger\, dB_t^\dagger + h_3^* a\, d\tilde{B}_t + h_4^* a\, dB_t^\dagger] \qquad (5.127)
\end{aligned}
$$

であった。(5.83) より、

$$
\begin{aligned}
0 \;&=\; i\langle\!\langle 1|[h_1 a^\dagger\, dB_t + h_2 a^\dagger\, d\tilde{B}_t^\dagger + h_3 \tilde{a}\, dB_t + h_4 \tilde{a}\, d\tilde{B}_t \\
&\quad + h_1^* \tilde{a}^\dagger\, d\tilde{B}_t + h_2^* \tilde{a}^\dagger\, dB_t^\dagger + h_3^* a\, d\tilde{B}_t + h_4^* a\, dB_t] \\
&= i\langle\!\langle 1|[h_1 a^\dagger\, dB_t + h_2 a^\dagger\, dB_t + h_3 a^\dagger\, dB_t + h_4 a^\dagger\, dB_t^\dagger \\
&\quad + h_1^* a^\dagger\, dB_t^\dagger + h_2^* a\, dB_t^\dagger + h_3^* a\, dB_t^\dagger + h_4^* a\, dB_t^\dagger], \\
0 \;&=\; h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \qquad (5.128)
\end{aligned}
$$

を得る。さらに、注目系のみで確率が保存する条件

$$\langle 1|d\hat{M}_t = 0 \qquad (5.129)$$

を課すと、

$$
\begin{aligned}
0 \;&=\; i\langle 1|[h_1 a^\dagger\, dB_t + h_2 a^\dagger\, d\tilde{B}_t^\dagger + h_3 a^\dagger\, dB_t + h_4 a^\dagger\, d\tilde{B}_t^\dagger \\
&\quad + h_1^* a\, d\tilde{B}_t + h_2^* a\, dB_t^\dagger + h_3^* a\, d\tilde{B}_t + h_4^* a\, dB_t^\dagger], \\
h_1 + h_3 \;&=\; 0 = h_2 + h_4 \qquad (5.130)
\end{aligned}
$$

を得る。(5.128) は (5.130) から得られる。(5.130) より、(5.127) は、

$$
\begin{aligned}
d\hat{M}_t &= i(\gamma^{\female} d\hat{W}_t + \mathrm{t.c.}), && (5.131)\\
\gamma^{\female} &= a^\dagger - \tilde{a}, && (5.132)\\
dW_t &= h_1 dB_t + h_2 d\tilde{B}_t^\dagger && (5.133)
\end{aligned}
$$

となる。t.c. はチルダ共役である。

(5.133) より、

$$
\begin{aligned}
d\tilde{W}_t &= h_1^* d\tilde{B}_t + h_2 dB_t^\dagger,\\
dW_t d\tilde{W}_t &= h_1 h_1^* dB_t d\tilde{B}_t + h_1 h_2^* dB_t dB_t^\dagger + h_2 h_1^* d\tilde{B}_t^\dagger d\tilde{B}_t + h_2 h_2^* d\tilde{B}_t^\dagger dB_t^\dagger,\\
d\tilde{W}_t dW_t &= h_1^* h_1 d\tilde{B}_t dB_t + h_1^* h_2 d\tilde{B}_t d\tilde{B}_t^\dagger + h_2^* h_1 dB_t^\dagger dB_t + h_2^* h_2 dB_t^\dagger d\tilde{B}_t^\dagger,\\
\langle dW_t d\tilde{W}_t\rangle_R &= h_1 h_1^* \langle dB_t^\dagger dB_t\rangle_R + h_1 h_2^* \langle dB_t dB_t^\dagger\rangle_R + h_2 h_1^* \langle dB_t dB_t^\dagger\rangle_R + h_2 h_2^* \langle dB_t dB_t^\dagger\rangle_R\\
&= (h_1 + h_2)[h_1^* \langle dB_t^\dagger dB_t\rangle_R + h_2^* \langle dB_t dB_t^\dagger\rangle_R], && (5.134)\\
\langle d\tilde{W}_t dW_t\rangle_R &= h_1^* h_1 \langle dB_t^\dagger dB_t\rangle_R + h_1^* h_2 \langle dB_t^\dagger dB_t\rangle_R + h_2^* h_1 \langle dB_t^\dagger dB_t\rangle_R + h_2^* h_2 \langle dB_t dB_t^\dagger\rangle_R\\
&= (h_1^* + h_2^*)[h_1 \langle dB_t^\dagger dB_t\rangle_R + h_2 \langle dB_t dB_t^\dagger\rangle_R] && (5.135)
\end{aligned}
$$

となる。$\langle dW_t d\tilde{W}_t\rangle_R = \langle \tilde{d}W_t dW_t\rangle_R$ なので、

$$
\begin{aligned}
(h_1+h_2)h_1^* = (h_1^*+h_2^*)h_1 \quad , \quad (h_1+h_2)h_2^* = (h_1^*+h_2^*)h_2,\\
h_1 h_2^* = h_1^* h_2 && (5.136)
\end{aligned}
$$

を得る。これは、$-\pi < \theta \leq \pi$ として、

$$
h_1 = |h_1| e^{i\theta}, \quad h_2 = \pm |h_2| e^{i\theta} \tag{5.137}
$$

を意味する。$e^{i\theta}$ を dB_t に吸収されて、$h_1 > 0$ とする。今、

$$
h = |h_1 + h_2| \tag{5.138}
$$

とし、$h \neq 0$ を仮定する。このとき、

$$
\mu = h_1/h, \quad \nu = h_2/h
$$

とすると、

$$
\mu + \nu = \mathrm{sgn}(h_1 + h_2) \tag{5.139}
$$

となる。$\mathrm{sgn}(h_1+h_2) = -1$ の場合は、dB_t の位相を反転させれば $\mu + \nu = 1$ とできる。つまり、一般に $h_1 + h_2 \neq 0$ なら、

$$
\mu + \nu = 1 \tag{5.140}
$$

とできる。そして、

$$
dW_t = h(\mu dB_t + \nu d\tilde{B}_t^\dagger) \tag{5.141}
$$

となる。

5.3.2 微視的導出とつながるマルチンゲール

エルミート

$$d\hat{M}_t^{(H)} \;=\; (d\hat{M}_t^{(H)})^\dagger \tag{5.142}$$

でかつ、

$$d\hat{M}_t^{(H)} \;=\; dM_t^{(H)} - d\tilde{M}_t^{(H)} \tag{5.143}$$

の形でかけるマルチンゲールを考える。(5.88) に対する不変性を課すと、(5.87) で $h_2 = h_3 = 0$ とした

$$d\hat{M}_t \;=\; i[h_1 a^\dagger\ dB_t + h_4 \tilde{a}\ d\tilde{B}_t^\dagger + h_1^* \tilde{a}^\dagger\ d\tilde{B}_t + h_4^* a\ dB_t^\dagger] \tag{5.144}$$

を得る。更に (5.128) から

$$h_1 + h_4 = 0 \tag{5.145}$$

となる。h_1 の位相を dB_t に吸収されて

$$d\hat{M}_t^{(H)} = ih(a^\dagger dB_t - a dB_t^\dagger) + ih(\tilde{a}^\dagger d\tilde{B}_t - \tilde{a} d\tilde{B}_t^\dagger) \tag{5.146}$$

を得る。

(5.129) を満たすマルチンゲール (5.131) を、

$$\begin{aligned} d\hat{M}_t^{(-)} \;&=\; i(\gamma^{\text{♀}} dW_t + \tilde{\gamma}^{\text{♀}} d\tilde{W}_t) \\ &=\; ih[a^\dagger - \tilde{a}](\mu dB_t + \nu d\tilde{B}_t^\dagger) + ih[\tilde{a}^\dagger - a](\mu d\tilde{B}_t + \nu dB_t^\dagger) \end{aligned} \tag{5.147}$$

とかく。今、

$$\begin{aligned} d\hat{M}_t^{(+)} \;&\overset{\text{def}}{=}\; d\hat{M}_t^{(H)} - d\hat{M}_t^{(-)} \\ &=\; ih(a^\dagger dB_t - a dB_t^\dagger + \tilde{a}^\dagger d\tilde{B}_t - \tilde{a} d\tilde{B}_t^\dagger) - ih(a^\dagger \mu dB_t + a^\dagger \nu d\tilde{B}_t^\dagger - \mu\tilde{a} dB_t + \nu\tilde{a} d\tilde{B}_t^\dagger \\ &\qquad +\mu\tilde{a}^\dagger d\tilde{B}_t + \nu\tilde{a}^\dagger dB_t^\dagger - \mu a d\tilde{B}_t - \nu a dB_t^\dagger) \\ &=\; -ih(\mu a + \nu\tilde{a}^\dagger)(dB_t^\dagger - d\tilde{B}_t) - ih(\mu\tilde{a} + \nu a^\dagger)(d\tilde{B}_t^\dagger - dB_t) \\ &=\; -i(\gamma_\nu dW_t^{\text{♀}} + \tilde{\gamma}_\nu d\tilde{W}_t^{\text{♀}}), \end{aligned} \tag{5.148}$$

$$\gamma_\nu \;\overset{\text{def}}{=}\; \mu a + \nu\tilde{a}^\dagger, \tag{5.149}$$

$$dW_t^{\text{♀}} \;\overset{\text{def}}{=}\; h(dB_t^\dagger - d\tilde{B}_t) \tag{5.150}$$

とする。これらは交換関係

$$\begin{aligned} [\gamma_\nu, \gamma^{\text{♀}}] \;&=\; [\mu a + \nu\tilde{a}^\dagger, a^\dagger - \tilde{a}] \\ &=\; \mu[a, a^\dagger] + \nu[\tilde{a}^\dagger, -\tilde{a}] \\ &=\; \mu + \nu = 1 \end{aligned} \tag{5.151}$$

および

$$\begin{aligned} [dW_t, dW_t^{\text{♀}}] \;&=\; h^2[\mu dB_t + \nu d\tilde{B}_t^\dagger, dB_t^\dagger - d\tilde{B}_t] \\ &=\; h^2(\mu[dB_t, dB_t^\dagger] + \nu[d\tilde{B}_t^\dagger, -d\tilde{B}_t]) \\ &=\; h^2(\mu dt + \nu dt) \\ &=\; h^2 dt \end{aligned} \tag{5.152}$$

を満たす。

$\langle 1|$ を $d\hat{M}_t^{(H)}$ に作用させると、

$$\begin{aligned}\langle 1|d\hat{M}_t^{(H)} &= \langle 1|d\hat{M}_t^{(+)} \\ &= -i\langle 1|[a\ dW_t^{♀} + a^{\dagger}\ d\tilde{W}^{♀}]\end{aligned} \tag{5.153}$$

となる。つまり、注目系のみでは、確率は保存されない。

5.3.3　係数 h の決定

(4.198) の $\hat{\Pi}$ は、

$$\begin{aligned}\hat{\Pi} &= -\kappa[(1+2\bar{n})(a^{\dagger}a + \tilde{a}^{\dagger}\tilde{a}) - 2(1+\bar{n})a\tilde{a} - 2\bar{n}a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}] - 2\kappa\bar{n} \\ &= \kappa(2a\tilde{a} - a^{\dagger}a - \tilde{a}^{\dagger}\tilde{a}) + 2\kappa\bar{n}(a\tilde{a} - aa^{\dagger} - \tilde{a}^{\dagger}\tilde{a} + a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger})\end{aligned} \tag{5.154}$$

であった。$\gamma_{\nu}, \gamma^{♀}$ は、

$$\begin{pmatrix}\gamma_{\nu} \\ \tilde{\gamma}^{♀}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu & \nu \\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a \\ \tilde{a}^{\dagger}\end{pmatrix} \tag{5.155}$$

であったから、(5.154) の右辺第 2 項は、

$$2\kappa\bar{n}(a\tilde{a} - aa^{\dagger} - \tilde{a}^{\dagger}\tilde{a} + a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}) = 2\kappa\bar{n}\gamma^{♀}\tilde{\gamma}^{♀} \tag{5.156}$$

とかける。また、

$$\begin{aligned}\gamma^{♀}\gamma_{\nu} + \tilde{\gamma}^{♀}\tilde{\gamma}_{\nu} &= -2\mu a\tilde{a} + 2\nu a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger} + (\mu-\nu)(\tilde{a}^{\dagger}\tilde{a} + a^{\dagger}a) \\ &= -2(1-\nu)a\tilde{a} + 2\nu a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}\tilde{a}(1-2\nu)(\tilde{a}^{\dagger}\tilde{a} + a^{\dagger}a) \\ &= (-2a\tilde{a} + a^{\dagger}a + \tilde{a}^{\dagger}\tilde{a}) - 2\nu(-a\tilde{a} - a^{\dagger}\tilde{a} + \tilde{a}^{\dagger}\tilde{a} + a^{\dagger}a) \\ &= -(2a\tilde{a} - a^{\dagger}a - \tilde{a}^{\dagger}\tilde{a}) - 2\nu\gamma^{♀}\tilde{\gamma}^{♀}\end{aligned} \tag{5.157}$$

であるから、(5.154) の右辺第 1 項は、

$$\kappa(2a\tilde{a} - a^{\dagger}a - \tilde{a}^{\dagger}\tilde{a}) = -\kappa(\gamma^{♀}\gamma_{\nu} + \tilde{\gamma}^{♀}\tilde{\gamma}_{\nu}) + 2\kappa\nu\gamma^{♀}\tilde{\gamma}^{♀} \tag{5.158}$$

とかける。よって、

$$\begin{aligned}\hat{\Pi} &= -\kappa(\gamma^{♀}\gamma_{\nu} + \tilde{\gamma}^{♀}\tilde{\gamma}_{\nu}) + 2\kappa\nu\gamma^{♀}\tilde{\gamma}^{♀} + 2\kappa\bar{n}\gamma^{♀}\tilde{\gamma}^{♀} \\ &= \hat{\Pi}_R + \hat{\Pi}_D, \qquad (5.159)\\ \hat{\Pi}_R &= -\kappa(\gamma^{♀}\gamma_{\nu} + \tilde{\gamma}^{♀}\tilde{\gamma}_{\nu}), \qquad (5.160)\\ \hat{\Pi}_D &= 2\kappa(\bar{n}+\nu)\gamma^{♀}\tilde{\gamma}^{♀} \qquad (5.161)\end{aligned}$$

となる [21)]。

[21)] パラメーター ν は、コヒーレント状態を利用して密度演算子を c 数空間にマップするときの生成・消滅演算子の ordering と密接に関係している。$\nu = 1$ が正規積 (Q 関数), $\nu = 0$ が反正規積 (P 関数),$\nu = 1/2$ が Weyl 順である (§ C.3)。なお、この ν は付録 C の s とは、$\nu = (1+s)/\nu$ の関係にある。(C.62) を見よ。

(5.69),(5.70),(5.71) は、

$$
\begin{gathered}
dB_t \overset{\mathrm{w}}{=} 0, dB_t^{\dagger} \overset{\mathrm{w}}{=} 0\,, d\tilde{B}_t \overset{\mathrm{w}}{=} 0, d\tilde{B}_t^{\dagger} \overset{\mathrm{w}}{=} 0 \\
dB_t dB_t^{\dagger} \overset{\mathrm{w}}{=} (\bar{n}+1)dt \quad , \quad dB_t^{\dagger} dB_t \overset{\mathrm{w}}{=} \bar{n}dt, \\
d\tilde{B}_t^{\dagger} dB_t^{\dagger} \overset{\mathrm{w}}{=} (\bar{n}+1)dt \quad , \quad d\tilde{B}_t dB_t \overset{\mathrm{w}}{=} \bar{n}dt
\end{gathered}
$$

であった。これ以外の 2 次の項は $\overset{\mathrm{w}}{=} 0$ である。これと、(5.134) より、

$$
dW_t d\tilde{W}_t = d\tilde{W}_t dW_t \overset{\mathrm{w}}{=} h^2[\mu\bar{n} + \nu(\bar{n}+1)]dt = h^2(\bar{n}+\nu)dt \tag{5.162}
$$

である。また、

$$
\begin{aligned}
dW_t dW_t^{♀} &= h^2(\mu dB_t + \nu d\tilde{B}_t^{\dagger})(dB_t^{\dagger} - d\tilde{B}_t) \\
&= h^2(\mu dB_t dB_t^{\dagger} - \mu dB_t d\tilde{B}_t + \nu d\tilde{B}_t^{\dagger} dB_t^{\dagger} - \nu d\tilde{B}_t^{\dagger} d\tilde{B}_t) \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} h^2 dt \overset{\mathrm{w}}{=} d\tilde{W}_t d\tilde{W}_t^{♀}, \qquad (5.163) \\
dW_t dW_t &= h^2(\mu dB_t + \nu d\tilde{B}_t^{\dagger})(\mu dB_t + \nu d\tilde{B}_t^{\dagger}) \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} 0 \overset{\mathrm{w}}{=} d\tilde{W}_t d\tilde{W}_t \qquad (5.164)
\end{aligned}
$$

であり、

$$
{}_R\langle 1| dW_t^{♀} = {}_R\langle 1|(dB_t^{\dagger} - d\tilde{B}_t) = 0 = {}_R\langle 1| d\tilde{W}_t^{♀} \tag{5.165}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
dW_t^{♀} dW_t &\overset{\mathrm{w}}{=} 0 \overset{\mathrm{w}}{=} d\tilde{W}_t^{♀} d\tilde{W}_t, \qquad (5.166) \\
dW_t^{♀} d\tilde{W}_t &\overset{\mathrm{w}}{=} 0 \overset{\mathrm{w}}{=} d\tilde{W}_t^{♀} dW_t, \qquad (5.167) \\
dW_t^{♀} dW_t^{♀} &\overset{\mathrm{w}}{=} 0 \overset{\mathrm{w}}{=} d\tilde{W}_t^{♀} d\tilde{W}_t^{♀} \qquad (5.168)
\end{aligned}
$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
d\hat{M}_t^{(-)} d\hat{M}_t^{(-)} &= i(\gamma^{♀} dW_t + \tilde{\gamma}^{♀} d\tilde{W}_t) i(\gamma^{♀} dW_t + \tilde{\gamma}^{♀} d\tilde{W}_t) \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} -\gamma^{♀}\tilde{\gamma}^{♀} dW_t d\tilde{W}_t \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} h^2(\bar{n}+\nu)dt\ \gamma^{♀}\tilde{\gamma}^{♀}, \qquad (5.169) \\
d\hat{M}_t^{(-)} d\hat{M}_t^{(+)} &= i(\gamma^{♀} dW_t + \tilde{\gamma}^{♀} d\tilde{W}_t)(-i)(\gamma_\nu dW_t^{♀} + \tilde{\gamma}_\nu d\tilde{W}_t^{♀}) \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} dW_t dW_t^{♀} \gamma^{♀}\gamma_\nu + d\tilde{W}_t d\tilde{W}_t^{♀} \tilde{\gamma}^{♀}\tilde{\gamma}_\nu \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} h^2 dt\ (\gamma^{♀}\gamma_\nu + \tilde{\gamma}^{♀}\tilde{\gamma}_\nu), \qquad (5.170) \\
d\hat{M}_t^{(+)} d\hat{M}_t^{(+)} &= (-i)^2(\gamma_\nu dW_t^{♀} + \tilde{\gamma}_\nu d\tilde{W}_t^{♀})(\gamma_\nu dW_t^{♀} + \tilde{\gamma}_\nu d\tilde{W}_t^{♀}) \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} 0, \qquad (5.171) \\
d\hat{M}_t^{(+)} d\hat{M}_t^{(-)} &= -i(\gamma_\nu dW_t^{♀} + \tilde{\gamma}_\nu d\tilde{W}_t^{♀}) i(\gamma^{♀} dW_t + \tilde{\gamma}^{♀} d\tilde{W}_t) \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} 0 \qquad (5.172)
\end{aligned}
$$

を得る。(5.169),(5.161) より、

$$
d\hat{M}_t^{(-)} d\hat{M}_t^{(-)} \overset{\mathrm{w}}{=} -\frac{h^2}{\kappa}\hat{\Pi}_D dt. \tag{5.173}
$$

注目系だけで確率が保存する場合は、一般化された第 2 種揺動散逸定理 (5.120) が成り立つことを仮定すると、

$$h = \sqrt{2\kappa} \tag{5.174}$$

を得る。また、(5.169)-(5.172),(5.161),(5.160) より、

$$d\hat{M}_t^{(H)} d\hat{M}_t^{(H)} \stackrel{\mathrm{w}}{=} -2\hat{\Pi} dt. \tag{5.175}$$

5.3.4 一般的なマルチンゲール

$d\hat{M}_t^{(-)}$ と $d\hat{M}_t^{(H)}$ の中間のマルチンゲール

$$d\hat{M}_t^{(\lambda)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} d\hat{M}_t^{(-)} + \lambda d\hat{M}_t^{(+)} \quad (0 \leq \lambda \leq 1) \tag{5.176}$$

を考える。このとき、

$$d\hat{M}_t^{(0)} = d\hat{M}_t^{(-)}, \tag{5.177}$$

$$d\hat{M}_t^{(1)} = d\hat{M}_t^{(H)} \tag{5.178}$$

である。ただし、(5.174) を仮定する。$d\hat{M}_t^{(\lambda)}$ は、(5.87) で、

$$\begin{aligned} h_1 = \sqrt{2\kappa}[\lambda + \mu(1-\lambda)]| \quad &, \quad h_2 = \sqrt{2\kappa}\nu(1-\lambda), \\ h_3 = \sqrt{2\kappa}\mu[-1+\lambda] \quad &, \quad h_4 = \sqrt{2\kappa}[-\lambda + \nu(\lambda - 1)] \end{aligned} \tag{5.179}$$

としたものである。これは (5.128) を満たす。λ は、注目系だけでの確率の保存が破れる度合いを表す。

(5.169)-(5.172) より、

$$d\hat{M}_t^{(\lambda)} d\hat{M}_t^{(\lambda)} \stackrel{\mathrm{w}}{=} -2dt(\lambda\hat{\Pi}_R + \hat{\Pi}_D) \tag{5.180}$$

を得る。(5.106),(5.118) より、

$$\begin{aligned} d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}^{-} &= d\hat{\mathcal{H}}_{f,t} + i d\hat{M}_t d\hat{M}_t \\ &\stackrel{\mathrm{w}}{=} \hat{H}_S dt + i[(1-2\lambda)\hat{\Pi}_R - \hat{\Pi}_D]dt + d\hat{M}_t, \end{aligned} \tag{5.181}$$

$$\begin{aligned} d\hat{H}_{f,t} &= d\hat{\mathcal{H}}_{f,t} + i\frac{1}{2} d\hat{M}_t d\hat{M}_t \\ &= \hat{H}_S dt + i\Big(\hat{\Pi} + \frac{1}{2} d\hat{M}_t d\hat{M}_t\Big) + d\hat{M}_t \\ &\stackrel{\mathrm{w}}{=} \hat{H}_S dt + i(1-\lambda)\hat{\Pi}_R + d\hat{M}_t \end{aligned} \tag{5.182}$$

を得る。

5.3.5 量子 Langevin 方程式

$$d'\hat{M}^\sharp(t) = \hat{V}_f^{-1}(t) d\hat{M}^\sharp(t) \hat{V}_f(t) \quad \sharp = (-), (+), (\lambda), (H) \tag{5.183}$$

であった。これより、

$$
\begin{aligned}
d'\hat{M}^{(-)}(t) &= \hat{V}_f^{-1}(t)d\hat{M}^{(-)}(t)\hat{V}_f(t) \\
&= i\hat{V}_f^{-1}(t)(\gamma^{\mathring{\dagger}}dW_t + \tilde{\gamma}^{\mathring{\dagger}}d\tilde{W}_t)\hat{V}_f(t) \\
&= i(\gamma^{\mathring{\dagger}}(t)dW_t + \tilde{\gamma}^{\mathring{\dagger}}(t)d\tilde{W}_t), \qquad (5.184) \\
d'\hat{M}^{(+)}(t) &= -i\hat{V}_f^{-1}(t)(\gamma_\nu dW_t^{\mathring{\dagger}} + \tilde{\gamma}_\nu d\tilde{W}_t^{\mathring{\dagger}})\hat{V}_f^(t) \\
&= -i\hat{V}_f^{-1}(t)(dW_t^{\mathring{\dagger}}\gamma_\nu + d\tilde{W}_t^{\mathring{\dagger}}\tilde{\gamma}_\nu)\hat{V}_f(t) \\
&= -i[dW_t^{\mathring{\dagger}}\gamma_\nu(t) + d\tilde{W}_t^{\mathring{\dagger}}\tilde{\gamma}_\nu(t)], \qquad (5.185) \\
d'\hat{M}^{(\lambda)}(t) &= i[\gamma^{\mathring{\dagger}}(t)dW_t + \text{t.c.}] - i\lambda[dW_t^{\mathring{\dagger}}\gamma_\nu(t) + \text{t.c.}] \qquad (5.186)
\end{aligned}
$$

となる。ただし、(5.216) を用いた。(5.154),(5.186) を (5.111) すなわち、

$$
\langle\!\langle 1|dA(t) = i\langle\!\langle 1|[H_S(t), A(t)]dt + \langle\!\langle 1|A(t)\hat{\Pi}(t)dt - i\langle\!\langle 1|A(t)d'\hat{M}^{(\lambda)}(t) \qquad (5.187)
$$

に代入する。(5.32) は再現されるだろうか？(5.187) の第 2 項は、

$$
\begin{aligned}
&\langle\!\langle 1|A(t)\hat{\Pi}(t)dt \\
&= \langle\!\langle 1|A(t)\kappa[2a(t)\tilde{a}(t) - a^{\dagger\!\dagger}(t)a(t) - \tilde{a}^{\dagger\!\dagger}(t)\tilde{a}(t) + 2\bar{n}(a(t)\tilde{a}(t) - a(t)a^{\dagger\!\dagger}(t) - \tilde{a}^{\dagger\!\dagger}(t)\tilde{a}(t) + a^{\dagger\!\dagger}(t)\tilde{a}^{\dagger\!\dagger}(t))]dt \\
&= \kappa\Big[2\langle\!\langle 1|\tilde{a}A(t)a(t) - \langle\!\langle 1|A(t)a^{\dagger\!\dagger}(t)a(t) - \langle\!\langle 1|\tilde{a}^{\dagger\!\dagger}(t)\tilde{a}(t)A(t) + 2\bar{n}\langle\!\langle 1|\tilde{a}A(t)a(t) \\
&\quad -2\bar{n}\langle\!\langle 1|A(t)a(t)a^{\dagger\!\dagger}(t) - 2\bar{n}\langle\!\langle 1|\tilde{a}^{\dagger\!\dagger}(t)\tilde{a}(t)A(t) + 2\bar{n}\langle\!\langle 1|\tilde{a}^{\dagger\!\dagger}(t)A(t)a^{\dagger\!\dagger}(t)\Big]dt \\
&= \kappa\Big[2\langle\!\langle 1|a^{\dagger\!\dagger}(t)A(t)a(t) - \langle\!\langle 1|A(t)a^{\dagger\!\dagger}(t)a(t) - \langle\!\langle 1|a^{\dagger\!\dagger}(t)a(t)A(t) + 2\bar{n}\langle\!\langle 1|a^{\dagger\!\dagger}(t)A(t)a(t) \\
&\quad -2\bar{n}\langle\!\langle 1|A(t)a(t)a^{\dagger\!\dagger}(t) - 2\bar{n}\langle\!\langle 1|a^{\dagger\!\dagger}(t)a(t)A(t) + 2\bar{n}\langle\!\langle 1|a(t)A(t)a^{\dagger\!\dagger}(t)\Big]dt \\
&= \kappa\langle\!\langle 1|\Big\{a^{\dagger\!\dagger}(t)[A(t), a(t)] + [a^{\dagger\!\dagger}(t), A(t)]a(t)\Big\}dt + 2\kappa\bar{n}\langle\!\langle 1|\big[a^{\dagger\!\dagger}(t), [A(t), a(t)]\big]dt \qquad (5.188)
\end{aligned}
$$

となる。これは、(5.32) の第 2 行目である。(5.187) の第 2 項は、

$$
\begin{aligned}
&-i\langle\!\langle 1|A(t)d'\hat{M}^{(\lambda)}(t) \\
&= \langle\!\langle 1|A(t)\Big([\gamma^{\mathring{\dagger}}(t)dW_t + \tilde{\gamma}^{\mathring{\dagger}}(t)d\tilde{W}_t] - \lambda[dW_t^{\mathring{\dagger}}\gamma_\nu(t) + d\tilde{W}_t^{\mathring{\dagger}}\tilde{\gamma}_\nu(t)]\Big) \\
&= \langle\!\langle 1|[A(t), \gamma^{\mathring{\dagger}}(t)]dW_t + \langle\!\langle 1|[A(t), \tilde{\gamma}^{\mathring{\dagger}}(t)]d\tilde{W}_t \qquad (5.189)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、

$$
\langle\!\langle 1|\hat{V}_f^{-1}(t) = \langle\!\langle 1| \qquad (5.190)
$$

より、

$$
\begin{aligned}
\langle\!\langle 1|\gamma^{\mathring{\dagger}}(t) &= \langle\!\langle 1|\gamma^{\mathring{\dagger}}\hat{V}_f(t) \\
&= \langle\!\langle 1|(a^\dagger - \tilde{a})\hat{V}_f(t) \\
&= 0 \qquad (5.191)
\end{aligned}
$$

となることと、

$$
\begin{aligned}
\langle\!\langle 1|A(t)dW_t^{\mathring{\dagger}} &= \langle\!\langle 1|\hat{V}_f^{-1}(t)AdW_t^{\mathring{\dagger}}\hat{V}_f(t) \\
&= \langle\!\langle 1|AdW_t^{\mathring{\dagger}}\hat{V}_f(t) \\
&= \langle\!\langle 1|dW_t^{\mathring{\dagger}}A\hat{V}_f(t) \\
&= \langle\!\langle 1|\sqrt{2\kappa}(dB_t^\dagger - d\tilde{B}_t)A\hat{V}_f(t) \\
&= 0 \qquad (5.192)
\end{aligned}
$$

を用いた。この性質のため $d\hat{M}_t^{(+)}$ からの寄与はない。(5.189) は、

$$\begin{aligned}
(5.189) &= \langle\langle 1|\hat{V}_f^{-1}(t)[A,\gamma^{\dagger}]dW_t\hat{V}_f(t) + \langle\langle 1|\hat{V}_f^{-1}(t)[A,\tilde{\gamma}^{\dagger}]d\tilde{W}_t\hat{V}_f(t) \\
&= \langle\langle 1|[A,\gamma^{\dagger}]dW_t\hat{V}_f(t) + \langle\langle 1|[A,\tilde{\gamma}^{\dagger}]d\tilde{W}_t\hat{V}_f(t) \\
&= \langle\langle 1|dW_t[A,\gamma^{\dagger}]\hat{V}_f(t) + \langle\langle 1|d\tilde{W}_t[A,\tilde{\gamma}^{\dagger}]\hat{V}_f(t) \\
&= {}_R\langle 1|dW_t\langle 1|[A,\gamma^{\dagger}]\hat{V}_f(t) + {}_R\langle 1|d\tilde{W}_t\langle 1|[A,\tilde{\gamma}^{\dagger}] \\
&= {}_R\langle 1|\sqrt{2\kappa}(\mu dB_t + \nu d\tilde{B}_t^{\dagger})\langle 1|[A,a^{\dagger}-\tilde{a}]\hat{V}_f(t) + {}_R\langle 1|\sqrt{2\kappa}(\mu d\tilde{B}_t + \nu dB_t^{\dagger})\langle 1|[A,\tilde{a}^{\dagger}-a]\hat{V}_f(t) \\
&= {}_R\langle 1|\sqrt{2\kappa}dB_t\langle 1|\hat{V}_f(t) + {}_R\langle 1|\sqrt{2\kappa}dB_t^{\dagger}\langle 1|[A,-a]\hat{V}_f(t) \\
&= \sqrt{2\kappa}\langle\langle 1|[A,a^{\dagger}]dB_t\hat{V}_f(t) + \sqrt{2\kappa}\langle\langle 1|dB_t^{\dagger}[A,-a]\hat{V}_f(t) \\
&= \sqrt{2\kappa}\langle\langle 1|\hat{V}_f^{-1}(t)[A,a^{\dagger}]dB_t\hat{V}_f(t) + \sqrt{2\kappa}\langle\langle 1|\hat{V}_f^{-1}(t)dB_t^{\dagger}[A,-a]\hat{V}_f(t) \\
&= \sqrt{2\kappa}\langle\langle 1|[A(t),a^{\dagger\!\!\dagger}(t)]dB_t + \sqrt{2\kappa}\langle\langle 1|dB_t^{\dagger}[a(t),A(t)] \qquad (5.193)
\end{aligned}$$

よって、(5.187) は、

$$\begin{aligned}
&\langle\langle 1|dA(t) \\
&= i\langle\langle 1|[H_S(t),A(t)]dt + \kappa\langle\langle 1|\Big(a^{\dagger\!\!\dagger}(t)[A(t),a(t)] + [a^{\dagger\!\!\dagger}(t),A(t)]a(t) + 2\bar{n}\big[a^{\dagger\!\!\dagger}(t),[A(t),a(t)]\big]\Big)dt \\
&\quad + \sqrt{2\kappa}\langle\langle 1|[A(t),a^{\dagger\!\!\dagger}(t)]dB_t + \sqrt{2\kappa}\langle\langle 1|dB_t^{\dagger}[a(t),A(t)] \qquad (5.194)
\end{aligned}$$

となる。これは、(5.32) である！これは ν や λ によらない。これで、§ 5.2,§ 5.3 の体系は正しい（有効である）に違いないと思える。

(5.108) すなわち、

$$\begin{aligned}
dA(t) &= i[d\hat{\mathcal{H}}_f(t),A(t)] - d'\hat{M}^{(\lambda)}(t)[d'\hat{M}^{(\lambda)}(t),A(t)] \\
&= i[\hat{H}_S(t)dt + i\hat{\Pi}(t)dt + d'\hat{M}^{(\lambda)}(t),A(t)] - d'\hat{M}^{(\lambda)}(t)[d'\hat{M}^{(\lambda)}(t),A(t)] \\
&= i[H_S(t),A(t)]dt - [\hat{\Pi}(t),A(t)]dt + i[d'\hat{M}^{(\lambda)}(t),A(t)] - d'\hat{M}^{(\lambda)}(t)[d'\hat{M}^{(\lambda)}(t),A(t)] \qquad (5.195)
\end{aligned}$$

により、(5.194) よりも詳細な情報を得ることができる。上式に、$A=a$ を代入する。

$$\begin{aligned}
i[H_S,a] &= i[\omega_0 a^{\dagger}a,a] = -i\omega_0 a \\
-[\hat{\Pi},a] &= -\kappa[(2a\tilde{a} - a^{\dagger}a - \tilde{a}^{\dagger}\tilde{a}) + 2\bar{n}(a\tilde{a} - aa^{\dagger} - \tilde{a}^{\dagger}\tilde{a} + a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}),a] \\
&= -\kappa[aa^{\dagger},a] - 2\kappa\bar{n}[-aa^{\dagger} + a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger},a] \\
&= -\kappa a + 2\kappa\bar{n}(-a + \tilde{a}^{\dagger}), \\
i[d\hat{M}_t^{(\lambda)},a] &= -[\gamma^{\dagger}dW_t + \tilde{\gamma}^{\dagger}d\tilde{W}_t,a] + \lambda[dW_t^{\dagger}\gamma_\nu + d\tilde{W}_t^{\dagger}\tilde{\gamma}_\nu,a] \\
&= -[\gamma^{\dagger},a]dW_t - [\tilde{\gamma}^{\dagger},a]d\tilde{W}_t + \lambda dW_t^{\dagger}[\gamma_\nu,a] + \lambda d\tilde{W}_t^{\dagger}[\tilde{\gamma}_\nu,a] \\
&= dW_t + 0 + 0 + \lambda d\tilde{W}_t^{\dagger}(-\nu) \\
&= dW_t - \lambda\nu d\tilde{W}_t^{\dagger}, \\
-d\hat{M}_t^{(\lambda)}[d\hat{M}_t^{(\lambda)},a] &= -(\gamma^{\dagger}dW_t + \tilde{\gamma}^{\dagger}d\tilde{W}_t)(dW_t - \lambda\nu d\tilde{W}_t^{\dagger}) \\
&\quad + \lambda(\gamma_\nu dW_t^{\dagger} + \tilde{\gamma}_\nu d\tilde{W}_t^{\dagger})(dW_t - \lambda\nu d\tilde{W}_t^{\dagger}) \qquad (5.196)
\end{aligned}$$

であり、(5.162)-(5.168) より、

$$\begin{aligned}
(5.196) &\overset{\mathrm{w}}{=} -\tilde{\gamma}^{\dagger}dW_t d\tilde{W}_t + \lambda\nu\tilde{\gamma}^{\dagger}d\tilde{W}_t d\tilde{W}_t^{\dagger} \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} 2\kappa\bar{n}(a-\tilde{a}^{\dagger})dt + 2\kappa\nu(a-\tilde{a}^{\dagger})dt - 2\lambda\nu\kappa(a-\tilde{a}^{\dagger})dt \\
&= 2\kappa\bar{n}(a-\tilde{a}^{\dagger})dt + 2\kappa\nu(1-\lambda)(a-\tilde{a}^{\dagger})dt \qquad (5.197)
\end{aligned}$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
da(t) &\overset{\mathrm{w}}{=} -i\omega_0 a(t)dt - \kappa a(t)dt + 2\kappa\bar{n}[-a(t) + \tilde{a}^{\dagger\!\dagger}(t)]dt - dW_t - \lambda\nu d\tilde{W}_t^{\text{♀}} \\
&\qquad +2\kappa\bar{n}[a(t) - \tilde{a}^{\dagger\!\dagger}(t)]dt + 2\kappa\nu[a(t) - \tilde{a}^{\dagger\!\dagger}(t)]dt \\
&= (-i\omega_0 - \kappa)a(t)dt + 2\kappa\nu(1-\lambda)[a(t) - \tilde{a}^{\dagger\!\dagger}(t)]dt + dW_t - \lambda\nu d\tilde{W}_t^{\text{♀}}
\end{aligned}
\tag{5.198}
$$

を得る。同様にして、

$$
da^{\dagger\!\dagger}(t) \overset{\mathrm{w}}{=} (i\omega_0 - \kappa)a^{\dagger\!\dagger}(t)dt + 2\kappa\mu(1-\lambda)[a^{\dagger\!\dagger}(t) - \tilde{a}(t)]dt + d\tilde{W}_t + \lambda\mu dW_t^{\text{♀}}
\tag{5.199}
$$

も得られる。

$\lambda = 0$ とすると、

$$
da(t) \overset{\mathrm{w}}{=} (-i\omega_0 - \kappa)a(t)dt + 2\kappa\nu[a(t) - \tilde{a}^{\dagger\!\dagger}(t)]dt + dW_t,
\tag{5.200}
$$

$$
da^{\dagger\!\dagger}(t) \overset{\mathrm{w}}{=} (i\omega_0 - \kappa)a^{\dagger\!\dagger}(t)dt + 2\kappa\mu[a^{\dagger\!\dagger}(t) - \tilde{a}(t)]dt + d\tilde{W}_t
\tag{5.201}
$$

となり、更に $\nu = 1/2$ として、

$$
da(t) \overset{\mathrm{w}}{=} -i\omega_0 a(t)dt - \kappa\tilde{a}^{\dagger\!\dagger}(t)dt + dW_t,
\tag{5.202}
$$

$$
da^{\dagger\!\dagger}(t) \overset{\mathrm{w}}{=} i\omega_0 a^{\dagger\!\dagger}(t)dt - \kappa\tilde{a}(t)dt + d\tilde{W}_t
\tag{5.203}
$$

となる。また、$\lambda = 1$ とすると、

$$
\begin{aligned}
da(t) &\overset{\mathrm{w}}{=} (-i\omega_0 - \kappa)a(t)dt + dW_t - \nu d\tilde{W}_t^{\text{♀}} \\
&= (-i\omega_0 - \kappa)a(t)dt + \sqrt{2\kappa}\big[\mu dB_t + \nu d\tilde{B}_t^{\dagger} - \nu(d\tilde{B}_t^{\dagger} - dB_t)\big] \\
&= (-i\omega_0 - \kappa)a(t)dt + \sqrt{2\kappa}dB_t,
\end{aligned}
\tag{5.204}
$$

$$
\begin{aligned}
da^{\dagger\!\dagger}(t) &\overset{\mathrm{w}}{=} (i\omega_0 - \kappa)a^{\dagger\!\dagger}(t)dt + d\tilde{W}_t + \mu dW_t^{\text{♀}} \\
&= (i\omega_0 - \kappa)a^{\dagger\!\dagger}(t)dt + \sqrt{2\kappa}\big[\mu d\tilde{B}_t + \nu dB_t^{\dagger} + \mu(dB_t^{\dagger} - d\tilde{B}_t)\big] \\
&= (i\omega_0 - \kappa)a^{\dagger\!\dagger}(t)dt + \sqrt{2\kappa}dB_t^{\dagger}
\end{aligned}
\tag{5.205}
$$

となる。これは ν に依らない。(5.204) は、(5.22) に一致する。また、(5.205) は、(5.22) と同様にして得られる $a(t)$ の方程式に一致する。(5.205) は (5.204) で † を取ったものである。これは、$\lambda = 1$ はエルミートな、微視的導出とつながるマルチンゲールだったためである。

(5.194) が λ によらず、(5.32) に一致するのは、柴田・橋爪の第 2 処方による。また、(5.32) は§ 5.1.3 で伊藤型だと結論されたが、これは (5.194) が伊藤型であることと整合している。

5.3.6 量子 Brown 運動の演算子のハイゼンベルク描像

今、

$$
B^{\sharp}(t) \overset{\text{def}}{=} \hat{V}_f^{-1}(t) B_t^{\sharp} \hat{V}_f(t) \qquad (^{\sharp} = \text{無印}, ^{\dagger}, ^{\sim}, ^{\dagger\sim})
\tag{5.206}
$$

とする [22)]。(5.74) より、

$$
dB^{\sharp}(t) = [d\hat{V}_f^{-1}(t)]B_t^{\sharp}\hat{V}_f(t) + \hat{V}_f^{-1}(t)d[B_t^{\sharp}\hat{V}_f(t)] + [d\hat{V}_f^{-1}(t)]d[B_t^{\sharp}\hat{V}_f(t)]
$$

[22)] $X = B, M, W$ に対して、

$$
d'X^{\sharp}(t) = \hat{V}_f^{-1}(t) dX_t^{\sharp} \hat{V}_f(t)
\tag{5.207}
$$

とする。また、$B^{\dagger}(t), dB^{\dagger}(t)$ は、本来は $B^{\dagger\!\dagger}(t), dB^{\dagger\!\dagger}(t)$ と書くべき量である。

であり、

$$\begin{aligned} d[B_t^\sharp \hat{V}_f(t)] &= dB_t^\sharp \hat{V}_f(t) + B_t^\sharp d\hat{V}_f(t) + dB_t^\sharp d\hat{V}_f(t) \\ &= dB_t^\sharp \hat{V}_f(t) + B_{t+dt}^\sharp d\hat{V}_f(t) = \hat{V}_f(t) dB_t^\sharp + B_{t+dt}^\sharp d\hat{V}_f(t) \end{aligned} \tag{5.208}$$

である。ただし、

$$B_{t+dt}^\sharp = B_t^\sharp + dB_t^\sharp \tag{5.209}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} dB^\sharp(t) &= [d\hat{V}_f{}^{-1}(t)] B_t^\sharp \hat{V}_f(t) + \hat{V}_f{}^{-1}(t)\Big(dB_t^\sharp \hat{V}_f(t) + B_{t+dt}^\sharp d\hat{V}_f(t)\Big) \\ &\quad + [d\hat{V}_f{}^{-1}(t)]\Big(\hat{V}_f(t) dB_t^\sharp + B_{t+dt}^\sharp d\hat{V}_f(t)\Big) \\ &= d'B^\sharp(t) + \hat{V}_f{}^{-1}(t)\Big(\hat{V}_f(t)[d\hat{V}_f{}^{-1}(t)] B_t^\sharp \hat{V}_f(t) + B_{t+dt}^\sharp d\hat{V}_f(t) \\ &\quad + \hat{V}_f(t)[d\hat{V}_f{}^{-1}(t)]\{\hat{V}_f(t) dB_t^\sharp + B_{t+dt}^\sharp d\hat{V}_f(t)\}\Big) \end{aligned} \tag{5.210}$$

である。() の最後の項で、

$$d\hat{V}_f{}^{-1}(t)\{\hat{V}_f(t) dB_t^\sharp + B_{t+dt}^\sharp d\hat{V}_f(t)\} = d\hat{V}_f{}^{-1}(t) dB_t^\sharp \hat{V}_f(t) + [d\hat{V}_f{}^{-1}(t)] B_{t+dt}^\sharp d\hat{V}_f(t)$$

である。ただし、伊藤積では、

$$[dB_t^\sharp, \hat{V}_f(t)] = 0 \tag{5.211}$$

が成り立つことを用いた。よって、

$$\begin{aligned} (5.210) &= d'B^\sharp(t) + \hat{V}_f{}^{-1}(t)\Big(\hat{V}_f(t)[d\hat{V}_f{}^{-1}(t)] B_{t+dt}^\sharp \hat{V}_f(t) + B_{t+dt}^\sharp d\hat{V}_f(t) \\ &\quad + \hat{V}_f(t)[d\hat{V}_f{}^{-1}(t)] B_{t+dt}^\sharp d\hat{V}_f(t)\Big) \\ &= d'B^\sharp(t) + \hat{V}_f{}^{-1}(t)\Big(id\hat{\mathcal{H}}_{f,t}^- B_{t+dt}^\sharp \hat{V}_f(t) - B_{t+dt}^\sharp id\hat{\mathcal{H}}_{f,t} \hat{V}_f(t) \\ &\quad + d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}^- B_{t+dt}^\sharp d\hat{\mathcal{H}}_{f,t} \hat{V}_f(t)\Big) \\ &= d'B^\sharp(t) + \hat{V}_f{}^{-1}(t)\Big(id\hat{\mathcal{H}}_{f,t}^- B_{t+dt}^\sharp - B_{t+dt}^\sharp id\hat{\mathcal{H}}_{f,t} \\ &\quad + d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}^- B_{t+dt}^\sharp d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}\Big)\hat{V}_f(t) \end{aligned} \tag{5.212}$$

となる。(5.106) より、

$$\begin{aligned} id\hat{\mathcal{H}}_{f,t}^- B_{t+dt}^\sharp - B_{t+dt}^\sharp id\hat{\mathcal{H}}_{f,t} &= i(d\hat{\mathcal{H}}_{f,t} + id\hat{M}_t d\hat{M}_t) B_{t+dt}^\sharp - iB_{t+dt}^\sharp id\hat{\mathcal{H}}_{f,t} \\ &= i[d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}, B_{t+dt}^\sharp] - d\hat{M}_t d\hat{M}_t B_{t+dt}^\sharp, \\ d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}^- B_{t+dt}^\sharp d\hat{\mathcal{H}}_{f,t} &= (d\hat{\mathcal{H}}_{f,t} + id\hat{M}_t d\hat{M}_t) B_{t+dt}^\sharp d\hat{\mathcal{H}}_{f,t} \\ &= d\hat{\mathcal{H}}_{f,t} B_{t+dt}^\sharp d\hat{\mathcal{H}}_{f,t} \\ &= d\hat{M}_t B_{t+dt}^\sharp d\hat{M}_t \end{aligned}$$

である。よって、

$$(5.212) = d'B^\sharp(t) + \hat{V}_f{}^{-1}(t)\Big(i[d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}, B_{t+dt}^\sharp] - d\hat{M}_t d\hat{M}_t B_{t+dt}^\sharp + d\hat{M}_t B_{t+dt}^\sharp d\hat{M}_t\Big)\hat{V}_f(t) \tag{5.213}$$

を得る。これと、

$$\begin{aligned}
i[d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}, B^\sharp_{t+dt}] &= i[d\hat{M}_t, B^\sharp_{t+dt}] \\
&= i[d\hat{M}_t, dB^\sharp_t], \\
d\hat{M}_t d\hat{M}_t B^\sharp_{t+dt} + d\hat{M}_t B^\sharp_{t+dt} d\hat{M}_t &= d\hat{M}_t [d\hat{M}_t, B^\sharp_t + dB^\sharp_t] \\
&= d\hat{M}_t [d\hat{M}_t, dB^\sharp_t] = \mathcal{O}(dt^{3/2})
\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
dB^\sharp(t) &= d'B^\sharp(t) + \hat{V}_f{}^{-1}(t) i[d\hat{M}_t, dB^\sharp_t]\hat{V}_f(t) \\
&= d'B^\sharp(t) + i[d'\hat{M}(t), d'B^\sharp(t)] \\
&= d'B^\sharp(t) + i[d'\hat{M}(t), dB^\sharp_t(t)] \qquad (5.214)
\end{aligned}$$

を得る。ただし、(5.211) より、

$$\begin{aligned}
d'B^\sharp(t) &\equiv \hat{V}_f{}^{-1}(t) dB_t \hat{V}_f(t) \\
&= dB_t \qquad (5.215)
\end{aligned}$$

である [23)]。よって、

$$dB^\sharp(t) = dB^\sharp_t + i[d'\hat{M}(t), dB^\sharp_t(t)] \qquad (5.217)$$

となる。

(5.217) に、(5.176) を代入して、

$$\begin{aligned}
dB^\sharp(t) &= dB^\sharp_t + i[d'\hat{M}^{(-)}(t) + \lambda d'\hat{M}^{(+)}(t), d'B^\sharp(t)] \\
&= dB^\sharp_t - [\gamma^{\female}(t) d'W(t) + \tilde{\gamma}^{\female}(t) d'\tilde{W}(t), d'B^\sharp(t)] \\
&\quad + \lambda[\gamma_\nu(t) d'W^{\female}(t) + \tilde{\gamma}_\nu(t) d'\tilde{W}^{\female}(t), d'B^\sharp(t)]. \qquad (5.218)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\gamma^{\female} &= a^\dagger - \tilde{a}, \\
\gamma_\nu &= \mu a + \nu \tilde{a}^\dagger, \\
dW_t &= \sqrt{2\kappa}(\mu dB_t + \nu d\tilde{B}^\dagger_t), \qquad (5.219) \\
dW^{\female}_t &= \sqrt{2\kappa}(dB^\dagger_t - d\tilde{B}_t) \qquad (5.220)
\end{aligned}$$

であった。よって、

$$\begin{aligned}
dB(t) &= dB_t - \sqrt{2\kappa}\gamma^{\female}(t)[d'W(t), d'B(t)] - \sqrt{2\kappa}\tilde{\gamma}^{\female}(t)[d'\tilde{W}(t), d'B(t)] \\
&\quad + \sqrt{2\kappa}\lambda\gamma_\nu(t)[d'W^{\female}(t), d'B(t)] + \sqrt{2\kappa}\tilde{\gamma}_\nu(t)[d'\tilde{W}^{\female}(t), d'B(t)] \\
&= dB_t - \sqrt{2\kappa}[\tilde{a}^\dagger(t) - a(t)](-\nu dt) + \lambda[\mu a(t) + \nu\tilde{a}^\dagger(t)](-dt) \\
&= dB_t + \sqrt{2\kappa}\big[(1-\lambda)\nu[\tilde{a}^\dagger(t) - a(t)] - \lambda a(t)\big]dt \qquad (5.221)
\end{aligned}$$

---

23) $dW^\sharp_t$ は $dB^\sharp_t$ の線形結合なので、

$$d'W^\sharp(t) = dW^\sharp_t \qquad (5.216)$$

となる。

および、

$$
\begin{aligned}
dB^{\dagger\!\dagger}(t) &= dB_t^\dagger - \sqrt{2\kappa}\gamma^{\text{♀}}(t)[d'W(t), d'B^{\dagger\!\dagger}(t)] - \sqrt{2\kappa}\tilde{\gamma}^{\text{♀}}(t)[d'\tilde{W}(t), d'B^{\dagger\!\dagger}(t)] \\
&\quad +\sqrt{2\kappa}\lambda\gamma_\nu(t)[d'W^{\text{♀}}(t), d'B^{\dagger\!\dagger}(t)] + \sqrt{2\kappa}\tilde{\gamma}_\nu(t)[d'\tilde{W}^{\text{♀}}(t), d'B^{\dagger\!\dagger}(t)] \\
&= dB_t^\dagger - \sqrt{2\kappa}[a^\dagger(t) - \tilde{a}(t)](\mu dt) + \lambda[\mu\tilde{a}(t) + \nu a^\dagger(t)](-dt) \\
&= dB_t^\dagger + \sqrt{2\kappa}\big[-(1-\lambda)\mu[a^\dagger(t) - \tilde{a}(t)] - \lambda a^\dagger(t)\big]dt
\end{aligned}
\tag{5.222}
$$

を得る [24)]。(5.221),(5.222) と (5.219),(5.220) より、

$$
\begin{aligned}
dW(t) &= dW_t + 2\kappa\mu\big[(1-\lambda)\nu[\tilde{a}^\dagger(t) - a(t)] - \lambda a(t)\big]dt \\
&\quad +2\kappa\nu\big[-(1-\lambda)\mu[\tilde{a}^\dagger(t) - a(t)] - \lambda\tilde{a}^\dagger(t)\big]dt \\
&= dW_t - 2\kappa\Big(\mu\lambda a(t) + \nu\lambda\tilde{a}^\dagger(t)\Big)dt \\
&= dW_t - 2\lambda\kappa\gamma_\nu(t)dt,
\end{aligned}
\tag{5.223}
$$

$$
\begin{aligned}
dW^{\text{♀}}(t) &= dW_t^{\text{♀}} - 2\kappa\big[-(1-\lambda)\mu[a^\dagger(t) - \tilde{a}(t)] + \lambda a^\dagger(t)\big]dt \\
&\quad -\big[-(1-\lambda)\mu[\tilde{a}^\dagger(t) - a(t)] + \lambda\tilde{a}^\dagger(t)\big]dt \\
&= dW_t^{\text{♀}} - 2\lambda\kappa\lambda[a^\dagger(t) - \tilde{a}(t)]dt \\
&= dW_t^{\text{♀}} - 2\lambda\kappa\lambda\gamma^{\text{♀}}dt
\end{aligned}
\tag{5.224}
$$

を得る。$dW(t)$ は ν には陽には依らない。上の 2 式の右辺第 2 項は、系の情報を持っている。また、$\lambda = 0$ で、その項は消える。

ところで、

$$
\begin{aligned}
d\hat{M}_t^{(-)} &= i(\gamma^{\text{♀}}dW_t + \tilde{\gamma}^{\text{♀}}d\tilde{W}_t), \\
d\hat{M}_t^{(+)} &= -i(\gamma_\nu dW_t^{\text{♀}} + \tilde{\gamma}_\nu d\tilde{W}_t^{\text{♀}}), \\
d\hat{M}_t^{(\lambda)} &= d\hat{M}_t^{(-)} + \lambda d\hat{M}_t^{(+)}, \\
d'\hat{M}^\sharp(t) &= \hat{V}_f^{-1}(t)d\hat{M}^\sharp(t)\hat{V}_f(t) \qquad \sharp = (-), (+), (\lambda), (H)
\end{aligned}
$$

であった。今、

$$
:d\hat{M}^{(-)}(t): \stackrel{\text{def}}{=} i[\gamma^{\text{♀}}(t)dW(t) + \tilde{\gamma}^{\text{♀}}(t)d\tilde{W}(t)], \tag{5.225}
$$

$$
:d\hat{M}^{(+)}(t): \stackrel{\text{def}}{=} -i[dW^{\text{♀}}(t)\gamma_\nu(t) + d\tilde{W}^{\text{♀}}(t)\tilde{\gamma}_\nu(t)], \tag{5.226}
$$

$$
:d\hat{M}^{(\lambda)}(t): \stackrel{\text{def}}{=} :d\hat{M}^{(-)}(t): +\lambda :d\hat{M}^{(+)}(t): \tag{5.227}
$$

とする。$:\bullet:$ は注目系と熱浴（$dB_t^\sharp$ の記述する系）の演算子の全体に対する正規積である。このとき、このとき、(5.223),(5.224) より、

$$
\begin{aligned}
:d\hat{M}^{(\lambda)}(t): &= i[\gamma^{\text{♀}}(t)dW_t + \text{t.c.}] - i\lambda[dW_t^{\text{♀}}\gamma_\nu(t) + \text{t.c.}] \\
&\quad +i\{\gamma^{\text{♀}}(t)[-2\lambda\kappa\gamma_\nu(t)dt] + \text{t.c.}\} - i\lambda\{[-2\lambda\kappa\lambda\gamma^{\text{♀}}dt]\gamma_\nu(t) + \text{t.c.}\} \\
&= i[\gamma^{\text{♀}}(t)dW_t + \text{t.c.}] - i\lambda[dW_t^{\text{♀}}\gamma_\nu(t) + \text{t.c.}]
\end{aligned}
\tag{5.228}
$$

である。(5.228),(5.186) より、

$$
:d\hat{M}^{(\lambda)}(t):= d'\hat{M}^{(\lambda)}(t) \tag{5.229}
$$

[24)] $\nu = \mu = \frac{1}{2}$ のときのみ、$dB^{\dagger\!\dagger}(t) = [dB(t)]^\dagger$ となる。

となる。しかし、

$$:d\hat{M}^{(\pm)}(t):\neq d'\hat{M}^{(\pm)}(t) \tag{5.230}$$

である[25)]。

[25)] もしも、

$$d\hat{M}^{(+)}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -i[\gamma_\nu(t)dW^{♀}(t) + \tilde{\gamma}_\nu(t)d\tilde{W}^{♀}(t)], \tag{5.231}$$

$$d\hat{M}^{(\lambda)}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} :d\hat{M}^{(-)}(t): +\lambda d\hat{M}^{(+)}(t) \tag{5.232}$$

としたなら、

$$d\hat{M}^{(\lambda)}(t) \neq d'\hat{M}^{(\lambda)}(t) \tag{5.233}$$

である。

6　半自由粒子

6.1　$\hat{\Pi}$ の公理的導出

$\hat{H}$ として、$a, a^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger$ に対して双線形で、変換

$$a \to ae^{i\theta}, \quad a^\dagger \to a^\dagger e^{-i\theta}, \quad \tilde{a} \to \tilde{a}e^{-i\theta}, \quad \tilde{a}^\dagger \to \tilde{a}^\dagger e^{i\theta} \tag{6.1}$$

に対して不変なもの（半自由粒子）を考える。一般には、

$$i\hat{H} = g_1(t)a^\dagger a + g_2(t)\tilde{a}^\dagger\tilde{a} + g_3(t)a\tilde{a} + g_4(t)a^\dagger\tilde{a}^\dagger + g_0(t) \tag{6.2}$$

であるが、(3.18) の要請から、

$$g_1^*\tilde{a}^\dagger\tilde{a} + g_2^*a^\dagger a + g_3^*\tilde{a}a + g_4^*\tilde{a}^\dagger a^\dagger + g_0^* = g_1a^\dagger a + g_2\tilde{a}^\dagger\tilde{a} + g_3a\tilde{a} + g_4a^\dagger\tilde{a}^\dagger + g_0$$

すなわち、

$$g_1^* = g_2\,, \quad g_3^* = g_3\,, \quad g_4* = g_4\,, \quad g_0^* = g_0 \tag{6.3}$$

である。今、

$$g_1(t) = -c_1(t) + i\hbar\omega(t)\,, \quad g_3(t) = -c_2(t)\,, \quad g_4(t) = -c_3(t)\,, \quad g_0(t) = -c_4(t) \tag{6.4}$$

とかくと、

$$\begin{aligned}\hat{H} &= -i\big[[-c_1(t) + i\hbar\omega(t)]a^\dagger a + [-c_1(t) - i\hbar\omega(t)]\tilde{a}^\dagger\tilde{a} - c_2(t)a\tilde{a} - c_3(t)a^\dagger\tilde{a}^\dagger - c_4(t)\big] \\ &= \hbar\omega(t)(a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger\tilde{a}) + i\hat{\Pi}, \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\hat{\Pi} = c_1(t)(a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}) + c_2(t)a\tilde{a} + c_3(t)a^\dagger\tilde{a}^\dagger + c_4(t) \tag{6.6}$$

となる。$\omega(t)$ はくり込まれたエネルギーである。さらに、要請 (3.19) より、

$$\begin{aligned}0 &= c_1\langle 1|a^\dagger a + c_1\langle 1|\tilde{a}^\dagger\tilde{a} + c_2\langle 1|a\tilde{a} + c_3\langle 1|a^\dagger\tilde{a}^\dagger + c_4\langle 1| \\ &= c_1\langle 1|a^\dagger a + c_1\langle 1|a^\dagger a + c_2\langle 1|a^\dagger a + c_3\langle 1|aa^\dagger + c_4\langle 1| \\ &= (2c_1 + c_2 + c_3)\langle 1|a^\dagger a + (c_3 + c_4)\langle 1|\end{aligned} \tag{6.7}$$

すなわち、

$$2c_1 + c_2 + c_3 = 0\,, \quad c_3 + c_4 = 0 \tag{6.8}$$

が課される。よって、

$$\hat{\Pi} = c_1(t)(a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}) + c_2(t)a\tilde{a} - [2c_1(t) + c_2(t)]a^\dagger\tilde{a}^\dagger + [2c_1(t) + c_2(t)] \tag{6.9}$$

となる。

ところで、$a(t), a^\ddagger(t)$ の運動方程式は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}a(t) &= \frac{i}{\hbar}[\hat{H}(t), a(t)] \\ &= -i\omega(t)a(t) + c_1(t)/\hbar a(t) - [2c_1(t) + c_2(t)]/\hbar\ \tilde{a}^\ddagger(t),\end{aligned} \tag{6.10}$$

$$\frac{d}{dt}a^\ddagger(t) = i\omega(t)a^\ddagger(t) - c_1(t)/\hbar\ a^\ddagger(t) - c_2(t)/\hbar\ \tilde{a}(t) \tag{6.11}$$

となる。よって、$\langle 1|a^{\ddagger}(t)a(t)$ の運動方程式は、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle 1|a^{\ddagger}(t)a(t) &= \langle 1|[\frac{d}{dt}a^{\ddagger}(t)]a(t) + \langle 1|a^{\ddagger}(t)[\frac{d}{dt}a(t)] \\
&= \langle 1|\Big(i\omega(t)a^{\ddagger}(t) - c_1(t)/\hbar\ a^{\ddagger}(t) - c_2(t)/\hbar\ \tilde{a}(t)\Big)a(t) \\
&\quad +\langle 1|a^{\ddagger}(t)\Big(- i\omega(t)a(t) + c_1(t)/\hbar a(t) - [2c_1(t) + c_2(t)]/\hbar\ \tilde{a}^{\ddagger}(t)\Big) \\
&= \langle 1|\Big(i\omega(t)a^{\ddagger}(t)a(t) - c_1(t)/\hbar\ a^{\ddagger}(t)a(t) - c_2(t)/\hbar\ a^{\ddagger}(t)a(t) \\
&\quad + - i\omega(t)a^{\ddagger}(t)a(t) + c_1(t)/\hbar a^{\ddagger}(t)a(t) - [2c_1(t) + c_2(t)]/\hbar a(t)a^{\ddagger}(t)\Big) \\
&= -2\kappa(t)\langle 1|a^{\ddagger}(t)a(t) + \Sigma(t)\langle 1|, \qquad (6.12) \\
\kappa(t) &= [c_1(t) + c_2(t)]/\hbar, \quad \Sigma(t) = -[2c_1(t) + c_2(t)]/\hbar \qquad (6.13)
\end{aligned}
$$

となる。今、

$$
n(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle 1|a^{\ddagger}(t)a(t)|0\rangle \qquad (6.14)
$$

とすると、上式より、

$$
\frac{d}{dt}n(t) = -2\kappa(t)n(t) + \Sigma(t) \qquad (6.15)
$$

を得る。$\kappa(t)$ はくり込まれた感受率である。

今、この方程式の定常状態が唯一

$$
n(\infty) = \bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \qquad (6.16)
$$

しかないと仮定する。すると、(6.15) より、

$$
\Sigma(\infty) = 2\kappa(\infty)\bar{n} \qquad (6.17)
$$

となる。更に、$\omega(t), \kappa(t), \Sigma(t)$ が時間によらず一定であるとする。このとき、(6.15) は、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}n(t) &= -2\kappa n(t) + 2\kappa\bar{n} \\
&= -2\kappa[n(t) - \bar{n}] \qquad (6.18)
\end{aligned}
$$

となる。これは、(4.63) と同一である。また、(6.13),(6.17) より、

$$
c_1 = \hbar(-\kappa - \Sigma) = -\hbar\kappa(1 + 2\bar{n}), \quad c_2 = 2\hbar(\kappa + \Sigma) = 2\hbar\kappa(1 + \bar{n}) \qquad (6.19)
$$

である。これと (6.5),(6.9) より、

$$
\begin{aligned}
\hat{H} &= \hat{H}_S + i\hat{\Pi}, \qquad (6.20) \\
\hat{H}_S &= \hbar(a^{\dagger}a - \tilde{a}^{\dagger}\tilde{a}), \qquad (6.21) \\
\hat{\Pi} &= -\hbar\kappa[(1 + 2\bar{n})(a^{\dagger}a + \tilde{a}^{\dagger}\tilde{a}) - 2(1 + \bar{n})a\tilde{a} - 2\bar{n}a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}] - 2\hbar\kappa\bar{n} \qquad (6.22)
\end{aligned}
$$

を得る。この $\hat{\Pi}$ は (3.28) と一致する。

今、ダブレット記法

$$
\begin{aligned}
a^{\mu=1} = a \quad &, \quad a^{\mu=2} = \tilde{a}^{\dagger}, \qquad (6.23) \\
\bar{a}^{\mu=1} = a^{\dagger} \quad &, \quad \bar{a}^{\mu=2} = -\tilde{a} \qquad (6.24)
\end{aligned}
$$

を導入する。交換関係は、

$$[a^\mu, \bar{a}^\nu] = \delta^{\mu\nu} \tag{6.25}$$

で、これ以外は 0 である。(6.22) は、

$$\hat{H} = \hbar\omega\bar{a}^\mu a^\mu + \hbar\omega + i\hat{\Pi}, \quad \hat{\Pi} = -\hbar\kappa\bar{a}^\mu A^{\mu\nu}a^\nu + \hbar\kappa, \tag{6.26}$$

$$A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1+2\bar{n} & -2\bar{n} \\ 2(1+\bar{n}) & -(1+2\bar{n}) \end{pmatrix} \tag{6.27}$$

とかける。半自由粒子に対するハイゼンベルグ方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a(t)^\mu &= \frac{i}{\hbar}[\hat{H}(t), a(t)^\mu] \\ &= i[\omega\bar{a}(t)^\nu a(t)^\nu + \omega - i\kappa\bar{a}(t)^\lambda A^{\lambda\nu}a(t)^\nu + i\kappa, a(t)^\mu] \\ &= -i\omega\delta^{\mu\nu}a(t)^\nu - \kappa\delta^{\mu\lambda}A^{\lambda\nu}a(t)^\nu \\ &= (-i\omega\delta^{\mu\nu} - \kappa A^{\mu\nu})a(t)^\nu, \end{aligned} \tag{6.28}$$

$$\frac{d}{dt}\bar{a}(t)^\mu = \bar{a}(t)^\nu(i\omega\delta^{\nu\mu} + \kappa A^{\nu\mu}) \tag{6.29}$$

となる。

6.2 散逸の自発的発現

今、

$$\gamma(t)^\mu = \mathcal{B}(t)^{\mu\nu}a(t)^\nu, \quad \bar{\gamma}(t)^\mu = \bar{a}(t)^\nu\mathcal{B}^{-1}(t)^{\nu\mu}, \tag{6.30}$$

$$\mathcal{B}(t)^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1+n(t) & -n(t) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.31}$$

によって、

$$\gamma(t) = \gamma(t)^{\mu=1} \quad , \quad \tilde{\gamma}^{♀}(t) = \gamma(t)^{\mu=2}, \tag{6.32}$$

$$\gamma^{♀}(t) = \bar{\gamma}(t)^{\mu=1} \quad , \quad -\tilde{\gamma}(t) = \bar{\gamma}(t)^{\mu=2} \tag{6.33}$$

を導入する。ただし、$n(t)$ は、(6.18) を満たすものとする。$\gamma(t)^\mu, \bar{\gamma}(t)^\mu$ は、交換関係

$$[\gamma(t)^\mu, \bar{\gamma}(t)^\nu] = \delta^{\mu\nu} \tag{6.34}$$

を満たし、これ以外は 0 である。$\gamma^{♀}(t)$ は、

$$\begin{aligned} \langle 1|\gamma^{♀}(t) &= \langle 1|e^{i\hat{H}t}(a^\dagger - \tilde{a})e^{-i\hat{H}t} \\ &= \langle 1|(a^\dagger - \tilde{a})e^{-i\hat{H}t} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{6.35}$$

$$\langle 1|\tilde{\gamma}^{♀}(t) = 0 \tag{6.36}$$

を満たす。

$\gamma(t)^\mu$ の運動方程式は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\gamma(t)^\mu &= \frac{d\mathcal{B}(t)^{\mu\nu}}{dt}a^\nu(t) + \mathcal{B}(t)^{\mu\nu}\frac{da^\nu(t)}{dt} \\ &= [\frac{d\mathcal{B}(t)}{dt}\mathcal{B}^{-1}(t)]^{\mu\nu}\gamma(t)^\nu + [\mathcal{B}(t)(-i\omega 1_2 - \kappa A)\mathcal{B}^{-1}(t)]^{\mu\nu}\gamma(t)^\nu \end{aligned} \tag{6.37}$$

である。第 2 等号で、(6.28) を用いた。(6.31) より、

$$\frac{d\mathcal{B}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{dn(t)}{dt}, \tag{6.38}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{B}(t)}{dt}\mathcal{B}^{-1}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{dn(t)}{dt}\begin{pmatrix} 1 & n(t) \\ 1 & 1+n(t) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{dn(t)}{dt}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2\kappa[n(t)-\bar{n}]\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.39}$$

であり、(6.27) より、

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(t)A\mathcal{B}^{-1}(t) &= \begin{pmatrix} 1+n(t) & -n(t) \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+2\bar{n} & -2\bar{n} \\ 2(1+\bar{n}) & -(1+2\bar{n}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n(t) \\ 1 & 1+n(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+n(t) & -n(t) \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n(t)-2\bar{n} \\ 1 & n(t)-2\bar{n}-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2[n(t)-\bar{n}] \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \tau_3 + 2[n(t)-\bar{n}]\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.40}$$

を得る。ただし、

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.41}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\gamma(t)^\mu &= 2\kappa[n(t)-\bar{n}]\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu}\gamma(t)^\nu + \Big[-i\omega\delta^{\mu\nu} - \kappa\tau_3^{\mu\nu} - 2\kappa[n(t)-\bar{n}]\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu}\Big]\gamma(t)^\nu \\ &= (-\omega\delta^{\mu\nu} - \kappa\tau_3^{\mu\nu})\gamma(t)^\nu \end{aligned} \tag{6.42}$$

となる。これを解いて、

$$\begin{aligned}\gamma(t)^\mu &= [\exp(-i\omega 1_2 - \kappa\tau_3)t]^{\mu\nu}\gamma(0)^\nu \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\omega t-\kappa t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t+\kappa t} \end{pmatrix}^{\mu\nu}\gamma(0)^\nu, \end{aligned} \tag{6.43}$$

$$\gamma(0)^{\nu=1} = (1+n)a - n\tilde{a}^\dagger, \quad n = \langle 1|a^\dagger a|0\rangle, \tag{6.44}$$

$$\gamma(0)^{\nu=2} = \tilde{a}^\dagger - a \tag{6.45}$$

を得る。
　今、初期条件として、(3.23) 即ち、

$$a|0\rangle = f\tilde{a}^{\dagger}|0\rangle \tag{6.46}$$

を仮定する。これより、

$$\langle 1|a\tilde{a}|0\rangle = \langle 1|afa^{\dagger}|0\rangle = f[\langle 1|a^{\dagger}a|0\rangle + \langle 1|0\rangle] = f(n+1) \tag{6.47}$$

を得るが、左辺は、

$$\langle 1|a\tilde{a}|0\rangle = \langle 1|\tilde{a}a|0\rangle = \langle 1|a^{\dagger}a|0\rangle = n \tag{6.48}$$

であるから、

$$\begin{aligned} n &= f(n+1), \\ f &= \frac{n}{n+1} \end{aligned} \tag{6.49}$$

これを (6.46) に代入して、

$$(1+n)a|0\rangle = n\tilde{a}^{\dagger}|0\rangle$$

を得る。これは、

$$[(1+n)a - n\tilde{a}^{\dagger}]|0\rangle = \gamma(0)|0\rangle = 0 \tag{6.50}$$

を意味する。(6.43) より、

$$\gamma(t)|0\rangle = e^{-i\omega t-\kappa t}\gamma(0)|0\rangle = 0 \tag{6.51}$$

を得る。
　今、

$$\gamma_t^{\mu} = e^{-i\hat{H}t}\gamma(t)^{\mu}e^{i\hat{H}t}, \quad \bar{\gamma}_t^{\mu} = e^{-i\hat{H}t}\bar{\gamma}(t)^{\mu}e^{i\hat{H}t} \tag{6.52}$$

つまり、

$$\gamma_t^{\mu} = \mathcal{B}(t)^{\mu\nu}a^{\nu}, \quad \bar{\gamma}_t^{\mu} = \bar{a}^{\nu}\mathcal{B}^{-1}(t)^{\nu\mu}, \tag{6.53}$$

$$\mathcal{B}(t)^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1+n(t) & -n(t) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.54}$$

によって、

$$\gamma_t = \gamma_t^{\mu=1} \quad , \quad \tilde{\gamma}^{\mathring{\dagger}} = \gamma_t^{\mu=2}, \tag{6.55}$$

$$\gamma^{\mathring{\dagger}} = \bar{\gamma}_t^{\mu=1} \quad , \quad -\tilde{\gamma}_t = \bar{\gamma}_t^{\mu=2} \tag{6.56}$$

を導入する。$\gamma^{\mathring{\dagger}} = a^{\dagger} - \tilde{a}$ とそのチルダ共役は時間によらない。(6.51) と (6.52) より、初期条件が (6.46) のとき、

$$\gamma_t|0(t)\rangle = 0 \tag{6.57}$$

となる。また、$\hat{H}$ は、$\gamma_t^\mu, \bar{\gamma}_t^\mu$ によって、次のように書ける：

$$
\begin{aligned}
\hat{H} &= \hbar\omega\bar{a}^\mu a^\mu + \hbar\omega + i\hat{\Pi} \\
&= \hbar\omega\bar{\gamma}_t^\mu \gamma_t^\mu + \hbar\omega + i\hat{\Pi} \\
&= \hbar\omega(\gamma^{\text{♀}}\gamma_t - \tilde{\gamma}^{\text{♀}}\tilde{\gamma}_t) + i\hat{\Pi}, \qquad (6.58)\\
\hat{\Pi} &= -\hbar\kappa\bar{a}^\mu A^{\mu\nu} a^\nu + \hbar\kappa \\
&= -\hbar\kappa\bar{\gamma}_t^\mu [\mathcal{B}(t)A\mathcal{B}^{-1}(t)]^{\mu\nu}\gamma_t^\nu + \hbar\kappa \\
&= -\hbar\kappa\bar{\gamma}_t^\mu \Big[\tau_3^{\mu\nu} + 2(n(t)-\bar{n})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu}\Big]\gamma_t^\nu + \hbar\kappa \\
&= -\hbar\kappa(\gamma^{\text{♀}}\gamma_t + \tilde{\gamma}^{\text{♀}}\tilde{\gamma}_t + 2[n(t)-\bar{n}]\gamma^{\text{♀}}\tilde{\gamma}^{\text{♀}}). \qquad (6.59)
\end{aligned}
$$

これと (6.57) より、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|0(t)\rangle &= \frac{1}{i\hbar}\hat{H}|0(t)\rangle \\
&= -2\kappa[n(t)-\bar{n}]\gamma^{\text{♀}}\tilde{\gamma}^{\text{♀}}|0(t)\rangle \\
&= \frac{dn(t)}{dt}\gamma^{\text{♀}}\tilde{\gamma}^{\text{♀}}|0(t)\rangle \qquad (6.60)
\end{aligned}
$$

を得る。これを解くと、

$$
\begin{aligned}
|0(t)\rangle &= \exp\Big[\int_0^t dt' \frac{dn(t')}{dt'}\gamma^{\text{♀}}\tilde{\gamma}^{\text{♀}}\Big]|0\rangle \\
&= \exp\Big[[n(t)-n]\gamma^{\text{♀}}\tilde{\gamma}^{\text{♀}}\Big]|0\rangle \qquad (6.61)
\end{aligned}
$$

となる [26)]。この表式により、「不安定真空の時間発展がサーマル・ペア $\gamma^{\text{♀}}\tilde{\gamma}^{\text{♀}}$ の真空への凝縮により実現される」と解釈できる。この表式は、散逸の自発的発現 (spontanious creation of dissipation) という機構の存在を予感させる。

6.3 覚え書き

(3.28) または (6.22) は、

$$
\begin{aligned}
\hat{\Pi} &= -\kappa[(1+2\bar{n})(a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}) - 2(1+\bar{n})a\tilde{a} - 2\bar{n}a^\dagger\tilde{a}^\dagger] - 2\kappa\bar{n} \\
&= \kappa[-(1+2\bar{n})(aa^\dagger + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}) + 2(1+\bar{n})a\tilde{a} + 2\bar{n}a^\dagger\tilde{a}^\dagger] + \kappa \qquad (6.62)
\end{aligned}
$$

であった。今、

$$
S_+ \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{a}^\dagger a^\dagger, \quad S_- \stackrel{\text{def}}{=} a\tilde{a}, \quad S_z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(aa^\dagger + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}) \qquad (6.63)
$$

26) 半自由場で、初期条件が (6.46) のときは、これが成り立つ。

とすると、これらの交換関係は

$$\begin{aligned}
[S_-, S_+] &= [a\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger a^\dagger] \\
&= [a\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger]a^\dagger + \tilde{a}^\dagger[a\tilde{a}, a^\dagger] \\
&= aa^\dagger + \tilde{a}^\dagger\tilde{a} \\
&= 2S_z, \qquad (6.64) \\
[S_-, S_z] &= \frac{1}{2}[a\tilde{a}, aa^\dagger + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}] \\
&= \frac{1}{2}(a[a, a^\dagger]\tilde{a} + a[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger]\tilde{a}) \\
&= \frac{1}{2}(a\tilde{a} + a\tilde{a}) \\
&= S_-, \qquad (6.65) \\
[S_+, S_z] &= -S_+ \qquad (6.66)
\end{aligned}$$

である。最後の式は，2 つ目の式の † をとって，$S_-^\dagger = S_+$，$S_z^\dagger = S_z$ を用いれば得られる。(6.62) は、

$$\hat{\Pi} = \kappa[-2(1+2\bar{n})S_z + 2(1+\bar{n})S_- + 2\bar{n}S_+] + \kappa \qquad (6.67)$$

となる。今、

$$S_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger\tilde{a} \qquad (6.68)$$

とすると、半自由粒子の $\hat{H}$ は、

$$\hat{H} = \omega S_0 + i\kappa[-2(1+2\bar{n})S_z + 2(1+\bar{n})S_- + 2\bar{n}S_+] + i\kappa \qquad (6.69)$$

とかける。S_0 は $S_\pm, S_z$ と可換である。実際、

$$\tilde{S}_i = S_a \quad (i = \pm, z, 0) \qquad (6.70)$$

より [27] 、

$$[S_0, S_i] = [a^\dagger a, S_i] - [a^\dagger a, S_i]^\sim \qquad (6.71)$$

であり、

$$[a^\dagger a, S_+] = a^\dagger\tilde{a}^\dagger, \quad [a^\dagger a, S_+] = -a\tilde{a}, \quad [a^\dagger a, S_z] = 0 \qquad (6.72)$$

なので、

$$[S_0, S_i] = 0 \qquad (6.73)$$

---

27)

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_z &= \frac{1}{2}(a^\dagger a + \tilde{a}\tilde{a}^\dagger) \\
&= \frac{1}{2}([aa^\dagger + 1] + [\tilde{a}^\dagger\tilde{a} - 1]) \\
&= S_z
\end{aligned}$$

となる。よって、時間発展の演算子は、

$$
\begin{aligned}
e^{-i\hat{H}t} &= e^{-i\omega S_0}e^{\hat{\Pi}t} \\
&= e^{-i\omega S_0 t}e^{\kappa t[-2(1+2\bar{n})S_z+2(1+\bar{n})S_-+2\bar{n}S_+]}e^{\kappa t} \qquad (6.74)
\end{aligned}
$$

となる。$e^{-i\omega S_0 t}$ という因子は何番目に来ても良い。

後で示すように、

$$
U(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{x(A_zS_z+A_-S_-+A_+S_+)} \qquad (6.75)
$$

という演算子は、

$$
U(x) = e^{f_+(x;A_z,A_-,A_+)S_+}e^{f_z(x;A_z,A_-,A_+)S_z}e^{f_-(x;A_z,A_-,A_+)S_-} \qquad (6.76)
$$

の形に書き換えるられる。よって、(6.74) は、

$$
e^{-i\hat{H}t} = e^{-i\omega S_0 t}e^{\kappa t}e^{f_+(t)S_+}e^{f_z(t)S_z}e^{f_-(t)S_-} \qquad (6.77)
$$

とかける。もしも、チルダ粒子を超演算子と思うなら、

$$
\begin{aligned}
S_+\bullet &= a^\dagger\bullet a, &(6.78)\\
S_-\bullet &= a\bullet a^\dagger, &(6.79)\\
S_z\bullet &= \frac{1}{2}(aa^\dagger\bullet+\bullet a^\dagger a) &(6.80)
\end{aligned}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
e^{f_+(t)S_+}\bullet &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_+^n(t)}{n!}(a^\dagger)^n\bullet a^n, &(6.81)\\
e^{f_-(t)S_-}\bullet &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{f_-^m(t)}{m!}a^m\bullet(a^\dagger)^m, &(6.82)\\
e^{f_z(t)S_z}\bullet &= e^{f_z(t)aa^\dagger}\bullet e^{f_z(t)a^\dagger a} &(6.83)
\end{aligned}
$$

となる。また、

$$
e^{-i\hat{H}_S t}\bullet = e^{-iH_S t}\bullet e^{iH_S t}, \quad \hat{H}_S = H_S - \tilde{H}_S = \omega S_0 \qquad (6.84)
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
\rho(t) &= e^{-i\hat{H}t}\rho(0) \\
&= e^{\kappa t}e^{iH_S t}e^{f_+(t)S_+}e^{f_z(t)aa^\dagger}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f_-^m(t)}{m!}a^m\rho(0)(a^\dagger)^m e^{f_z(t)a^\dagger a} \\
&= e^{\kappa t}e^{iH_S t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_+^n(t)}{n!}(a^\dagger)^n e^{f_z(t)aa^\dagger}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f_-^m(t)}{m!}a^m\rho(0)(a^\dagger)^m e^{f_z(t)a^\dagger a}a^n \qquad (6.85)
\end{aligned}
$$

となる。今、

$$
\langle A\rangle_t = \mathrm{Tr}[\rho(t)A] \qquad (6.86)
$$

とかくと、(6.85) より、

$$
\begin{aligned}
\langle A\rangle_t &= e^{\kappa t}\mathrm{Tr}[e^{\kappa t}e^{iH_St}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{f_+^n(t)}{n!}\frac{f_-^m(t)}{m!}(a^\dagger)^n e^{f_z(t)aa^\dagger}a^m\rho(0)(a^\dagger)^m e^{f_z(t)a^\dagger a}a^n e^{-iH_St}A] \\
&= \mathrm{Tr}[\rho(0)e^{\kappa t}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{f_+^n(t)}{n!}\frac{f_-^m(t)}{m!}(a^\dagger)^m e^{f_z(t)a^\dagger a}a^n e^{-iH_St}Ae^{iH_St}(a^\dagger)^n e^{f_z(t)aa^\dagger}a^m] \\
&= \mathrm{Tr}[\rho(0)\hat{T}(t)A], \\
\hat{T}(t)\bullet &\stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{\kappa t}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{f_+^n(t)}{n!}\frac{f_-^m(t)}{m!}(a^\dagger)^m e^{f_z(t)a^\dagger a}a^n e^{-iH_St}\bullet e^{iH_St}(a^\dagger)^n e^{f_z(t)aa^\dagger}a^m \\
&= e^{\kappa t}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{f_+^n(t)}{n!}\frac{f_-^m(t)}{m!}(a^\dagger)^m e^{f_z(t)a^\dagger a}a^n[e^{-i\hat{H}_St}\bullet](a^\dagger)^n e^{f_z(t)aa^\dagger}a^m \\
&= e^{\kappa t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f_-^m(t)}{m!}(a^\dagger)^m e^{f_z(t)a^\dagger a}[e^{f_+(t)S_-}e^{-i\hat{H}_St}\bullet]e^{f_z(t)aa^\dagger}a^m \\
&= e^{\kappa t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f_-^m(t)}{m!}(a^\dagger)^m[e^{f_z(t)S_z}e^{f_+(t)S_-}e^{-i\hat{H}_St}\bullet]a^m \\
&= e^{\kappa t}e^{f_-(t)S_+}e^{f_z(t)S_z}e^{f_+(t)S_-}e^{i\hat{H}_St}\bullet \qquad (6.87) \\
&= [e^{-i\hat{H}t}]^\dagger\bullet \\
&= e^{i\hat{H}^\dagger t}\bullet \qquad (6.88)
\end{aligned}
$$

となる。$\hat{T}(t)A$ は、いわば超演算子法でのハイゼンベルグ描像の演算子である。これの運動方程式は、

$$\frac{d}{dt}\hat{T}(t)A = i\hat{T}(t)\hat{H}^\dagger A \qquad (6.89)$$

である。

$\rho^{1/2}(t)$ について考える。散逸がない場合は、(2.4) のように、$\rho^{1/2}(t)$ の時間発展方程式を求めるのは容易だった。それは、$\rho(t)$ が、

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t), \quad U^\dagger(t) = U^{-1}(t) \qquad (6.90)$$

の形でかけたからである。散逸がある場合、(6.85) からも分かるように、これは成り立たない。

半自由粒子のように $\hat{\Pi}$ と $\hat{H}_S$ が可換の場合は、

$$e^{-i\hat{H}t} = e^{-i\hat{H}_St}e^{\hat{\Pi}t} \qquad (6.91)$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
|0^{(0)}(t)\rangle &= e^{-i\hat{H}_St}|(0)\rangle, \qquad (6.92) \\
A^{(0)}(t) &= e^{-\hat{\Pi}t}Ae^{\hat{\Pi}t} \qquad (6.93)
\end{aligned}
$$

とすれば、

$$
\begin{aligned}
\langle 1|A^{(0)}(t)|0^{(0)}(t)\rangle &= \langle 1|e^{-\hat{\Pi}t}Ae^{\hat{\Pi}t}|0^{(0)}(t)\rangle \\
&= \langle 1|Ae^{\hat{\Pi}t}e^{-i\hat{H}_St}|0\rangle \\
&= \langle 1|A|0(t)\rangle \qquad (6.94)
\end{aligned}
$$

となる。つまり、真空の時間発展は、散逸がない場合と同じで、演算子の方は $\hat{\Pi}$ により変化する、という描像が可能である。逆に、

$$|0^{(1)}(t)\rangle \;=\; e^{\hat{\Pi}t}|0\rangle, \tag{6.95}$$

$$A^{(1)}(t) \;=\; e^{i\hat{H}_S t}Ae^{-i\hat{H}_S t} \tag{6.96}$$

としても、

$$\langle 1|A^{(1)}(t)|0^{(1)}(t)\rangle \;=\; \langle 1|A|0(t)\rangle \tag{6.97}$$

である。

6.4　$su(1,1)$ の公式

(6.76) を示そう。

$$e^{x(A_zS_z+A_-S_-+A_+S_+)} \;=\; U(x) \equiv e^{f_+(x)S_+}F(x), \tag{6.98}$$

$$F(0) \;=\; 1\,,\quad f_+(0)=0 \tag{6.99}$$

とおく。これを微分して、

$$(A_zS_z+A_-S_-+A_+S_+)e^{f_+(x)S_+}F(x) \;=\; f_+'(x)S_+F(x)+e^{f_+(x)S_+}F'(x)$$

$F'(x)$ について解いて、

$$F'(x) \;=\; [A_+-f_+'(x)]S_+F(x)+e^{-f_+(x)S_+}(A_zS_z+A_-S_-)e^{f_+(x)S_+}F(x) \tag{6.100}$$

を得る。今、

$$t_i(x) \;\stackrel{\mathrm{def}}{=}\; e^{-f_+(x)S_+}S_ie^{f_+(x)S_+} \tag{6.101}$$

とすると、

$$\begin{aligned} t_-'(x) \;&=\; -e^{-f_+(x)S_+}f_+'(x)S_+S_-e^{f_+(x)S_+}+e^{-f_+(x)S_+}S_-f_+'(x)S_+e^{f_+(x)S_+} \\ &=\; f_+'(x)e^{-f_+(x)S_+}[S_-,S_+]e^{f_+(x)S_+} \\ &=\; f_+'(x)e^{-f_+(x)S_+}2S_ze^{f_+(x)S_+} \\ &\equiv\; 2f_+'(x)t_z(x) \end{aligned} \tag{6.102}$$

である。ただし，第 3 等号で (6.64) を用いた。また，

$$\begin{aligned} t_z'(x) \;&=\; f_+'(x)e^{-f_+(x)S_+}[S_z,S_+]e^{f_+(x)S_+} \\ &=\; f_+'(x)e^{-f_+(x)S_+}S_+e^{f_+(x)S_+} \\ &=\; f_+'(x)S_+ \end{aligned} \tag{6.103}$$

である。第 2 等号で (6.66) を用いた。ところで，

$$t_-(0)=S_-\,,\quad t_z(0)=S_z \tag{6.104}$$

である。(6.103) をこの初期条件の下で解くと，

$$t_z(x)=S_z+f_+(x)S_+ \tag{6.105}$$

となる。これを (6.102) に代入して

$$\begin{aligned} t'_-(x) &= 2f'(x)[S_z + f_+(x)S_+] \\ &= \frac{d}{dx}[2f_+(x)S_z + f_+^2(x)S_+] \end{aligned} \tag{6.106}$$

を得る。これを初期条件 (6.104) の下で解いて,

$$t_-(x) = S_- + 2f_+(x)S_z + f_+^2(x)S_+ \tag{6.107}$$

を得る。(6.100) は、

$$\begin{aligned} F'(x) &= [A_+ - f'_+(x)]S_+F(x) + [A_zS_z + A_zf_+(x)S_+ + A_-S_- + 2A_-f_+(x)S_z + A_-f_+^2(x)S_+]F(x) \\ &= [A_+ - f'_+(x) + A_zf_+(x) + A_-f_+^2(x)]S_+F(x) + [A_zS_z + A_-S_- + 2A_-f_+(x)S_z]F(x) \end{aligned} \tag{6.108}$$

となる。今、

$$A_+ - f'_+(x) + A_zf_+(x) + A_-f_+^2(x) = 0 \tag{6.109}$$

とすると、(6.108) は、

$$F'(x) = [A_zS_z + A_-S_- + 2A_-f_+(x)S_z]F(x) \tag{6.110}$$

となる。(6.109) を (6.99) の初期条件の下に解く。

$$\begin{aligned} \frac{1}{f'_+(x)} = \frac{dx}{df_+} &= \frac{1}{A_+ + A_zf_+(x) + A_-f_+^2(x)}, \\ x &= \int_0^{f_+(x)} \frac{df}{A_+ + A_zf + A_-f^2}. \end{aligned} \tag{6.111}$$

今、

$$A_+ + A_zf + A_-f^2 = A_-(f-\alpha)(f-\beta) \quad , \tag{6.112}$$

$$\alpha, \beta = \frac{-A_z \pm \sqrt{A_z^2 - 4A_-A_+}}{2A_-} \tag{6.113}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \int_0^{f_+(x)} \frac{df}{A_+ + A_zf + A_-f^2} &= \frac{1}{A_-(\alpha-\beta)} \int_0^{f_+(x)} df \left(\frac{1}{f-\alpha} - \frac{1}{f-\beta}\right) \\ &= \frac{1}{A_-(\alpha-\beta)} \left(\ln\frac{f_+(x)-\alpha}{-\alpha} - \ln\frac{f_+(x)-\beta}{-\beta}\right) \\ &= \frac{1}{A_-(\alpha-\beta)} \ln[\frac{f_+(x)-\alpha}{f_+(x)-\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha}]. \end{aligned} \tag{6.114}$$

これと (6.111) より、

$$\begin{aligned} e^{xA_-(\alpha-\beta)} &= \frac{f_+(x)-\alpha}{f_+(x)-\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha}, \\ f_+(x) &= \beta\frac{e^{xA_-(\alpha-\beta)} - 1}{e^{xA_-(\alpha-\beta)} - \beta/\alpha} \end{aligned} \tag{6.115}$$

を得る。これは、次のようにも書ける：

$$
\begin{aligned}
f_+(x) &= \beta \frac{e^{xA_-(\alpha-\beta)/2} - e^{-xA_-(\alpha-\beta)/2}}{e^{xA_-(\alpha-\beta)/2} - \beta/\alpha e^{-xA_-(\alpha-\beta)/2}} \\
&= \frac{2\alpha\beta}{\alpha-\beta} \frac{\sinh \frac{A_-(\alpha-\beta)x}{2}}{\cosh \frac{A_-(\alpha-\beta)x}{2} + \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\sinh \frac{A_-(\alpha-\beta)x}{2}} \\
&= \frac{A_-\alpha\beta}{\phi} \frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) + \frac{A_-(\alpha+\beta)}{2\phi}\sinh(\phi x)} \\
&= \frac{A_+}{\phi} \frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)}, \qquad (6.116)
\end{aligned}
$$

$$
\phi \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{A_-(\alpha-\beta)}{2} = \sqrt{A_z^2/4 - A_-A_+}. \qquad (6.117)
$$

今、

$$
\begin{aligned}
F(x) &= e^{f_z(x)S_z} G(x), \qquad (6.118) \\
G(0) &= 1, \quad f_z(0) = 0 \qquad (6.119)
\end{aligned}
$$

とおく。これを微分し,(6.110) を代入すると、

$$
[A_zS_z + A_-S_- + 2A_-f_+(x)S_z]e^{f_z(x)S_z}G(x) = f_z'(x)S_ze^{f_z(x)S_z}G(x) + e^{f_z(x)S_z}G'(x)
$$

となり、これから、

$$
G'(x) = [A_z + 2A_-f_+(x) - f_z'(x)]S_zG(x) + A_-e^{-f_z(x)S_z}S_-e^{f_z(x)S_z}G(x) \qquad (6.120)
$$

を得る。ここで、

$$
u_-(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{-f_z(x)S_z}S_-e^{f_z(x)S_z} \qquad (6.121)
$$

を導入すると,

$$
\begin{aligned}
u_-'(x) &= f_z'(x)e^{-f_z(x)S_z}[S_-, S_z]e^{f_z(x)S_z} \\
&= f_z'(x)e^{-f_z(x)S_z}S_-e^{f_z(x)S_z} \\
&= f_z'(x)u_-(x) \qquad (6.122)
\end{aligned}
$$

である。ただし，第 2 等号で，(6.65) を用いた。これを初期条件

$$
u_-(0) = S_- \qquad (6.123)
$$

の下で解くと,

$$
u_-(x) = e^{f_z(x)}S_-
$$

すなわち、

$$
e^{-f_z(x)S_z}S_-e^{f_z(x)S_z} = e^{f_z(z)}S_- \qquad (6.124)
$$

を得る。(6.120) は、

$$
G'(x) = [A_z + 2A_-f_+(x) - f_z'(x)]S_zG(x) + A_-e^{f_z(z)}S_-G(x) \qquad (6.125)
$$

となる。今、

$$A_z + 2A_- f_+(x) - f_z'(x) = 0 \tag{6.126}$$

とすると、(6.125) は、

$$G'(x) \;=\; A_- e^{f_z(x)} S_- G(x) \tag{6.127}$$

となる。(6.126),(6.119),(6.116) より、

$$\begin{aligned}
f_z(x) \;&=\; A_z x + 2A_- \int_0^x dy\, f_+(y) \\
&=\; A_z x + \frac{1}{\phi}\int_0^x dy\, \frac{2A_-A_+ \sinh(\phi y)}{\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)} \\
&=\; \frac{1}{\phi}\int_0^x dy\, \Big[\phi A_z + \frac{2A_-A_+ \sinh(\phi y)}{\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)}\Big] \\
&=\; \frac{1}{\phi}\int_0^x dy\, \frac{2[A_-A_+ - A_z^2/4]\sinh(\phi y) + \phi A_z \cosh(\phi y)}{\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)} \\
&=\; \int_0^x dy\, \frac{-2\phi \sinh(\phi y) + A_z \cosh(\phi y)}{\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)} \\
&=\; -2\int_0^x dy\, \frac{1}{\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)}\frac{d}{dy}[\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)] \\
&=\; -2\ln[\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)] + 2\ln[\cosh(0) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(0)] \\
&=\; -2\ln[\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)]
\end{aligned} \tag{6.128}$$

となる。(6.127),(6.119) より、

$$G(x) \;=\; e^{f_-(x)S_-}, \tag{6.129}$$

$$f_-(x) \;=\; A_- \int_0^x dy\, e^{f_z(y)} \tag{6.130}$$

であり、(6.128) より、

$$f_-(x) \;=\; A_- \int_0^x \frac{dy}{[\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)]^2} \tag{6.131}$$

である。今、

$$u = e^{\phi y} \tag{6.132}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
dy \;&=\; \frac{du}{\phi u}, \\
\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y) \;&=\; \frac{2\phi - A_z}{4\phi}u + \frac{2\phi + A_z}{4\phi}u^{-1}
\end{aligned}$$

なので、

$$
\begin{aligned}
f_-(x) &= A_- \int_1^{u(x)} \frac{du}{\phi u} \frac{u^2}{[\frac{2\phi - A_z}{4\phi}u^2 + \frac{2\phi + A_z}{4\phi}]^2} \\
&= A_- \int_1^{u(x)} du\, \frac{16\phi u}{[(2\phi - A_z)u^2 + 2\phi + A_z]^2} \\
&= A_- \int_1^{u(x)} du\, \frac{8\phi}{2\phi - A_z} \frac{1}{[(2\phi - A_z)u^2 + 2\phi + A_z]^2} \frac{d}{dy}[(2\phi - A_z)u^2 + 2\phi + A_z] \\
&= -A_- \frac{8\phi}{2\phi - A_z} \frac{1}{(2\phi - A_z)u^2 + 2\phi + A_z}\Big|_1^{u(x)} \\
&= -A_- \frac{8\phi}{2\phi - A_z} \Big(\frac{1}{(2\phi - A_z)u^2(x) + 2\phi + A_z} - \frac{1}{4\phi} \Big) \\
&= -A_- \frac{8\phi}{2\phi - A_z} \frac{4\phi - (2\phi - A_z)u^2(x) - 2\phi - A_z}{[(2\phi - A_z)u^2(x) + 2\phi + A_z] \cdot 4\phi} \\
&= \frac{2A_-}{2\phi - A_z} \frac{(2\phi - A_z)u^2(x) - 2\phi + A_z}{(2\phi - A_z)u^2(x) + 2\phi + A_z} \\
&= \frac{2A_-}{2\phi - A_z} \frac{(2\phi - A_z)e^{\phi x} - (2\phi - A_z)e^{-\phi x}}{(2\phi - A_z)e^{\phi x} + (2\phi + A_z)e^{-\phi x}} \\
&= 2A_- \frac{\sinh(\phi x)}{2\phi \cosh(\phi x) - A_z \sinh(\phi x)} \\
&= \frac{A_-}{\phi} \frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)} \qquad (6.133)
\end{aligned}
$$

となる。まとめると、

$$
\begin{aligned}
e^{x(A_z S_z + A_- S_- + A_+ S_+)} &= e^{f_+(x)S_+} e^{f_z(x)S_z} e^{f_-(x)S_-}, && (6.134) \\
f_+(x) &= \frac{A_+}{\phi} \frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)}, && (6.135) \\
f_z(x) &= -2\ln[\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)], && (6.136) \\
f_-(x) &= \frac{A_-}{\phi} \frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)}, && (6.137) \\
\phi &= \sqrt{A_z^2/4 - A_- A_+} && (6.138)
\end{aligned}
$$

である。

(6.77) の $f_i(t)$ を求める。この場合、

$$
A_z = -2\kappa(1 + 2\bar{n}), \quad A_- = 2\kappa(1 + \bar{n}), \quad A_+ = 2\kappa\bar{n}, \quad x = t \qquad (6.139)
$$

とすればよい。このとき、

$$
\begin{aligned}
\phi &= \sqrt{A_z^2/4 - A_- A_+} \\
&= \kappa\sqrt{(1 + 2\bar{n})^2 - 4(1 + \bar{n})\bar{n}} \\
&= \kappa \qquad (6.140)
\end{aligned}
$$

であり、

$$
\begin{aligned}
f_+(t) &= 2\bar{n}\frac{\sinh(\kappa t)}{\cosh(\kappa t)+(1+2\bar{n})\sinh(\kappa t)}, && (6.141)\\
f_z(t) &= -2\ln[\cosh(\kappa t)+(1+2\bar{n})\sinh(\kappa t)], && (6.142)\\
f_-(t) &= 2(1+\bar{n})\frac{\sinh(\kappa t)}{\cosh(\kappa t)+(1+2\bar{n})\sinh(\kappa t)} && (6.143)
\end{aligned}
$$

となる。$\kappa t \gg 1$ で、

$$
f_+(t) \to \frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}, \quad f_-(t) \to 1, \quad f_z(t) \to -2\kappa t - 2\ln[1+\bar{n}] \quad (\kappa t \gg 1) \tag{6.144}
$$

となる。また、$\kappa t \ll 1$ で、

$$
f_+(t) \to 2\bar{n}\kappa t, \quad f_-(t) \to 2(1+\bar{n})\kappa t, \quad f_z(t) \to -2(1+2\bar{n})\kappa t \quad (\kappa t \ll 1) \tag{6.145}
$$

である。

6.5 状態の時間発展

初期状態として、

$$
|0\rangle = \sum_{n,m=0}^{\infty} p_{nm}|n,m\rangle \tag{6.146}
$$

を考える。ここで、$|n,m\rangle$ は $|n\rangle$ を個数状態として

$$
|n,m\rangle = |n\rangle \otimes |m\rangle^{\sim} \tag{6.147}
$$

で与えられる。(6.77) より、

$$
e^{-i\hat{H}t}|0\rangle = e^{-i\omega S_0 t}e^{\hat{\Pi}t}|0\rangle = e^{-i\omega S_0 t}e^{\kappa t}e^{f_+(t)S_+}e^{f_z(t)S_z}e^{f_-(t)S_-}|0\rangle \tag{6.148}
$$

である。ここで、

$$
\begin{aligned}
e^{f_-(t)S_-}|n,m\rangle &= \sum_{n,m=0}^{\infty} p_{nm}e^{f_-(t)a\tilde{a}}|n,m\rangle \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty} p_{nm}\sum_{l=0}^{\min(n,m)}\frac{f_-^l(t)}{l!}\sqrt{\frac{n!m!}{(n-l)!(m-l)!}}|n-l,m-l\rangle, && (6.149)\\
e^{f_z(t)S_z}e^{f_-(t)S_-}|n,m\rangle &= \sum_{l=0}^{\min(n,m)}\frac{f_-^l(t)}{l!}\sqrt{\frac{n!m!}{(n-l)!(m-l)!}}e^{f_z(t)\frac{aa^\dagger+\tilde{a}^\dagger\tilde{a}}{2}}|n-l,m-l\rangle \\
&= \sum_{l=0}^{\min(n,m)}\frac{f_-^l(t)}{l!}\sqrt{\frac{n!m!}{(n-l)!(m-l)!}}e^{f_z(t)\frac{n-l+m-l+1}{2}}|n-l,m-l\rangle && (6.150)
\end{aligned}
$$

であり、従って、

$$
\begin{aligned}
& e^{f_+(t)S_+}e^{f_z(t)S_z}e^{f_-(t)S_-}|n,m\rangle \\
&= e^{\frac{1}{2}f_z(t)}\sum_{l=0}^{\min(n,m)}\frac{f_-^l(t)}{l!}\sqrt{\frac{n!m!}{(n-l)!(m-l)!}}e^{f_z(t)[\frac{n+m}{2}-l]}e^{f_+(t)a^\dagger\tilde{a}^\dagger}|n-l,m-l\rangle \\
&= e^{\frac{1}{2}f_z(t)}\sum_{l=0}^{\min(n,m)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_-^l(t)f_+^k(t)}{l!k!}\frac{\sqrt{n!m!(n-l+k)!(m-l+k)!}}{(n-l)!(m-l)!}e^{f_z(t)[\frac{n+m}{2}-l]}|n-l+k,m-l+k\rangle
\end{aligned}
$$

(6.151)

となるので、

$$
\begin{aligned}
e^{\hat{\Pi}t}|0\rangle &= e^{\kappa t}e^{\frac{1}{2}f_z(t)}\sum_{n,m=0}^{\infty}p_{nm}\sum_{l=0}^{\min(n,m)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_-^l(t)f_+^k(t)}{l!k!} \\
&\times\frac{\sqrt{n!m!(n-l+k)!(m-l+k)!}}{(n-l)!(m-l)!}e^{f_z(t)[\frac{n+m}{2}-l]}|n-l+k,m-l+k\rangle \qquad (6.152)
\end{aligned}
$$

となる。

　今、

$$
p_{mn}(t) = \langle 1||n\rangle\langle m||0(t)\rangle \qquad (6.153)
$$

とする。(6.97),(6.152) より、

$$
\begin{aligned}
p_{mn}(t) &= \langle 1|e^{i\hat{H}_S t}|n\rangle\langle m|e^{-i\hat{H}_S t}|0^{(1)}(t)\rangle, \qquad (6.154) \\
|0^{(1)}(t)\rangle &= e^{\kappa t}e^{\frac{1}{2}f_z(t)}\sum_{s,u=0}^{\infty}p_{su}\sum_{l=0}^{\min(s,u)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_-^l(t)f_+^k(t)}{l!k!} \\
&\times\frac{\sqrt{s!u!(s-l+k)!(u-l+k)!}}{(s-l)!(u-l)!}e^{f_z(t)[\frac{s+u}{2}-l]}|s-l+k,u-l+k\rangle \qquad (6.155)
\end{aligned}
$$

であり、

$$
\begin{aligned}
e^{i\hat{H}_S t}|n\rangle\langle m|e^{-i\hat{H}_S t} &= e^{i\omega nt}|n\rangle\langle m|e^{-i\omega mt}, \qquad (6.156) \\
\langle 1||n\rangle\langle m||s-l+k,u-l+k\rangle &= \langle m|n-l+k\rangle\cdot\langle u-l+k|n\rangle \\
&= \delta_{m,s-l+k}\delta_{u-l+k,n} \qquad (6.157)
\end{aligned}
$$

なので、

$$
\begin{aligned}
p_{mn}(t) &= e^{i\omega(n-m)t}e^{\kappa t}e^{\frac{1}{2}f_z(t)}\sum_{s,u=0}^{\infty}p_{su}\sum_{l=0}^{\min(s,u)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_-^l(t)f_+^k(t)}{l!k!} \\
&\times\frac{\sqrt{s!u!m!n!}}{(s-l)!(u-l)!}e^{f_z(t)[\frac{s+u}{2}-l]}\delta_{m,s-l+k}\delta_{u-l+k,n} \qquad (6.158)
\end{aligned}
$$

となる。$\delta_{m,s-l+k}\delta_{u-l+k,n}$ より、

$$
k-l=n-u=m-s \qquad (6.159)
$$

である。よって、

$$
s=u+n-m, \quad u\geq n-m. \qquad (6.160)
$$

また、(6.159) より、

$$
k=l+n-u\geq 0. \qquad (6.161)
$$

今、

$$
\chi[A]=\begin{cases} 1 & A\text{ が真} \\ 0 & A\text{ が偽} \end{cases} \qquad (6.162)
$$

とすると、(6.158) は、

$$
\begin{aligned}
p_{mn}(t) &= e^{i\omega(n-m)t}e^{\kappa t}e^{\frac{1}{2}f_z(t)}\sum_{u=\max(0,n-m)}^{\infty}p_{u+n-m,u}\sum_{l=0}^{\min(u+n-m,u)}\frac{f_-^l(t)f_+^{l+n-u}(t)}{l!(l+n-u)!}\chi[l+n-u\geq 0]\\
&\quad\times\frac{\sqrt{(u+n-m)!u!m!n!}}{(u+n-m-l)!(u-l)!}e^{f_z(t)[\frac{n-m}{2}+u-l]} \qquad (6.163)
\end{aligned}
$$

となる。

今、$\kappa t\to\infty$ とする。(6.144) は、

$$
f_+(t)\to\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}},\quad f_-(t)\to 1,\quad f_z(t)\to -2\kappa t-2\ln[1+\bar{n}]\quad(\kappa t\gg 1) \qquad (6.164)
$$

であった。よって、

$$
e^{\kappa t}e^{\frac{1}{2}f_z(t)}\to\frac{1}{1+\bar{n}},\quad e^{f_z(t)[\frac{n-m}{2}+u-l]}\to\delta_{\frac{n-m}{2}+u-l,0} \qquad (6.165)
$$

となる。$p_{mn}=p_{mn}^*$ より、$n\geq m$ として良い。このとき、

$$
\max(0,n-m)=n-m,\quad \min(u+n-m,u)=u \qquad (6.166)
$$

となる。また、(6.165) の第 2 式より、

$$
l=u+\frac{n-m}{2} \qquad (6.167)
$$

だが、これは、

$$
n=m \qquad (6.168)
$$

でないと $l\leq\min(u+n-m,u)=u$ と両立しない。よって、

$$
\begin{aligned}
p_{mn}(\infty) &= \delta_{mn}p_{nn}(\infty), \qquad (6.169)\\
p_{nn}(\infty) &= \frac{1}{1+\bar{n}}\sum_{u=0}^{\infty}p_{u,u}\frac{f_-^u(\infty)f_+^{u+n-u}(\infty)}{u!(u+n-u)!}\chi[u+n-u\geq 0]\frac{\sqrt{(u+0)!u!n!n!}}{(u+0-u)!(u-u)!}\\
&= \frac{1}{1+\bar{n}}\sum_{u=0}^{\infty}p_{u,u}\frac{1^u[\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}]^n}{u!n!}u!n!\\
&= \frac{1}{1+\bar{n}}\Big[\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\Big]^n\sum_{u=0}^{\infty}p_{u,u}\\
&= \frac{1}{1+\bar{n}}\Big[\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\Big]^n \qquad (6.170)
\end{aligned}
$$

を得る。最後の等号で、

$$
\langle 1|0\rangle=\sum_{u=0}^{\infty}p_{u,u}=1 \qquad (6.171)
$$

を用いた。なお、

$$
\begin{aligned}
\langle 1|0(t=\infty)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty}p_{nn}(\infty)\\
&= \frac{1}{1+\bar{n}}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\Big]^n\\
&= \frac{1}{1+\bar{n}}\frac{1}{1-\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}}\\
&= 1 \qquad (6.172)
\end{aligned}
$$

である。ところで、

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\omega/T} - 1}, \quad \frac{1}{1+\bar{n}} = \frac{e^{\omega/T} - 1}{e^{\omega/T}} = 1 - e^{-\omega/T}, \quad \frac{\bar{n}}{1+\bar{n}} = e^{-\omega/T} \tag{6.173}$$

であるから、(6.169),(6.170) は、

$$\rho(\infty) = \frac{e^{-H_S/T}}{\mathrm{Tr}[e^{-H_S/T}]} \quad (H_S = \omega a^\dagger a) \tag{6.174}$$

つまり、熱平衡状態を意味する。

7　超演算子法による再考

7.1　§ 4.2 の再考

7.1.1　式変形の一般的手法

§ 4.2 を超演算子法で再考する。以下では、$\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger$ は、(3.29) を満たす超演算子とする。このとき、

$$\hat{H}_a \;=\; H_a - \tilde{H}_a \qquad (a = S, R, 0, 1, \text{無印}) \tag{7.1}$$

とする [28] と、

$$\hat{H}_a \bullet = [H_a, \bullet] \tag{7.2}$$

である。ただし、

$$H \;=\; H_0 + H_1, \tag{7.3}$$

$$H_0 \;=\; H_S + H_R \tag{7.4}$$

であった。演算子 $e^{i\hat{H}_a s}X$ を s で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}e^{i\hat{H}_a s}X \;&=\; -i\hat{H}_a e^{i\hat{H}_a s}X \\ &=\; i[H_a, e^{-i\hat{H}_a s}X] \end{aligned} \tag{7.5}$$

となる。これより、

$$e^{i\hat{H}_a s}X \;=\; e^{iH_a s}X^{-iH_a s} \tag{7.6}$$

を得る。特に、相互作用描像, ハイゼンベルグ描像の演算子は、

$$X^I(t) \;=\; e^{i\hat{H}_0 t}X\,, \quad X(t) = e^{i\hat{H}t}X \tag{7.7}$$

と書ける。今、超演算子

$$\hat{H}_a^I(t) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; e^{i\hat{H}_0 t}\hat{H}_a e^{-i\hat{H}_0 t}, \tag{7.8}$$

$$\hat{H}_a(t) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; e^{i\hat{H}t}\hat{H}_a e^{-i\hat{H}t} \tag{7.9}$$

を導入する。このとき、(7.7) より、

$$\begin{aligned} \hat{H}_a^I(t)X^I(t) \;&=\; e^{i\hat{H}_0 t}\hat{H}_a e^{-i\hat{H}_0 t}e^{i\hat{H}_0 t}X \\ &=\; e^{i\hat{H}_0 t}\hat{H}_a X \\ &=\; e^{i\hat{H}_0 t}[H_a, X] \\ &=\; [H_a^I(t), X^I(t)], \end{aligned} \tag{7.10}$$

$$\hat{H}_a(t)X(t) \;=\; [H_a(t), X(t)] \tag{7.11}$$

となる。

超演算子 $\hat{W}(t)$ を、

$$e^{i\hat{H}t} \;=\; \hat{W}(t)e^{i\hat{H}_0 t} \tag{7.12}$$

[28] § 4.2 では、H_1 は時間に陽に依存しても良い定式化をしたが、ここでは H_1 は時間に陽に依存しないとする。

で導入する[29)]。この式を微分して、

$$\begin{aligned}
\hat{W}(t)e^{i\hat{H}_0 t}i\hat{H} &= \frac{d\hat{W}(t)}{dt}e^{i\hat{H}_0 t} + \hat{W}(t)e^{i\hat{H}_0 t}i\hat{H}_0, \\
\hat{W}(t)e^{i\hat{H}_0 t}i\hat{H}_1 &= \frac{d\hat{W}(t)}{dt}e^{i\hat{H}_0 t}, \\
\frac{d\hat{W}(t)}{dt}e^{i\hat{H}_0 t} &= \hat{W}(t)e^{i\hat{H}_0 t}i\hat{H}_1 \\
&= \hat{W}(t)e^{i\hat{H}_0 t}i\hat{H}_1 e^{-i\hat{H}_0 t}e^{i\hat{H}_0 t} \\
&= \hat{W}(t)i\hat{H}_1^I(t)e^{i\hat{H}_0 t}, \\
\frac{d\hat{W}(t)}{dt} &= \hat{W}(t)i\hat{H}_1^I(t) \qquad (7.14)
\end{aligned}$$

を得る。

ここで、射影演算子 $\mathcal{P}$ を、

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}, \quad [\mathcal{P}(\bullet)]^\dagger = \mathcal{P}(\bullet^\dagger) \qquad (7.15)$$

を満たすものとして導入する。2 つ目の性質を $\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}$ とかく。また、

$$\mathcal{Q} = 1 - \mathcal{P} \qquad (7.16)$$

とすると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}^2 &= \mathcal{Q}, \qquad (7.17) \\
\mathcal{Q}^\dagger &= \mathcal{Q}, \qquad (7.18) \\
\mathcal{P}\mathcal{Q} &= \mathcal{Q}\mathcal{P} = 0 \qquad (7.19)
\end{aligned}$$

となる。今、

$$\hat{\xi}(t) \overset{\text{def}}{=} \hat{W}(t)\mathcal{Q}, \quad \hat{\eta}(t) \overset{\text{def}}{=} \hat{W}(t)\mathcal{P} \qquad (7.20)$$

とする。(7.14) は、

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{W}(t)}{dt} &= \hat{W}(t)(\mathcal{Q}+\mathcal{P})i\hat{H}_1^I(t) \\
&= \hat{\xi}(t)i\hat{H}_1^I(t) + \hat{\eta}(t)i\hat{H}_1^I(t) \qquad (7.21)
\end{aligned}$$

または、

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{W}(t)}{dt} &= \hat{W}(t)(\mathcal{Q}^2+\mathcal{P}^2)i\hat{H}_1^I(t) \\
&= \hat{\xi}(t)i\mathcal{Q}\hat{H}_1^I(t) + \hat{\eta}(t)i\mathcal{P}\hat{H}_1^I(t) \qquad (7.22)
\end{aligned}$$

とかける。これに右から $\mathcal{Q}$ を作用させて ($\mathcal{Q}$ にこの式の両辺を作用させて)、

$$\frac{d\hat{\xi}(t)}{dt} = \hat{\xi}(t)i\hat{H}^I_{1,QQ}(t) + \hat{\eta}(t)i\hat{H}^I_{1,PQ}(t) \qquad (7.23)$$

[29)] 両辺を X に作用させると、

$$\begin{aligned}
e^{i\hat{H}t}X &= \hat{W}(t)e^{i\hat{H}_0 t}X \\
X(t) &= \hat{W}(t)X^I(t) \qquad (7.13)
\end{aligned}$$

となる。

を得る。ただし、

$$\hat{H}^I_{1,QQ}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Q}\hat{H}^I_1(t)\mathcal{Q}, \quad \hat{H}^I_{1,PQ}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}\hat{H}^I_1(t)\mathcal{Q} \tag{7.24}$$

である。ここで、$\hat{U}_{QQ}(t)$ を、

$$\frac{d}{dt}\hat{U}_{QQ}(t) = -i\hat{H}^I_{1,QQ}(t)\hat{U}_{QQ}(t), \tag{7.25}$$

$$\hat{U}_{QQ}(0) = 1 \tag{7.26}$$

で導入する。(7.23) より、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\hat{\xi}(t)\hat{U}_{QQ}(t)] &= [\hat{\xi}(t)i\hat{H}^I_{1,QQ}(t) + \hat{\eta}(t)i\hat{H}^I_{1,PQ}(t)]\hat{U}_{QQ}(t) - \hat{\xi}(t)i\hat{H}^I_{1,QQ}(t)\hat{U}_{QQ}(t) \\ &= i\hat{\eta}(t)\hat{H}^I_{1,PQ}(t)\hat{U}_{QQ}(t)\end{aligned} \tag{7.27}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned}\hat{\xi}(t)\hat{U}_{QQ}(t) &= \mathcal{Q} + i\int_0^t ds\, \hat{\eta}(s)\hat{H}^I_{1,PQ}(s)\hat{U}_{QQ}(s), \\ \hat{\xi}(t) &= \mathcal{Q}\hat{U}^{-1}_{QQ}(t) + i\int_0^t ds\, \hat{\eta}(s)\hat{H}^I_{1,PQ}(s)\hat{U}_{QQ}(s)\hat{U}^{-1}_{QQ}(t)\end{aligned} \tag{7.28}$$

を得る。ただし、(7.20),(7.26) と (7.12) より、$\hat{W}(0) = 1$ であることを用いた。なお、$\hat{U}^{-1}_{QQ}(t)$ は、超演算子 $\hat{U}_{QQ}(t)$ の逆（逆超演算子）であり、

$$\hat{U}_{QQ}(t)\hat{U}^{-1}_{QQ}(t)\bullet = \bullet \tag{7.29}$$

を持たす。

今、$\hat{W}_{QQ}(t)$ を、

$$\hat{W}_{QQ}(t)\hat{U}_{QQ}(t)\bullet = \bullet \tag{7.30}$$

で導入する。(7.29) を微分して、

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d\hat{U}_{QQ}(t)}{dt}\hat{U}^{-1}_{QQ}(t)\bullet + \hat{U}_{QQ}(t)\frac{d\hat{U}^{-1}_{QQ}(t)}{dt}\bullet, \\ \frac{d\hat{U}^{-1}_{QQ}(t)}{dt}\bullet &= -\hat{W}_{QQ}(t)\frac{d\hat{U}_{QQ}(t)}{dt}\hat{U}^{-1}_{QQ}(t)\bullet \\ &= i\hat{W}_{QQ}(t)\hat{H}^I_{1,QQ}(t)\hat{U}_{QQ}(t)\hat{U}^{-1}_{QQ}(t)\bullet \\ &= i\hat{W}_{QQ}(t)\hat{H}^I_{1,QQ}(t)\bullet\end{aligned} \tag{7.31}$$

を得る。また、(7.29) を微分すると、

$$0 = \frac{d\hat{W}_{QQ}(t)}{dt}\hat{U}_{QQ}(t)\bullet + \hat{W}_{QQ}(t)\frac{d\hat{U}_{QQ}(t)}{dt}\bullet \tag{7.32}$$

となる。$\bullet = \hat{U}^{-1}_{QQ}(t)\bullet'$ とすると、

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d\hat{W}_{QQ}(t)}{dt}\bullet' + \hat{W}_{QQ}(t)\frac{d\hat{U}_{QQ}(t)}{dt}\hat{U}^{-1}_{QQ}(t)\bullet', \\ \frac{d\hat{W}_{QQ}(t)}{dt}\bullet' &= i\hat{W}_{QQ}(t)\hat{H}^I_{1,QQ}(t)\bullet'\end{aligned} \tag{7.33}$$

を得る。(7.31),(7.33) より、$\hat{U}_{QQ}^{-1}(t)$ と $\hat{W}_{QQ}(t)$ は同じ方程式を満たし、初期条件は、(7.26) より、

$$\hat{U}_{QQ}^{-1}(0) = 1 = \hat{W}_{QQ}(0) \tag{7.34}$$

と同じである。よって、$\hat{W}_{QQ}(t) = \hat{U}_{QQ}^{-1}(t)$ で、

$$\hat{U}_{QQ}^{-1}(t)\hat{U}_{QQ}(t)\bullet = \bullet \tag{7.35}$$

となる。今、

$$\hat{U}_{QQ}(s,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \hat{U}_{QQ}(s)\hat{U}_{QQ}^{-1}(t) \tag{7.36}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \hat{U}_{QQ}(t,t) &= 1, &(7.37)\\ \hat{U}_{QQ}(t,u)\hat{U}_{QQ}(u,s) &= \hat{U}_{QQ}(t)\hat{U}_{QQ}^{-1}(u)\hat{U}_{QQ}(u)\hat{U}_{QQ}^{-1}(s) \\ &= \hat{U}_{QQ}(t)\hat{U}_{QQ}^{-1}(s) \\ &= \hat{U}_{QQ}(t,s) &(7.38) \end{aligned}$$

となり、

$$\hat{U}_{QQ}(t,s)\hat{U}_{QQ}^{-1}(t,s) = 1 \tag{7.39}$$

で $\hat{U}_{QQ}^{-1}(t,s)$ を導入すると、(7.38),(7.37) より、

$$\hat{U}_{QQ}^{-1}(t,s) = \hat{U}_{QQ}(s,t) \tag{7.40}$$

を得る。これと、(7.36) より、

$$\hat{U}_{QQ}^{-1}(t,s) = \hat{U}_{QQ}(s)\hat{U}_{QQ}^{-1}(t)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \hat{U}_{QQ}^{-1}(t,s)\hat{U}_{QQ}(t,s) &= \hat{U}_{QQ}(s)\hat{U}_{QQ}^{-1}(t)\hat{U}_{QQ}(t,s) \\ &= \hat{U}_{QQ}(s)\hat{U}_{QQ}^{-1}(t)\hat{U}_{QQ}(t)\hat{U}_{QQ}^{-1}(s) \\ &= \hat{U}_{QQ}(s)\hat{U}_{QQ}^{-1}(s) \\ &= 1 &(7.41) \end{aligned}$$

となる。

上の記号で (7.28) は、

$$\hat{\xi}(t) = \mathcal{Q}\hat{U}_{QQ}(0,t) + i\int_0^t ds\,\hat{\eta}(s)\hat{H}_{1,PQ}^I(s)\hat{U}_{QQ}(s,t) \tag{7.42}$$

とかける。これを (7.21) に代入して、(7.20) の $\hat{\eta}(t)$ の定義を使うと、

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{W}(t)}{dt} &= \mathcal{Q}\hat{U}_{QQ}(0,t)i\hat{H}_1^I(t) - \int_0^t ds\,\hat{W}(s)\mathcal{P}\hat{H}_{1,PQ}^I(s)\hat{U}_{QQ}(s,t)\hat{H}_1^I(t) \\ &\quad +\hat{W}(t)\mathcal{P}i\hat{H}_1^I(t) &(7.43) \end{aligned}$$

を得る。

(7.13) より、

$$X(t) = \hat{W}(t)X^I(t) = \hat{W}(t)e^{i\hat{H}_0 t}X \tag{7.44}$$

である。これを微分し、(7.43) を代入すると、

$$\frac{d}{dt}X(t) = \frac{d\hat{W}(t)}{dt}e^{i\hat{H}_0 t}X + \hat{W}(t)i\hat{H}_0 e^{i\hat{H}_0 t}X \tag{7.45}$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{Q}\hat{U}_{QQ}(0,t)i\hat{H}_1^I(t)e^{i\hat{H}_0 t}X - \int_0^t ds\,\hat{W}(s)\mathcal{P}\hat{H}_{1,PQ}^I(s)\hat{U}_{QQ}(s,t)\hat{H}_1^I(t)e^{i\hat{H}_0 t}X \\ &\quad +\hat{W}(t)\mathcal{P}i\hat{H}_1^I(t)e^{i\hat{H}_0 t}X + \hat{W}(t)i\hat{H}_0 e^{i\hat{H}_0 t}X \\ &= \hat{W}(t)i[\hat{H}_0 + \mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)]e^{i\hat{H}_0 t}X + \mathcal{Q}\hat{U}_{QQ}(0,t)i\hat{H}_1^I(t)e^{i\hat{H}_0 t}X \\ &\quad - \int_0^t ds\,\hat{W}(s)\mathcal{P}\hat{H}_{1,PQ}^I(s)\hat{U}_{QQ}(s,t)\hat{H}_1^I(t)e^{i\hat{H}_0 t}X \end{aligned} \tag{7.46}$$

を得る。これは、TC 型の方程式である。

TCL 型の方程式は、次のように得られる。今、

$$\hat{W}(s,t) = \hat{W}^{-1}(s)\hat{W}(t) \tag{7.47}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \hat{W}(t,u)\hat{W}(u,s) &= \hat{W}^{-1}(t)\hat{W}(u)\hat{W}^{-1}(u)\hat{W}(s) \\ &= \hat{W}^{-1}(t)\hat{W}(s) \\ &= \hat{W}(t,s) \end{aligned} \tag{7.48}$$

となる。ただし、

$$\hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(t) = \hat{W}(t)\hat{W}^{-1}(t) = 1$$

である。(7.42) の第 2 項において、

$$\begin{aligned} \hat{\eta}(s) &= \hat{W}(0,s)\mathcal{P} \\ &= \hat{W}(0,t)\hat{W}(t,s)\mathcal{P} \\ &= \hat{W}(t)(\mathcal{Q}+\mathcal{P})\hat{W}(t,s)\mathcal{P} \\ &= (\hat{\xi}(t) + \hat{W}(t)\mathcal{P})\hat{W}(t,s)\mathcal{P} \end{aligned} \tag{7.49}$$

である。これより、(7.42) の第 2 項は、

$$\begin{aligned} & i\int_0^t ds\,\hat{\eta}(s)\hat{H}_{1,PQ}^I(s)\hat{U}_{QQ}(s,t) \\ &= i(\hat{\xi}(t) + \hat{W}(t)\mathcal{P})\int_0^t ds\,\hat{W}(t,s)\mathcal{P}\hat{H}_{1,PQ}^I(s)\hat{U}_{QQ}(s,t) \\ &= \hat{\xi}(t)\hat{S}(t) + \hat{W}(t)\mathcal{P}\hat{S}(t), \end{aligned} \tag{7.50}$$

$$\hat{S}(t) \stackrel{\text{def}}{=} i\int_0^t ds\,\hat{W}(t,s)\mathcal{P}\hat{H}_{1,PQ}^I(s)\hat{U}_{QQ}(s,t) \tag{7.51}$$

となる。よって、(7.42) は、

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}(t) &= \mathcal{Q}\hat{U}_{QQ}(0,t) + \hat{\xi}(t)\hat{S}(t) + \hat{W}(t)\mathcal{P}\hat{S}(t), \\
\hat{\xi}(t)[1-\hat{S}(t)] &= \mathcal{Q}\hat{U}_{QQ}(0,t) + \hat{W}(t)\mathcal{P}\hat{S}(t), \\
\hat{\xi}(t) &= \mathcal{Q}\hat{U}_{QQ}(0,t)[1-\hat{S}(t)]^{-1} + \hat{W}(t)\mathcal{P}\hat{S}(t)[1-\hat{S}(t)]^{-1}
\end{aligned} \tag{7.52}$$

となる。これを (7.21) に代入して、

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{W}(t)}{dt} &= \hat{\xi}(t)i\hat{H}_1^I(t) + \hat{\eta}(t)i\hat{H}_1^I(t) \\
&= \mathcal{Q}\hat{U}_{QQ}(0,t)[1-\hat{S}(t)]^{-1}i\hat{H}_1^I(t) + \hat{W}(t)\mathcal{P}\hat{S}(t)[1-\hat{S}(t)]^{-1}i\hat{H}_1^I(t) \\
&\quad +\hat{W}(t)\mathcal{P}i\hat{H}_1^I(t)
\end{aligned} \tag{7.53}$$

を得る。これを (7.45) に代入して、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}X(t) &= \mathcal{Q}\hat{U}_{QQ}(0,t)[1-\hat{S}(t)]^{-1}i\hat{H}_1^I(t)e^{i\hat{H}_0 t}X + \hat{W}(t)\mathcal{P}\hat{S}(t)[1-\hat{S}(t)]^{-1}i\hat{H}_1^I(t)e^{i\hat{H}_0 t}X \\
&\quad +\hat{W}(t)\mathcal{P}i\hat{H}_1^I(t)e^{i\hat{H}_0 t}X + \hat{W}(t)i\hat{H}_0 e^{i\hat{H}_0 t}X \\
&= \hat{W}(t)i[\hat{H}_0 + \mathcal{P}i\hat{H}_1^I(t)]e^{i\hat{H}_0 t}X + \mathcal{Q}\hat{U}_{QQ}(0,t)[1-\hat{S}(t)]^{-1}i\hat{H}_1^I(t)e^{i\hat{H}_0 t}X \\
&\quad +\hat{W}(t)\mathcal{P}\hat{S}(t)[1-\hat{S}(t)]^{-1}i\hat{H}_1^I(t)e^{i\hat{H}_0 t}X
\end{aligned} \tag{7.54}$$

を得る。これが TCL 型の方程式である。

7.1.2　確率化の処方

Langevin 方程式へ移行するために、柴田と橋爪が採用した処方箋は:
処方 1：射影演算子として、

$$\mathcal{P}\bullet = \mathrm{Tr}_R(\rho_R \bullet) \tag{7.55}$$

を採用する。
処方 2：右辺の各項で、$\hat{H}_1^I(t)$ について展開し、意味のある最低次までを取る。
処方 3：乱雑演算子に依存する右辺第 2 項において、相互作用描像の演算子をハイゼンベルク描像の演算子に置き換える。

(7.36),(7.25) より、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_{QQ}(t,s) &= [\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_{QQ}(t)]\hat{U}_{QQ}^{-1}(s) \\
&= -i\hat{H}_{1,QQ}^I(t)\hat{U}_{QQ}(t)\hat{U}_{QQ}^{-1}(s) \\
&= -i\hat{H}_{1,QQ}^I(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)
\end{aligned} \tag{7.56}$$

を得る。これと初期条件 $\hat{U}_{QQ}(s,s) = 1$ より

$$\hat{U}_{QQ}(t,s)\bullet = \bullet - i\int_s^t du\ \hat{H}_{1,QQ}^I(u)\hat{U}_{QQ}(u,s)\bullet \tag{7.57}$$

この右辺自身を右辺の $\hat{U}_{QQ}(u,s)\bullet$ に代入して、

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{QQ}(t,s)\bullet &= \bullet - i\int_s^t du\ \hat{H}_{1,QQ}^I(u)\bullet - \int_s^t du_1 \int_s^{u_1} du_2\ \hat{H}_{1,QQ}^I(u_1)\hat{H}_{1,QQ}^I(u_2)\hat{U}_{QQ}(u_2,s)\bullet \\
&= \bullet - i\int_s^t du\ \hat{H}_{1,QQ}^I(u)\bullet - \int_s^t du_1 \int_s^{u_1} du_2\ \hat{H}_{1,QQ}^I(u_1)\hat{H}_{1,QQ}^I(u_2)\bullet + \mathcal{O}(\hat{H}_1^I)^3\bullet, \\
\hat{U}_{QQ}(t,s) &= 1 - i\int_s^t du\ \hat{H}_{1,QQ}^I(u) - \int_s^t du_1 \int_s^{u_1} du_2\ \hat{H}_{1,QQ}^I(u_1)\hat{H}_{1,QQ}^I(u_2) + \mathcal{O}(\hat{H}_1^I)^3
\end{aligned} \tag{7.58}$$

を得る。$\mathcal{O}(\hat{H}_1^I)^3$ は $\hat{H}_1^I(t)$ について 3 次以上の項である。(7.46) にこれを代入する。これより、意味のある最低次は

$$\hat{U}_{QQ}(0,t)\hat{H}_1^I(t) \approx \hat{H}_1^I(t), \tag{7.59}$$

$$\hat{H}_{1,PQ}^I(s)\hat{U}_{QQ}(s,t)\hat{H}_1^I(t) \approx \hat{H}_{1,PQ}^I(s)\hat{H}_1^I(t) \tag{7.60}$$

となる。よって、(7.46) は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}X(t) = &\ \hat{W}(t)i[\hat{H}_0+\mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)]e^{i\hat{H}_0t}X+\mathcal{Q}i\hat{H}_1^I(t)e^{i\hat{H}_0t}X\\ &-\int_0^t ds\,\hat{W}(s)\mathcal{P}\hat{H}_{1,PQ}^I(s)\hat{H}_1^I(t)e^{i\hat{H}_0t}X\end{aligned} \tag{7.61}$$

となる。以下では、A を注目系の演算子とする。このとき、

$$e^{i\hat{H}_0t}A = e^{i\hat{H}_St}A = A^I(t) \tag{7.62}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A(t) = &\ \hat{W}(t)i[\hat{H}_0+\mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)]A^I(t)+\mathcal{Q}i\hat{H}_1^I(t)A^I(t)\\ &-\int_0^t ds\,\hat{W}(s)\mathcal{P}\hat{H}_{1,PQ}^I(s)\hat{H}_1^I(t)A^I(t)\end{aligned} \tag{7.63}$$

となる。

(7.55) を代入すると、

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)A^I(t) &= \mathrm{Tr}_R(\rho_R\hat{H}_1^I(t)A^I(t))\\ &= \mathrm{Tr}_R(\rho_R[H_1^I(t),A^I(t)])\\ &= \langle[H_1^I(t),A^I(t)]\rangle_R,\end{aligned} \tag{7.64}$$

$$\langle\cdots\rangle_R \equiv \mathrm{Tr}_R(\rho_R\cdots) \tag{7.65}$$

となる。ただし、(7.10) を用いた。また、

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}i\hat{H}_1^I(t)A^I(t) &= \mathcal{Q}i[H_1^I(t),A^I(t)]\\ &= i[H_1^I(t),A^I(t)]-i\langle[H_1^I(t),A^I(t)]\rangle_R,\end{aligned} \tag{7.66}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\hat{H}_{1,PQ}^I(s)\hat{H}_1^I(t)A^I(t) &= \mathcal{P}\hat{H}_1^I(s)\mathcal{Q}[H_1^I(t),A^I(t)]\\ &= \mathcal{P}\hat{H}_1^I(s)[H_1^I(t),A^I(t)]-\mathcal{P}\hat{H}_1^I(s)\langle[H_1^I(t),A^I(t)]\rangle_R\\ &= \langle\hat{H}_1^I(s)[H_1^I(t),A^I(t)]\rangle_R-\langle\hat{H}_1^I(s)\langle[H_1^I(t),A^I(t)]\rangle_R\rangle_R\end{aligned} \tag{7.67}$$

である。これを (7.63) に代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A(t) = &\ \hat{W}(t)i\hat{H}_0A^I(t)+\hat{W}(t)i\langle[H_1^I(t),A^I(t)]\rangle_R+i[H_1^I(t),A^I(t)]-i\langle[H_1^I(t),A^I(t)]\rangle_R\\ &-\int_0^t ds\,\hat{W}(s)[\langle\hat{H}_1^I(s)[H_1^I(t),A^I(t)]\rangle_R-\langle\hat{H}_1^I(s)\langle[H_1^I(t),A^I(t)]\rangle_R\rangle_R]\end{aligned} \tag{7.68}$$

となる。

今、H_1 として、

$$H_1 = \sum_\alpha R_\alpha a_\alpha + \text{h.c.} \tag{7.69}$$

の形を仮定する。ただし、R_α は熱浴の、a_α は注目系の自由度である。このとき、

$$\begin{aligned} H_1^I(t) \,&=\, \sum_\alpha R_\alpha^I(t) a_\alpha^I(t) + \text{h.c.}, &(7.70)\\ [H_1^I(t), A^I(t)] \,&=\, \sum_\alpha \left\{ R_\alpha^I(t)[a_\alpha^I(t), A^I(t)] + R_\alpha^I(t)^\dagger [a_\alpha^I(t)^\dagger, A^I(t)] \right\}, &(7.71)\\ \langle [H_1^I(t), A^I(t)] \rangle_R \,&=\, \sum_\alpha \left\{ \langle R_\alpha^I(t) \rangle_R [a_\alpha^I(t), A^I(t)] + \langle R_\alpha^I(t)^\dagger \rangle_R [a_\alpha^I(t)^\dagger, A^I(t)] \right\} &(7.72) \end{aligned}$$

となる。今、

$$\langle R_\alpha^I(t) \rangle_R = 0 = \langle R_\alpha^I(t)^\dagger \rangle_R \tag{7.73}$$

を仮定する。これは、(4.124) に相当する。このとき、(7.68) は、

$$\frac{d}{dt} A(t) \,=\, \hat{W}(t) i \hat{H}_0 A^I(t) + i[H_1^I(t), A^I(t)] - \int_0^t ds\, \hat{W}(s) \langle \hat{H}_1^I(s) [H_1^I(t), A^I(t)] \rangle_R \tag{7.74}$$

となる。ところで、この第 1 項は、

$$\begin{aligned} \hat{W}(t) i \hat{H}_0 A^I(t) \,&=\, i \hat{W}(t) [H_0^I(t), A^I(t)] \\ &=\, i[H_0(t), A(t)] \\ &=\, i[H_S(t), A(t)] &(7.75) \end{aligned}$$

である。ただし、$H_0 = H_0^I(t)$ と (7.13) を用いた。よって、上式は、

$$\frac{d}{dt} A(t) \,=\, i[H_S(t), A(t)] + i[H_1^I(t), A^I(t)] - \int_0^t ds\, \hat{W}(s) \langle \hat{H}_1^I(s) [H_1^I(t), A^I(t)] \rangle_R \tag{7.76}$$

となる。

TCL 型の場合も同様である。(7.58),(7.51) より、

$$\hat{S}(t) \,=\, i \int_0^t ds\, \hat{W}(t,s) \mathcal{P} \hat{H}_{1,PQ}^I(s) + \mathcal{O}(\hat{H}_1^I)^2 \tag{7.77}$$

および、

$$[1 - \hat{S}(t)]^{-1} \,=\, 1 + \mathcal{O}(\hat{H}_1^I) \tag{7.78}$$

を得る。処方 2 のもとで、(7.54) は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A(t) \,&=\, \hat{W}(t) i [\hat{H}_0 + \mathcal{P} i \hat{H}_1^I(t)] e^{i\hat{H}_0 t} A + \mathcal{Q} \hat{U}_{QQ}(0,t) i \hat{H}_1^I(t) e^{i\hat{H}_0 t} A \\ &\quad + \hat{W}(t) \mathcal{P} \hat{S}(t) i \hat{H}_1^I(t) e^{i\hat{H}_0 t} A \\ &=\, \hat{W}(t) i [\hat{H}_0 + \mathcal{P} i \hat{H}_1^I(t)] e^{i\hat{H}_0 t} A + \mathcal{Q} \hat{U}_{QQ}(0,t) i \hat{H}_1^I(t) e^{i\hat{H}_0 t} A \\ &\quad - \hat{W}(t) \mathcal{P} \int_0^t ds\, \hat{W}(t,s) \mathcal{P} \hat{H}_{1,PQ}^I(s) \hat{H}_1^I(t) e^{i\hat{H}_0 t} A &(7.79) \end{aligned}$$

となる。これは、(7.54) と第 3 項のみが異なる。(7.67),(7.73) より、上式の第 3 項は、

$$
\begin{aligned}
& -\hat{W}(t)\mathcal{P}\int_0^t ds\,\hat{W}(t,s)\mathcal{P}\hat{H}^I_{1,PQ}(s)\hat{H}^I_1(t)e^{i\hat{H}_0t}A \\
=\; & -\hat{W}(t)\mathcal{P}\int_0^t ds\,\hat{W}(t,s)\langle\hat{H}^I_1(s)[H^I_1(t),A^I(t)]\rangle_R \\
=\; & -\hat{W}(t)\int_0^t ds\,\langle\hat{W}(t,s)\langle\hat{H}^I_1(s)[H^I_1(t),A^I(t)]\rangle_R\rangle_R
\end{aligned}
\tag{7.80}
$$

となる。よって、(7.76) の対応物は、それと第 3 項だけが異なった、

$$
\frac{d}{dt}A(t) = i[H_S(t),A(t)] + i[H^I_1(t),A^I(t)] - \hat{W}(t)\int_0^t ds\,\langle\hat{W}(t,s)\langle\hat{H}^I_1(s)[H^I_1(t),A^I(t)]\rangle_R\rangle_R \tag{7.81}
$$

である。

7.1.3 ボソン系の場合

計算を進める。(7.8) より、

$$
\begin{aligned}
\hat{H}^I_1(s)[H^I_1(t),A^I(t)] &= e^{i\hat{H}_0s}\hat{H}_1e^{-i\hat{H}_0s}[H^I_1(t),A^I(t)] \\
&= e^{i\hat{H}_0s}\big[H_1,[H^I_1(t-s),A^I(t-s)]\big] \\
&= \big[H^I_1(s),[H^I_1(t),A^I(t)]\big]
\end{aligned}
\tag{7.82}
$$

である。(7.71) より、

$$
\begin{aligned}
\big[H^I_1(s),[H^I_1(t),A^I(t)]\big] &= \sum_\alpha\big\{\big[H^I_1(s),R^I_\alpha(t)[a^I_\alpha(t),A^I(t)]\big] + \big[H^I_1(s),R^I_\alpha(t)^\dagger[a^I_\alpha(t)^\dagger,A^I(t)]\big]\big\} \\
&= \sum_{\alpha,\beta}\big\{\big[R^I_\beta(s)a^I_\beta(s)+R^I_\beta(s)^\dagger a^I_\beta(s)^\dagger,R^I_\alpha(t)[a^I_\alpha(t),A^I(t)]\big] \\
&\quad +\big[R^I_\beta(s)a^I_\beta(s)+R^I_\beta(s)^\dagger a^I_\beta(s)^\dagger,R^I_\alpha(t)^\dagger[a^I_\alpha(t)^\dagger,A^I(t)]\big]\big\}
\end{aligned}
\tag{7.83}
$$

となる。

今、§ 4.1.1 のモデルについて考える。すなわち、

$$
H_S = \omega_0 a^\dagger a, \tag{7.84}
$$

$$
H_R = \sum_l \omega_l b_l^\dagger b_l, \tag{7.85}
$$

$$
H_1 = a^\dagger R + R^\dagger a, \quad R = \sum_l g_l b_l \tag{7.86}
$$

とする。このとき、

$$
\begin{aligned}
& \big[H^I_1(s),[H^I_1(t),A^I(t)]\big] \\
=\; & \big[R^I(s)a^I(s)^\dagger + R^I(s)^\dagger a^I(s),R^I(t)[a^I(t)^\dagger,A^I(t)]\big] \\
& +\big[R^I(s)a^I(s)^\dagger + R^I(s)^\dagger a^I(s),R^I(t)^\dagger[a^I(t),A^I(t)]\big] \\
=\; & R^I(s)R^I(t)[a^I(s)^\dagger,[a^I(t)^\dagger,A^I(t)]] + [R^I(s),R^I(t)][a^I(t)^\dagger,A^I(t)]a^I(s)^\dagger \\
& +R^I(s)^\dagger R^I(t)[a^I(s),[a^I(t)^\dagger,A^I(t)]] + [R^I(s)^\dagger,R^I(t)][a^I(t)^\dagger,A^I(t)]a^I(s) \\
& +R^I(s)R^I(t)^\dagger[a^I(s)^\dagger,[a^I(t),A^I(t)]] + [R^I(s),R^I(t)^\dagger][a^I(t),A^I(t)]a^I(s)^\dagger \\
& +R^I(s)^\dagger R^I(t)^\dagger[a^I(s),[a^I(t),A^I(t)]] + [R^I(s)^\dagger,R^I(t)^\dagger][a^I(t),A^I(t)]a^I(s)
\end{aligned}
\tag{7.87}
$$

である。NETFD のときは、これに相当する計算は (4.152) で、この計算より簡単だった。上式より、

$$
\begin{aligned}
&\langle [H_1^I(s),[H_1^I(t),A^I(t)]]\rangle_R \\
=\ &\langle R^I(s)R^I(t)\rangle_R[a^I(s)^\dagger,[a^I(t)^\dagger,A^I(t)]] + \langle [R^I(s),R^I(t)]\rangle_R[a^I(t)^\dagger,A^I(t)]a^I(s)^\dagger \\
&+\langle R^I(s)^\dagger R^I(t)\rangle_R[a^I(s),[a^I(t)^\dagger,A^I(t)]] + \langle [R^I(s)^\dagger,R^I(t)]\rangle_R[a^I(t)^\dagger,A^I(t)]a^I(s) \\
&+\langle R^I(s)R^I(t)^\dagger\rangle_R[a^I(s)^\dagger,[a^I(t),A^I(t)]] + \langle [R^I(s),R^I(t)^\dagger]\rangle_R[a^I(t),A^I(t)]a^I(s)^\dagger \\
&+\langle R^I(s)^\dagger R^I(t)^\dagger\rangle_R[a^I(s),[a^I(t),A^I(t)]] + \langle [R^I(s)^\dagger,R^I(t)^\dagger]\rangle_R[a^I(t),A^I(t)]a^I(s) \\
=\ &\langle R^I(s)^\dagger R^I(t)\rangle_R[a^I(s),[a^I(t)^\dagger,A^I(t)]] + \langle [R^I(s)^\dagger,R^I(t)]\rangle_R[a^I(t)^\dagger,A^I(t)]a^I(s) \\
&+\langle R^I(s)R^I(t)^\dagger\rangle_R[a^I(s)^\dagger,[a^I(t),A^I(t)]] + \langle [R^I(s),R^I(t)^\dagger]\rangle_R[a^I(t),A^I(t)]a^I(s)^\dagger
\end{aligned}
\tag{7.88}
$$

を得る。これと (4.43),(4.44),(4.45) より、(7.76) は、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}A(t)\ =\ &i[H_S(t),A(t)] - iR^I(t)^\dagger[A^I(t),a^I(t)] - i[A^I(t),a^I(t)^\dagger]R^I(t) \\
&+\kappa\Big\{a^\dagger(t)[A(t),a(t)] + [a^\dagger(t),A(t)]a(t)\Big\} + 2\kappa\bar{n}\big[a^\dagger(t),[A(t),a(t)]\big]
\end{aligned}
\tag{7.89}
$$

となる。これは、(4.165) で $\langle\langle 1|$ を取ったものである。処方 3 により、この第 2 項は、

$$
-iR^I(t)^\dagger[A^I(t),a^I(t)] - i\langle\langle 1|[A^I(t),a^I(t)^\dagger]R^I(t) \to \sqrt{2\kappa}b_t^\dagger[A(t),a(t)] + \sqrt{2\kappa}[A(t),a(t)^\dagger]b_t \tag{7.90}
$$

となる。ここで、

$$
-iR^I(t) \to \sqrt{2\kappa}b_t \tag{7.91}
$$

は乱雑力演算子である。最終的に、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}A(t)\ =\ &i[H_S(t),A(t)] + \sqrt{2\kappa}b_t^\dagger[A(t),a(t)] + \sqrt{2\kappa}[A(t),a^\dagger(t)]b_t \\
&+\kappa\Big\{a^\dagger(t)[A(t),a(t)] + [a^\dagger(t),A(t)]a(t)\Big\} + 2\kappa\bar{n}\big[a^\dagger(t),[A(t),a(t)]\big]
\end{aligned}
\tag{7.92}
$$

を得る。TCL 型の (7.81) からも (4.44),(4.45) の近似の下では、同じ方程式が得られる。

7.2 § 4.3 の再考

Liouville-von Neumann 方程式は、

$$
\frac{d}{dt}\rho_{tot}(t)\ =\ -i[H,\rho_{tot}(t)] = -i\hat{H}\rho_{tot}(t) \tag{7.93}
$$

である。初期値は、

$$
\rho_{tot}(0) = \rho_R\rho(0) \tag{7.94}
$$

を仮定する。(7.93) は、

$$
\rho_{tot}(t) = e^{-i\hat{H}t}\rho_{tot}(0) \tag{7.95}
$$

と解ける。今、$\hat{U}(t)$ を、

$$
e^{-i\hat{H}t}\ =\ e^{-i\hat{H}_0 t}\hat{U}(t) \tag{7.96}
$$

で定義する。これと (7.95) より、

$$\rho_{tot}(t) \;=\; e^{-i\hat{H}_0 t}\rho_{tot}^I(t), \tag{7.97}$$

$$\rho_{tot}^I(t) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \hat{U}(t)\rho_{tot}(0) \tag{7.98}$$

となる。(7.96) を微分して、

$$\begin{aligned} -i\hat{H}e^{-i\hat{H}_0 t}\hat{U}(t) \;&=\; -i\hat{H}_0 e^{-i\hat{H}_0 t}\hat{U}(t) + e^{-i\hat{H}_0 t}\frac{d\hat{U}(t)}{dt}, \\ -i\hat{H}_1 e^{-i\hat{H}_0 t}\hat{U}(t) \;&=\; e^{-i\hat{H}_0 t}\frac{d\hat{U}(t)}{dt}, \end{aligned} \tag{7.99}$$

$$\frac{d\hat{U}(t)}{dt} \;=\; -i\hat{H}_1^I(t)\hat{U}(t) \tag{7.100}$$

を得る。(4.73) から (4.103) までと同様にして、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{U}(t) \;=\; & -i\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q} - \int_0^t ds\; \hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\hat{H}_{1,QP}^I(s)\mathcal{P}\hat{U}(s) \\ & -i\hat{H}_1^I(t)\mathcal{P}\hat{U}(t) \end{aligned} \tag{7.101}$$

を得る。ここで、$\mathcal{P}$ は (7.15) を満たす。両辺を $\rho_{tot}(0)$ に作用させると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_{tot}^I(t) \;=\; & -i\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q}\rho_{tot}^I(0) - \int_0^t ds\; \hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\hat{H}_{1,QP}^I(s)\mathcal{P}\rho_{tot}^I(s) \\ & -i\hat{H}_1^I(t)\mathcal{P}\rho_{tot}^I(t) \end{aligned} \tag{7.102}$$

となる。これに $\mathcal{P}$ を作用させて、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_{tot}^I(t) \;=\; & -i\mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q}\rho_{tot}(0) - \int_0^t ds\; \mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\hat{H}_{1,QP}^I(s)\mathcal{P}\rho_{tot}^I(s) \\ & -i\mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\mathcal{P}\rho_{tot}^I(t) \end{aligned} \tag{7.103}$$

を得る。(7.58) を代入する。右辺第 1 項は、

$$\begin{aligned} & -i\mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t)\mathcal{Q}\rho_{tot}(0) \\ =\; & -i\mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\mathcal{Q}\rho_{tot}(0) - \int_0^t ds\; \mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\hat{H}_{1,QQ}^I(s)\mathcal{Q}\rho_{tot}(0) + \mathcal{O}(\hat{H}_1^I)^3 \\ =\; & -i\mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\rho_{tot}(0) + i\mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\mathcal{P}\rho_{tot}(0) - \int_0^t ds\; \mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\hat{H}_{1,QQ}^I(s)\mathcal{Q}\rho_{tot}(0) + \mathcal{O}(\hat{H}_1^I)^3 \end{aligned} \tag{7.104}$$

右辺第 2 項は、

$$\begin{aligned} & -\int_0^t ds\; \mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_{QQ}(t,s)\hat{H}_{1,QP}^I(s)\mathcal{P}\rho_{tot}^I(s) \\ =\; & -\int_0^t ds\; \mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\hat{H}_{1,QP}^I(s)\mathcal{P}\rho_{tot}^I(s) + \mathcal{O}(\hat{H}_1^I)^3 \\ =\; & -\int_0^t ds\; \mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)(1-\mathcal{P})\hat{H}_1^I(s)\mathcal{P}\rho_{tot}^I(s) + \mathcal{O}(\hat{H}_1^I)^3 \\ =\; & -\int_0^t ds\; [\mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\hat{H}_1^I(s)\mathcal{P}\rho_{tot}^I(s) - \mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\mathcal{P}\hat{H}_1^I(s)\mathcal{P}\rho_{tot}^I(s)] + \mathcal{O}(\hat{H}_1^I)^3 \end{aligned} \tag{7.105}$$

となる。
　今、$\mathcal{P}$ として、

$$\mathcal{P}\bullet \ = \ \rho_R \mathrm{Tr}_R(\bullet) \tag{7.106}$$

を選ぶ。また、(7.69),(7.73) すなわち、

$$H_1 = R_\alpha a_\alpha + R_\alpha^\dagger a_\alpha^\dagger, \quad \langle R_\alpha^I(t)\rangle_R = 0 = \langle R_\alpha^I(t)^\dagger\rangle_R \tag{7.107}$$

を仮定する（α については和を取るものとする）。このとき、

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\rho_{tot}(0) \ &= \ \mathcal{P}e^{-i\hat{H}_0 t}\hat{H}_1 e^{-i\hat{H}_0 t}\rho_{tot}(0) \\
&= \ \mathcal{P}[H_1^I(t), \rho_{tot}(0)] \\
&= \ \rho_R \mathrm{Tr}_R([H_1^I(t), \rho_{tot}(0)]) \\
&= \ \rho_R \mathrm{Tr}_R\big([R_\alpha^I(t)a_\alpha^I(t) + R_\alpha^I(t)^\dagger a_\alpha^I(t)^\dagger, \rho_R\rho(0)]\big)
\end{aligned} \tag{7.108}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}
[R_\alpha^I(t)a_\alpha^I(t) + R_\alpha^I(t)^\dagger a_\alpha^I(t)^\dagger, \rho_R\rho(0)] \ &= \ [R_\alpha^I(t), \rho_R]\rho(0)a_\alpha^I(t) + R_\alpha^I(t)\rho_R[a_\alpha^I(t), \rho(0)] \\
&\quad +[R_\alpha^I(t)^\dagger, \rho_R]\rho(0)a_\alpha^I(t)^\dagger + R_\alpha^I(t)^\dagger\rho_R[a_\alpha^I(t)^\dagger, \rho(0)]
\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}
(7.108) \ &= \ \rho_R\Big(\mathrm{Tr}_R([R_\alpha^I(t), \rho_R])\rho(0)a_\alpha^I(t) + \langle R_\alpha^I(t)\rangle_R[a_\alpha^I(t), \rho(0)] \\
&\qquad +\mathrm{Tr}_R([R_\alpha^I(t)^\dagger, \rho_R])\rho(0)a_\alpha^I(t)^\dagger + \langle R_\alpha^I(t)^\dagger\rangle_R[a_\alpha^I(t)^\dagger, \rho(0)]\Big) \\
&= \ 0
\end{aligned} \tag{7.109}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}\rho_{tot}(0) \ &= \ \rho_R\rho(0) - \rho_R\mathrm{Tr}_R(\rho_R)\rho(0) \\
&= \ 0, \\
\mathcal{P}\rho_{tot}^I(s) \ &= \ \rho_R\mathrm{Tr}_R(\rho_{tot}^I(s)) \\
&= \ \rho_R\rho^I(s), \qquad (7.110) \\
\rho^I(t) \ &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \ \mathrm{Tr}_R(\rho_{tot}^I(t)) \qquad (7.111)
\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\hat{H}_1^I(s)\mathcal{P}\rho_{tot}^I(s) \ &= \ \mathcal{P}[H_1^I(s), \rho_R\rho^I(s)] \\
&= \ \rho_R\mathrm{Tr}_R[H_1^I(s), \rho_R\rho^I(s)] \\
&= \ \rho_R\Big(\mathrm{Tr}_R([R_\alpha^I(t), \rho_R])\rho^I(s)a_\alpha^I(t) + \langle R_\alpha^I(t)\rangle_R[a_\alpha^I(t), \rho^I(s)] \\
&\qquad +\mathrm{Tr}_R([R_\alpha^I(t)^\dagger, \rho_R])\rho^I(s)a_\alpha^I(t)^\dagger + \langle R_\alpha^I(t)^\dagger\rangle_R[a_\alpha^I(t)^\dagger, \rho^I(s)]\Big) \\
&= \ 0, \qquad (7.112) \\
\mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)\hat{H}_1^I(s)\mathcal{P}\rho_{tot}^I(s) \ &= \ \mathcal{P}\hat{H}_1^I(t)[H_1^I(s), \rho_R\rho^I(s)] \\
&= \ \mathcal{P}\big[H_1^I(t), [H_1^I(s), \rho_R\rho^I(s)]\big] \\
&= \ \rho_R\mathrm{Tr}_R\big[H_1^I(t), [H_1^I(s), \rho_R\rho^I(s)]\big] \qquad (7.113)
\end{aligned}$$

となる。以上より、(7.103) は、

$$
\begin{aligned}
\rho_R \frac{d}{dt}\rho^I(s) &= -\rho_R \int_0^t ds\ \mathrm{Tr}_R\big[H_1^I(t), [H_1^I(s), \rho_R \rho^I(s)]\big], \\
\frac{d}{dt}\rho^I(s) &= -\int_0^t ds\ \mathrm{Tr}_R\big[H_1^I(t), [H_1^I(s), \rho_R \rho^I(s)]\big]
\end{aligned}
\tag{7.114}
$$

となる。

今、

$$
\rho(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Tr}_R[\rho_{tot}(t)] \tag{7.115}
$$

とする。(7.95) より、

$$
\begin{aligned}
\rho(t) &= \mathrm{Tr}_R[e^{-i\hat{H}_0 t}\rho^I_{tot}(t)] \\
&= \mathrm{Tr}_R[e^{-iH_0 t}\rho^I_{tot}(t)e^{iH_0 t}] \\
&= \mathrm{Tr}_R[e^{-iH_R t}e^{-iH_S t}\rho^I_{tot}(t)e^{iH_S t}e^{iH_R t}]
\end{aligned}
\tag{7.116}
$$

である。$|n\rangle$ を熱浴系の完全系とすると、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_R[e^{-iH_R t}e^{-iH_S t}\rho^I_{tot}(t)e^{iH_S t}e^{iH_R t}] &= \sum_n \langle n|e^{-iH_R t}e^{-iH_S t}\rho^I_{tot}(t)e^{iH_S t}e^{iH_R t}|n\rangle \\
&= \sum_{n,m} \langle n|e^{-iH_R t}e^{-iH_S t}\rho^I_{tot}(t)e^{iH_S t}|m\rangle\langle m|e^{iH_R t}|n\rangle \\
&= \sum_{n,m} \langle m|e^{iH_R t}|n\rangle\langle n|e^{-iH_R t}e^{-iH_S t}\rho^I_{tot}(t)e^{iH_S t}|m\rangle \\
&= \sum_{m} \langle m|e^{iH_R t}e^{-iH_R t}e^{-iH_S t}\rho^I_{tot}(t)e^{iH_S t}|m\rangle \\
&= \mathrm{Tr}_R[e^{-iH_S t}\rho^I_{tot}(t)e^{iH_S t}] \\
&= e^{-iH_S t}\mathrm{Tr}_R[\rho^I_{tot}(t)]e^{iH_S t} \\
&= e^{-iH_S t}\rho^I(t)e^{iH_S t}
\end{aligned}
\tag{7.117}
$$

となるから、

$$
\rho(t) = e^{-iH_S t}\rho^I(t)e^{iH_S t} \tag{7.118}
$$

を得る。これと (7.114) から、

$$
\begin{aligned}
i\frac{d}{dt}\rho(t) &= [H_S, \rho(t)] + ie^{-iH_S t}\frac{d\rho^I(t)}{dt}e^{iH_S t} \\
&= [H_S, \rho(t)] - i\int_0^t ds\ e^{-iH_S t}\mathrm{Tr}_R\big[H_1^I(t), [H_1^I(s), \rho_R\rho^I(s)]\big]e^{iH_S t}
\end{aligned}
\tag{7.119}
$$

となる。

(7.107) を

$$
H_1 = R_\mu a_\mu\,, \quad \langle R^I_\mu(t)\rangle_R = 0 \tag{7.120}
$$

とかくと、

$$
[H_1^I(s), \rho_R\rho^I(s)] = [R^I_\mu(s), \rho_R]\rho^I(s)a^I_\mu(s) + R^I_\mu(s)\rho_R[a^I_\mu(s), \rho^I(s)] \tag{7.121}
$$

であり、

$$
\begin{aligned}
&\big[H_1^I(t),[H_1^I(s),\rho_R\rho^I(s)]\big] \\
=\ &\big[R_\nu^I(t)a_\nu^I(t),[R_\mu^I(s),\rho_R]\rho^I(s)a_\mu^I(s)\big]+\big[R_\nu^I(t)a_\nu^I(t),R_\mu^I(s)\rho_R[a_\mu^I(s),\rho^I(s)]\big] \\
=\ &R_\nu^I(t)[R_\mu^I(t),\rho_R][a_\nu^I(t),\rho^I(s)a_\mu^I(s)]+\big[R_\nu^I(t),[R_\mu^I(s),\rho_R]\big]\rho^I(s)a_\mu^I(s)a_\nu^I(t) \\
&+R_\nu^I(t)R_\mu^I(t)\rho_R\big[a_\nu^I(t),[a_\mu^I(s),\rho^I(s)]\big]+[R_\nu^I(t),R_\mu^I(s)\rho_R][a_\mu^I(s),\rho^I(s)]a_\nu^I(t)
\end{aligned}
\tag{7.122}
$$

なので [30]、(7.119) の第 2 項の $\mathrm{Tr}_R\big[H_1^I(t),[H_1^I(s),\rho_R\rho^I(s)]\big]$ は、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}_R\big[H_1^I(t),[H_1^I(s),\rho_R\rho^I(s)]\big] \\
=\ &\mathrm{Tr}_R\big(R_\nu^I(t)[R_\mu^I(s),\rho_R]\big)[a_\nu^I(t),\rho^I(s)a_\mu^I(s)]+\langle R_\nu^I(t)R_\mu^I(s)\rangle_R\big[a_\nu^I(t),[a_\mu^I(s),\rho^I(s)]\big] \\
=\ &\langle[R_\nu^I(t),R_\mu^I(s)]\rangle_R[a_\nu^I(t),\rho^I(s)a_\mu^I(s)]+\langle R_\nu^I(t)R_\mu^I(s)\rangle_R\big[a_\nu^I(t),[a_\mu^I(s),\rho^I(s)]\big]
\end{aligned}
\tag{7.123}
$$

である。

特に、ボソン系の場合は、(7.86) より、

$$
(R_{\mu=1},a_{\mu=1})=(R,a^\dagger)\,,\quad (R_{\mu=2},a_{\mu=2})=(R^\dagger,a)
\tag{7.124}
$$

であり、(4.43),(4.44),(4.45) より、

$$
\langle[R_\nu^I(t),R_\mu^I(s)]\rangle_R = \begin{pmatrix}0 & 2\kappa\\ -2\kappa & 0\end{pmatrix}_{\nu\mu}\delta(t-s),
\tag{7.125}
$$

$$
\langle R_\nu^I(t)R_\mu^I(s)\rangle_R = \begin{pmatrix}0 & 2\kappa(\bar n+1)\\ 2\kappa\bar n & 0\end{pmatrix}_{\nu\mu}\delta(t-s)
\tag{7.126}
$$

となる。よって、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}_R\big[H_1^I(t),[H_1^I(s),\rho_R\rho^I(s)]\big] \\
=\ &2\kappa\delta(t-s)\Big([a^I(t)^\dagger,\rho^I(t)a^I(t)]-[a^I(t),\rho^I(t)a^I(t)^\dagger] \\
&+(\bar n+1)\big[a^I(t)^\dagger,[a^I(t),\rho^I(t)]\big]+\bar n\big[a^I(t),[a^I(t)^\dagger,\rho^I(t)]\big]\Big)
\end{aligned}
\tag{7.127}
$$

となり、

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^t ds\, e^{-iH_S t}\mathrm{Tr}_R\big[H_1^I(t),[H_1^I(s),\rho_R\rho^I(s)]\big] \\
=\ &-\kappa\Big([a^I(t)^\dagger,\rho^I(t)a^I(t)]-[a^I(t),\rho^I(t)a^I(t)^\dagger] \\
&+(\bar n+1)\big[a^I(t)^\dagger,[a^I(t),\rho^I(t)]\big]+\bar n\big[a^I(t),[a^I(t)^\dagger,\rho^I(t)]\big]\Big) \\
=\ &\Pi^I(t)\rho^I(t)
\end{aligned}
\tag{7.128}
$$

---

30)

$$
\rho_R\to 1\,,\quad \rho^I(s)\to A^I(s)\,,\quad s\leftrightarrow t
$$

の置き換えで、

$$
\big[H_1^I(s),[H_1^I(t),A^I(t)]\big] \ =\ R_\nu^I(s)R_\mu^I(t)\big[a_\nu^I(s),[a_\mu^I(t),A^I(t)]\big]+[R_\nu^I(s),R_\mu^I(t)][a_\mu^I(t),A^I(t)]a_\nu^I(s)
$$

を得る。

を得る。ただし、

$$\Pi^I(t)\bullet \;=\; \kappa([a^I(t)\bullet, a^I(t)^\dagger] + [a^I(t), \bullet a^I(t)^\dagger]) + 2\kappa\bar{n}\big[a^I(t), [\bullet, a^I(t)^\dagger]\big] \tag{7.129}$$

である。(7.128) を (7.119) に代入して、

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\rho(t) \;&=\; [H_S, \rho(t)] + ie^{-iH_St}[\Pi^I(t)\rho^I(t)]e^{iH_St} \\ &=\; [H_S, \rho(t)] + i[\Pi\rho(t)], \end{aligned} \tag{7.130}$$

$$\Pi\bullet \;=\; \kappa([a(t)\bullet, a(t)^\dagger] + [a(t), \bullet a(t)^\dagger]) + 2\kappa\bar{n}\big[a(t), [\bullet, a(t)^\dagger]\big] \tag{7.131}$$

を得る。ただし、(7.118) を用いた。

7.3 NETFD との対応

今、A を任意の演算子とし、超演算子 $\hat{A}(t,s)$ を、

$$\hat{A}(t,s) \stackrel{\rm def}{\equiv} e^{i\hat{H}_at}Ae^{-i\hat{H}_as} \qquad (a = S, R, 0, 1, \text{無印}) \tag{7.132}$$

で定義する。演算子 $\hat{A}(t,s)X$ について考える (X は任意の演算子)。(7.6) より、

$$e^{i\hat{H}_as}X \;=\; e^{iH_as}X^{-iH_as} \equiv X^{(a)}(-s) \tag{7.133}$$

である。$\hat{A}(t,s)X = e^{i\hat{H}_at}AX(-s)$ を t で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}e^{i\hat{H}_at}AX^{(a)}(-s) \;&=\; i\hat{H}_ae^{i\hat{H}_at}AX^{(a)}(-s) \\ &=\; i[H_a, e^{i\hat{H}_at}AX^{(a)}(-s)] \end{aligned} \tag{7.134}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} \hat{A}(t,s)X \;&=\; e^{iH_at}AX^{(a)}(-s)e^{-iH_at} \\ &=\; e^{iH_at}Ae^{-iH_as}X^{iH_as}e^{-iH_at} \\ &=\; e^{iH_at}Ae^{-iH_at}e^{iH_a(t-s)}Xe^{-iH_a(t-s)} \\ &=\; A^{(a)}(t)X^{(a)}(t-s) \end{aligned} \tag{7.135}$$

を得る。特に、$t = s$ とすると、

$$\hat{A}(t,t)X \;=\; A^{(a)}(t)X \tag{7.136}$$

であるから、超演算子として、

$$e^{i\hat{H}_at}Ae^{-i\hat{H}_at}(\bullet) = e^{iH_at}Ae^{-iH_at}\cdot\bullet \tag{7.137}$$

となる。$e^{i\hat{H}_at}Ae^{-i\hat{H}_at}$ は、NETFD での A の a-描像 ($a = 0$ なら相互作用,$a =$ 無印ならハイゼンベルグ) である。(7.132) のタイプの超演算子は、上式の意味で、通常の a-描像の演算子と一致する。

NETFD では、チルダ演算子や射影子 $\mathcal{P}$ は、ブラ真空またはケット真空に作用する演算子と思える。しかし、超演算子法では、これらはその右にあるすべての演算子に作用する超演算子である。このため、NETFD の方が扱いが楽である。また、§ 4.2 と§ 4.3 で $\mathcal{P}$ は $|1\rangle_{RR}\langle 1|$ で共通であったが、超演算子法ではそれぞれの場合で $\mathcal{P}$ が異なる。

(7.130) の形式解は

$$\rho(t) = e^{-\hat{H}t}\rho(0)\,, \quad \hat{H} = H_S - \tilde{H}_S + i\hat{\Pi} \tag{7.138}$$

である。しかし、この表式からはほとんど情報を引き出せない。NETFD ではハイゼンベルグ方程式を解くことで情報を引き出せるが、超演算子法ではこれは可能だろうか？上式の $\hat{H}$ に対しては、(7.137) は成り立たない。

7.4 §5.3 の再考

半自由粒子の場合は、(6.89) より、

$$\frac{d}{dt}\hat{T}(t)A = i\hat{T}(t)\hat{H}^\dagger A \tag{7.139}$$

となる。ここで、$\hat{T}(t)A$ は、

$$\mathrm{Tr}[\rho(t)A] = \mathrm{Tr}[\rho(0)\hat{T}(t)A] \tag{7.140}$$

で定義される、超演算子形式での A のハイゼンベルグ描像である。

(7.139) を受けて、(5.75) すなわち、

$$d\rho_f(t) = -id\hat{\mathcal{H}}_{f,t}\rho_f(t) \tag{7.141}$$

に対して、A のハイゼンベルグ方程式は、

$$d\hat{T}_f(t)A = i\hat{T}_f(t)d\hat{\mathcal{H}}^\dagger_{f,t}A \tag{7.142}$$

であると仮定する。この式の右辺で、

$$id\hat{\mathcal{H}}^\dagger_{f,t}A = i\hat{H}_S A dt + \hat{\Pi}^\dagger A dt + id\hat{M}^\dagger_t A \tag{7.143}$$

である。ボソン系では、

$$\begin{aligned}
\hat{\Pi} &= \kappa(a\tilde{a} - a^\dagger a) + \kappa(a\tilde{a} - \tilde{a}^\dagger\tilde{a}) + 2\kappa\bar{n}(a\tilde{a} - aa^\dagger - \tilde{a}^\dagger\tilde{a} + a^\dagger\tilde{a}^\dagger), && (7.144)\\
\hat{\Pi}^\dagger &= \kappa(a^\dagger\tilde{a}^\dagger - a^\dagger a) + \kappa(a^\dagger\tilde{a}^\dagger - \tilde{a}^\dagger\tilde{a}) + 2\kappa\bar{n}(a^\dagger\tilde{a}^\dagger - aa^\dagger - \tilde{a}^\dagger\tilde{a} + a\tilde{a}), && (7.145)\\
d\hat{M}^{(\lambda)}_t &= i\sqrt{2\kappa}[a^\dagger - \tilde{a}](\mu dB_t + \nu d\tilde{B}^\dagger_t) + i\sqrt{2\kappa}[\tilde{a}^\dagger - a](\mu d\tilde{B}_t + \nu dB^\dagger_t)\\
&\quad -i\lambda\sqrt{2\kappa}(\mu a + \nu\tilde{a}^\dagger)(dB^\dagger_t - d\tilde{B}_t) - i\sqrt{2\kappa}(\mu\tilde{a} + \nu a^\dagger)(d\tilde{B}^\dagger_t - dB_t), && (7.146)\\
d\hat{M}^{(\lambda)\dagger}_t &= -i\sqrt{2\kappa}[a - \tilde{a}^\dagger](\mu dB^\dagger_t + \nu d\tilde{B}_t) - i\sqrt{2\kappa}[\tilde{a} - a^\dagger](\mu d\tilde{B}^\dagger_t + \nu dB_t)\\
&\quad +i\lambda\sqrt{2\kappa}(\mu a^\dagger + \nu\tilde{a})(dB_t - d\tilde{B}^\dagger_t) + i\sqrt{2\kappa}(\mu\tilde{a}^\dagger + \nu a)(d\tilde{B}_t - dB^\dagger_t) && (7.147)
\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
\hat{\Pi}^\dagger A &= \kappa(a^\dagger\tilde{a}^\dagger A - a^\dagger a A + a^\dagger\tilde{a}^\dagger A - \tilde{a}^\dagger\tilde{a}A)\\
&\quad +2\kappa\bar{n}(a^\dagger\tilde{a}^\dagger A - aa^\dagger A - \tilde{a}^\dagger\tilde{a}A + a\tilde{a}A)\\
&= \kappa(a^\dagger A a - a^\dagger a A + a^\dagger A a - A a^\dagger a)\\
&\quad +2\kappa\bar{n}(a^\dagger A a - aa^\dagger A - Aa^\dagger a + aAa^\dagger)\\
&= \kappa\big\{a^\dagger[A,a] + [a^\dagger,A]a\big\} + 2\kappa\bar{n}\big[a^\dagger,[A,a]\big], && (7.148)\\
\hat{T}_f(t)\hat{\Pi}^\dagger A dt &= \hat{T}_f(t)\Big(\big\{a^\dagger[A,a] + [a^\dagger,A]a\big\} + 2\kappa\bar{n}\big[a^\dagger,[A,a]\big]\Big)dt && (7.149)
\end{aligned}$$

となる [31)]。これは、(5.194) の右辺第 2 項に対応する。

[31)] $\hat{T}_f(t)A = \acute{A}(t)$ とかく。一般には、

$$\hat{T}_f(t)AB \neq \acute{A}(t)\acute{B}(t) \tag{7.150}$$

である。ただし、$A = a, a^\dagger$ の場合、$\hat{T}_f(t)\hat{\Pi}^\dagger A$ が $a, a^\dagger$ の 1 次なので、$\hat{T}_f(t)AB = \acute{A}(t)\acute{B}(t)$ を仮定して計算しても問題ない。

A を $A\otimes 1$ と思うと、例えば

$$\begin{aligned}[a-\tilde{a}^\dagger](\mu dB_t^\dagger+\nu d\tilde{B}_t)A &= [a-\tilde{a}^\dagger]A\otimes(\mu dB_t^\dagger+\nu d\tilde{B}_t)1\\ &= (aA-Aa)\otimes(\mu dB_t^\dagger 1+\nu 1 dB_t^\dagger)\\ &= [a,A]dB_t \end{aligned} \tag{7.151}$$

となる。また、

$$d\hat{M}_t^\dagger A=0 \tag{7.152}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} d\hat{M}_t^{(\lambda)\dagger}A &= -i\sqrt{2\kappa}[a-\tilde{a}^\dagger]AdB_t-i\sqrt{2\kappa}[\tilde{a}-a^\dagger]AdB_t^\dagger\\ &= -i\sqrt{2\kappa}[a,A]dB_t-i\sqrt{2\kappa}dB_t^\dagger[A,a^\dagger], \end{aligned} \tag{7.153}$$

$$\hat{T}_f(t)id\hat{M}_t^\dagger A = \hat{T}_f(t)\Big(\sqrt{2\kappa}[a,A]dB_t+\sqrt{2\kappa}dB_t^\dagger[A,a^\dagger]\Big) \tag{7.154}$$

となる。これは、(5.194) の第 2 行で $dB_t, dB_t^\dagger$ を入れ換えたものに対応する。

$\sum_\alpha c_\alpha a_\alpha R_\alpha$ のタイプの演算子（a_α は注目系,R_α は熱浴系の演算子で、c_α は c 数）に対して、

$$\big(\sum_\alpha c_\alpha a_\alpha R_\alpha\big)^\ddagger=\sum_\alpha c_\alpha^* a_\alpha^\dagger R_\alpha \tag{7.155}$$

という演算を導入する。また、$a_\alpha^\ddagger=a_\alpha^\dagger$ とする。このとき、

$$d\hat{T}_f(t)A = i\hat{T}_f(t)d\hat{\mathcal{H}}_{f,t}^\ddagger A \tag{7.156}$$

は、(5.194),(5.32) を再現する。また、

$$d\hat{T}_f(t)A = i\hat{T}_f(t)[i\hat{H}_S dt+\hat{\Pi}^\dagger dt+id\hat{M}_t]A \tag{7.157}$$

も同じ方程式を再現する。

7.5 Adjoint Equation

Liouville 空間 $\mathcal{L}$ を考える。(3.2) と違い、ここでは、$\langle\!\langle\bullet|$ を、

$$\begin{aligned}\langle\!\langle\bullet| &= \sum_{n,m}\langle n|\bullet|m\rangle^*\langle\!\langle nm|\\ &= \sum_{n,m}\langle m|\bullet^\dagger|n\rangle\langle\!\langle nm| \end{aligned} \tag{7.158}$$

とする。このとき、

$$\begin{aligned}\langle\!\langle A|B\rangle\!\rangle &= \sum_{n,m}\sum_{n',m'}\langle m|A^\dagger|n\rangle\langle n'|B|m'\rangle\langle\!\langle nm|n'm'\rangle\!\rangle\\ &= \sum_{n,m}\langle m|A^\dagger|n\rangle\langle n|B|m\rangle\\ &= \sum_m\langle m|A^\dagger B|m\rangle\\ &= \mathrm{Tr}(A^\dagger B) \end{aligned} \tag{7.159}$$

である。今、

$$\langle\langle i|j\rangle\rangle = \delta_{ij}, \tag{7.160}$$

$$\sum_i |i\rangle\rangle\langle\langle i| = 1 \tag{7.161}$$

を満たす $\mathcal{L}$ の基底 $\{|i\rangle\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ を考える。ここで、1 は $\mathcal{L}$ の元に作用する超演算子としての 1 である。第 2 式は、任意の演算子 A に対して、

$$|A\rangle\rangle = \sum_i \langle\langle i|A\rangle\rangle \cdot |i\rangle\rangle \tag{7.162}$$

を意味する。(3.37) の意味で、

$$|i\rangle\rangle \;\longleftrightarrow\; \check{e}_i \tag{7.163}$$

とすると、

$$\mathrm{Tr}[\check{e}_i^{\dagger}\check{e}_j] = \delta_{ij}, \tag{7.164}$$

$$A = \sum_i A_i\check{e}_i \quad , \quad A_i = \mathrm{Tr}[\check{e}_j^{\dagger}A] \tag{7.165}$$

である。今、

$$A\check{e}_i = \sum_j A_{ij}\check{e}_j \tag{7.166}$$

とかくと、(7.165) より、

$$A_{ij} = \mathrm{Tr}[\check{e}_j A\check{e}_i] \tag{7.167}$$

である。

(7.165) より、

$$\check{e}_i^{\dagger} = d_{ij}\check{e}_i\,, \quad d_{ij} = \mathrm{Tr}[\check{e}_j^{\dagger}\check{e}_i{}^{\dagger}] \tag{7.168}$$

とかける（アインシュタインの記法を使う。)。$[\check{e}_i^{\dagger}]^{\dagger} = \check{e}_i$ より、d_{ij} はユニタリー行列である。また、

$$\check{e}_i\check{e}_j = \eta_{ij}^{k}\check{e}_k \tag{7.169}$$

とかける。(7.165) の † より、

$$A = (A^{\dagger})^{\dagger} = A_i^{*}\check{e}_i^{\dagger}$$

なので、任意の演算子は

$$A = A_i^{*}\check{e}_i^{\dagger}, \quad A_i^{*} = \mathrm{Tr}[A\check{e}_i] \tag{7.170}$$

の形でかける。これは、

$$\langle\langle\check{e}_i^{\dagger}|\check{e}_j^{\dagger}\rangle\rangle = \delta_{ij}\,, \quad \sum_i |\check{e}_i^{\dagger}\rangle\rangle\langle\langle\check{e}_i^{\dagger}| = 1 \tag{7.171}$$

を意味する。

今、

$$\rho(t) = \hat{V}(t)\rho(0) \tag{7.172}$$

で $\hat{V}(t)$ を定義し、

$$\check{e}_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{V}(t)\check{e}_i \tag{7.173}$$

とする。このとき、

$$\rho(0) = \rho_i\check{e}_i \tag{7.174}$$

なら、

$$\rho(t) = \rho_i\check{e}_i(t) \tag{7.175}$$

である。今、

$$\mathrm{Tr}[\check{e}_i(t)A] = \mathrm{Tr}[\check{e}_i\acute{A}(t)] \tag{7.176}$$

で $\acute{A}(t)$ を定義し、$A_i(t)$ を

$$\acute{A}(t) = A_i(t)\check{e}_i^\dagger \tag{7.177}$$

で定義する。(7.164),(7.177) より、

$$A_i(t) = \mathrm{Tr}[\acute{A}(t)\check{e}_i] = \mathrm{Tr}[\check{e}_i(t)A] \tag{7.178}$$

である。よって、

$$\acute{A}(t) = \mathrm{Tr}[\check{e}_i(t)A]\check{e}_i^\dagger \tag{7.179}$$

となる。明らかに、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\check{e}_i(t) &= -i\hat{H}\check{e}_i(t)\\ &= -i[H_S,\check{e}_i(t)] + \hat{\Pi}\check{e}_i(t)\end{aligned} \tag{7.180}$$

である。今、

$$\hat{\Pi}\bullet = \sum_\alpha \mathcal{A}_\alpha \bullet \mathcal{B}_\alpha \tag{7.181}$$

とかく。ただし、$\rho(t)$ のエルミート性から、

$$[\hat{\Pi}\bullet]^\dagger = \sum_\alpha \mathcal{B}_\alpha^\dagger \bullet^\dagger \mathcal{A}_\alpha^\dagger = \sum_\alpha \mathcal{A}_\alpha \bullet^\dagger \mathcal{B}_\alpha \tag{7.182}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\acute{A}(t) &= \mathrm{Tr}\Big[\Big\{-i[H_S,\check{e}_i(t)] + \sum_\alpha \mathcal{A}_\alpha\check{e}_i(t)\mathcal{B}_\alpha\Big\}A\Big]\check{e}_i^\dagger\\ &= \mathrm{Tr}\Big[-iH_S\check{e}_i(t)A + \check{e}_i(t)H_SA + i\sum_\alpha \mathcal{A}_\alpha\check{e}_i(t)\mathcal{B}_\alpha A\Big]\check{e}_i^\dagger\\ &= \mathrm{Tr}\Big[\check{e}_i(t)\Big\{-iAH_S + iH_SA + \sum_\alpha \mathcal{B}_\alpha A\mathcal{A}_\alpha\Big\}\Big]\check{e}_i^\dagger\\ &= \Big[i[H_S,A] + \sum_\alpha \mathcal{B}_\alpha A\mathcal{A}_\alpha\Big]'(t)\end{aligned} \tag{7.183}$$

を得る。ところで、(7.182) より、

$$\sum_\alpha \mathcal{B}_\alpha A \mathcal{A}_\alpha = \sum_\alpha \mathcal{A}_\alpha^\dagger A \mathcal{B}_\alpha^\dagger \tag{7.184}$$

である。よって、

$$\hat{\Pi}^\dagger \bullet \stackrel{\text{def}}{=} \sum_\alpha \mathcal{A}_\alpha^\dagger \bullet \mathcal{B}_\alpha^\dagger \tag{7.185}$$

とすると、

$$\frac{d}{dt}\acute{A}(t) = \left[i\hat{H}_S A + \hat{\Pi}^\dagger A\right]'(t) \tag{7.186}$$

となる。これは、散逸がある Lioulle-von Neumann 方程式の Adjoint Equation [32] である。
任意の演算子 A, B を

$$A = A_i \check{e}_i\,, \quad B = B_i \check{e}_i \tag{7.187}$$

とかくと、

$$\begin{aligned} AB &= A_i B_j \check{e}_i \check{e}_j \\ &= A_i B_j \eta_{ij}^k \check{e}_k, \end{aligned} \tag{7.188}$$

$$\begin{aligned} (AB)'(t) &= A_i B_j \eta_{ij}^k \check{e}_k(t) \\ &= A_i B_j \eta_{ij}^k \varepsilon_{km}(t) \check{e}_m \end{aligned} \tag{7.189}$$

である。$\check{e}_i(t)$ を、

$$\check{e}_i(t) = \varepsilon_{ij}(t)\check{e}_j \tag{7.190}$$

とかくと、

$$\begin{aligned} \acute{A}(t)\acute{B}(t) &= A_i B_j \check{e}_i(t) \check{e}_j(t) \\ &= A_i B_j \varepsilon_{ik}(t)\varepsilon_{jl}(t)\check{e}_k\check{e}_l \\ &= A_i B_j \varepsilon_{ik}(t)\varepsilon_{jl}(t)\eta_{kl}^m \check{e}_m \end{aligned} \tag{7.191}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \acute{A}(t)\acute{B}(t) - (AB)'(t) &= A_i B_j[\varepsilon_{ik}(t)\eta_{kl}^m \varepsilon_{jl}(t) - \eta_{ij}^k \varepsilon_{km}(t)]\check{e}_m \\ &\equiv A_i B_j \Delta_{ij}^m(t)\check{e}_m \end{aligned} \tag{7.192}$$

である。
今、$\check{e}_i$ として、

$$\check{e}_{nm} = |n\rangle\langle m| \tag{7.193}$$

をとる。$\{|n\rangle\}$ は規格直交完全系である。このとき、

$$\begin{aligned} \check{e}_{nm}\check{e}_{kl} &= |n\rangle\langle m|k\rangle\langle l| \\ &= \delta_{mk}|n\rangle\langle l| \\ &= \delta_n^a \delta_l^b \delta_{mk}|a\rangle\langle b| \end{aligned} \tag{7.194}$$

[32] C.W.Gardiner,“*Quantum Noise*”(Springer-Verlag,1991)

であるから、

$$\eta^{ab}_{nm,kl} = \delta^a_n \delta^b_l \delta_{mk} \tag{7.195}$$

となる。よって、$\Delta^m_{ij}(t)$ に対応するのは、

$$\begin{aligned}\Delta^{ab}_{nm,kl}(t) &= \varepsilon_{nm,vu}(t)\eta^{ab}_{vu,cd}\varepsilon_{kl,cd}(t) - \eta^{cd}_{nm,kl}\varepsilon_{cd,ab}(t) \\ &= \varepsilon_{nm,vu}(t)\delta^a_v\delta^b_d\delta_{uc}\varepsilon_{kl,cd}(t) - \delta^c_n\delta^b_l\delta_{mk}\varepsilon_{cd,ab}(t) \\ &= \varepsilon_{nm,ac}(t)\varepsilon_{kl,cb}(t) - \delta_{mk}\varepsilon_{nl,ab}(t)\end{aligned} \tag{7.196}$$

である。

ボソン系について考える。$\{|n\rangle\}$ を個数状態とする。(7.180) より、

$$\frac{d}{dt}\check{e}_{nm}(t) = -i[H_S, \check{e}_{nm}(t)] + \hat{\Pi}\check{e}_{nm}(t) \tag{7.197}$$

である。この解は、(6.163) で $p_{su} = \delta_{sn}\delta_{um}$ としたもの

$$\begin{aligned}p^{(nm)}_{ab}(t) &= e^{i\omega(b-a)t}e^{\kappa t}e^{\frac{1}{2}f_z(t)} \sum_{u=\max(0,b-a)}^{\infty} \delta_{u+b-a,n}\delta_{u,m} \sum_{l=0}^{\min(u+b-a,u)} \frac{f^l_-(t)f^{l+b-u}_+(t)}{l!(l+b-u)!}\chi[l+b-u\geq 0] \\ &\quad\times\frac{\sqrt{(u+b-a)!u!a!b!}}{(u+b-a-l)!(u-l)!}e^{f_z(t)[\frac{b-a}{2}+u-l]}\end{aligned} \tag{7.198}$$

を用いて、

$$\check{e}_{nm}(t) = \sum_{a,b=0}^{\infty} p^{(nm)}_{ab}(t)\check{e}_{ab} \tag{7.199}$$

とかける。(7.179) は、

$$\begin{aligned}\acute{A}(t) &= \mathrm{Tr}[\check{e}_i(t)A]\check{e}^\dagger_i \\ &= A_j\mathrm{Tr}[\check{e}_i(t)\check{e}_j]\check{e}^\dagger_i\end{aligned} \tag{7.200}$$

であった。よって、

$$\begin{aligned}\acute{A}(t) &= A_{nm}\mathrm{Tr}[\check{e}_{cd}(t)\check{e}_{nm}]\check{e}^\dagger_{cd} \\ &= p^{(cd)}_{vu}(t)A_{nm}\mathrm{Tr}[\check{e}_{vu}\check{e}_{nm}]\check{e}^\dagger_{cd} \\ &= p^{(cd)}_{vu}(t)A_{nm}\mathrm{Tr}[\check{e}^\dagger_{uv}\check{e}_{nm}]\check{e}_{dc} \\ &= p^{(cd)}_{mn}(t)A_{nm}\check{e}_{dc} \\ &= \acute{A}_{dc}(t)\check{e}_{dc},\end{aligned} \tag{7.201}$$

$$\acute{A}_{dc}(t) = \sum_{n,m=0}^{\infty} p^{(cd)}_{mn}(t)A_{nm} \tag{7.202}$$

となる。特に、

$$p^{(cd)}_{mn}(\infty) = \bar{p}_n\delta_{nm}\,, \quad \bar{p}_n = [1-e^{-\omega/T}]e^{-n\omega/T} \tag{7.203}$$

より、

$$\acute{A}_{dc}(\infty) = \sum_{n=0}^{\infty}\bar{p}_nA_{nn} \equiv \bar{A} \tag{7.204}$$

である。右辺は成分 (d,c) によらず、A の熱平均である。

7.6 Gardiner の方法

(7.98),(7.100) より、

$$\frac{d}{dt}\rho^I_{tot}(t) = -i\hat{H}^I_1(t)\rho^I_{tot}(t) \tag{7.205}$$

である。$\hat{H}_1$ として、

$$\hat{H}^I_1(t) \;=\; R^I_\mu(t)a^I_\mu(t) \tag{7.206}$$

をとり、

$$R^I_\mu(t) \;=\; igb^\mu_t(t) \tag{7.207}$$

とすると、$b^\mu_t(t)$ が量子 Brown 運動である。Gardiner [33] は、

$$d\rho^I_{tot}(t) = g[dB^\mu_t a^I_\mu(t)\overset{\circ}{,}\rho^I_{tot}(t)] \tag{7.208}$$

を解析している。

---

[33] $Phys.Rev.$A **46**,4363(1992)

8　非同値真空

8.1　量子力学と場の量子論との相違

8.1.1　量子力学と場の量子論との相違

正準交換関係

$$\Big[a_i, a_j^\dagger\Big] \;=\; \delta_{ij}\,, \quad \Big[b_i, b_j^\dagger\Big] = \delta_{ij} \tag{8.1}$$

を満たす N 組の生成演算子 $\{a_i^\dagger,\ b_i^\dagger\}_{i=1}^N$ と消滅演算子 $\{a_i,\ b_i\}_{i=1}^N$ を考える。この他の交換関係は 0 である。Bogoliubov 変換

$$a_i(\theta) \;=\; \cosh\theta_i a_l - \sinh\theta_i b_l^\dagger, \tag{8.2}$$

$$a_i^\dagger(\theta) \;=\; \cosh\theta_i a_l^\dagger - \sinh\theta_i b_l, \tag{8.3}$$

$$b_i(\theta) \;=\; \cosh\theta_i b_l - \sinh\theta_i a_l^\dagger, \tag{8.4}$$

$$b_i^\dagger(\theta) \;=\; \cosh\theta_i b_l^\dagger - \sinh\theta_i a_l \tag{8.5}$$

を考える。§ 2.3 で $\tilde{a}_i, \tilde{a}_i^\dagger$ を $b_i, b_i^\dagger$ と読み替えれば、そのまま§ 2.3 の公式が使える。上の変換は、ユニタリー変換

$$a_i(\theta) = U(\theta)a_iU^\dagger(\theta)\,, \quad b_i(\theta) = U(\theta)b_iU^\dagger(\theta) \tag{8.6}$$

である。ただし、

$$U(\theta) \;=\; \exp\Big(\sum_{i=1}^N \theta_i(b_i^\dagger a_i^\dagger - a_ib_i)\Big) \tag{8.7}$$

はユニタリー演算子である。

真空 $|0\rangle$ を

$$a_i|0\rangle = b_i|0\rangle = 0 \tag{8.8}$$

で定義する。新しい真空を

$$|0(\theta)\rangle \overset{\text{def}}{=} U(\theta)|0\rangle \tag{8.9}$$

で定義すると、

$$a_i(\theta)|0(\theta)\rangle = b_i(\theta)|0(\theta)\rangle = 0 \tag{8.10}$$

となる。(8.9) より，$|0(\theta)\rangle$ が新しい真空であるように見えるが，以下で示すようにそれは正しくない。(2.130) より、

$$\begin{aligned}
|0(\theta)\rangle \;&=\; \exp\Big(\sum_{i=1}^N a_i^\dagger b_i^\dagger \tanh\theta_i\Big)\exp\Big(-\sum_{i=1}^N [a_ia_i^\dagger + b_i^\dagger b_i]\ln\cosh\theta_i\Big)|0\rangle\rangle \\
&=\; \exp\Big(-\sum_{i=1}^N \ln\cosh\theta_i\Big)\exp\Big(\sum_{i=1}^N \tanh\theta_i a_i^\dagger b_i^\dagger\Big)|0\rangle\rangle \qquad (8.11)\\
&=\; \exp\Big(-\sum_{i=1}^N \ln\cosh\theta_i\Big)\prod_{i=1}^N\sum_{n_i=0}^\infty (\tanh\theta_i)^{n_i}|n_i\rangle_i|n_i\rangle_i \\
&=\; \exp\Big(-\sum_{i=1}^N \ln\cosh\theta_i\Big)\Big(\prod_{i=1}^N\sum_{n_i=0}^\infty\Big)\Big(\prod_{i=1}^N(\tanh\theta_j)^{n_j}\Big)|\{n_i\},\{n_i\}\rangle \qquad (8.12)
\end{aligned}$$

である。ただし、

$$|\{n_i\},\{m_i\}\rangle \;=\; \prod_{i=1}^{N}|n_i\rangle_i|m_i\rangle_i, \tag{8.13}$$

$$|n_i\rangle_i|m_i\rangle_i \;=\; \frac{1}{\sqrt{n_i!m_i!}}(a_i^\dagger)^{n_i}(b_i^\dagger)^{m_i}|0\rangle_i, \tag{8.14}$$

$$a_i|0\rangle_i = b_i|0\rangle_i \;=\; 0\,, \quad |0\rangle = \prod_{i=1}^{N}|0\rangle_i \tag{8.15}$$

である。この基底によって張られる，規格化可能なベクトルの全体を $|0\rangle$ 上の Fock 空間と言い，$\mathcal{H}(a,b)$ と書く。(8.12) の最後の式より，$|0(\theta)\rangle$ が $\mathcal{H}(a,b)$ の基底で展開されることが分かる。従って，$|0(\theta)\rangle$ は真空ではなく，真空 $|0\rangle$ 上の Fock 空間 $\mathcal{H}(a,b)$ に属する 1 つの状態ベクトルである。

今，ベクトル空間 $\mathcal{H}(a,b)$ を別の基底

$$|\{n_i\},\{m_i\}:\theta\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \Big[\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n_i!m_i!}}(a_i^\dagger(\theta))^{n_i}(b_i^\dagger(\theta))^{m_i}\Big]|0(\theta)\rangle \qquad n_i,m_i=0,1,2,\cdots \tag{8.16}$$

で表示することを考える。よって，(8.16) で張られる，規格化可能な任意のベクトルは $\mathcal{H}(a,b)$ に属する。逆に，$\mathcal{H}(a,b)$ の任意の元は基底 (8.16) で展開できることが分かる [34)]。量子力学には，真空（および Fock 空間）は 1 種類しかないのである（同値定理)。

しかし、$N\to\infty$ の時は、この限りではない。(8.12) で

$$-\sum_{i=1}^{\infty}\ln\cosh\theta_i = -\infty \tag{8.17}$$

のときは、$|0(\theta)\rangle$ は $\mathcal{H}(a,b)$ に属さない。

上では、a_i, b_i という 2 種類の粒子を考えたが、$a_i^{(old)}$ だけがあった時に、

$$a_i = a_{2i}^{(old)}\,, \quad b_i = a_{2i+1}^{(old)} \tag{8.18}$$

によって a_i, b_i を導入することができる。$a_i^{(old)}$ の張る Fock 空間 $\mathcal{H}(a^{(old)})=\mathcal{H}(a,b)$ と

$$a_{2i}^{(old)}(\theta)=a_i(\theta)\,, \quad a_{2i+1}^{(old)}(\theta)=b_i(\theta) \tag{8.19}$$

の張る Fock 空間 $\mathcal{H}(a^{(old)}(\theta))$ は非同値である。つまり、無限次元では、(2.10) を $\mathcal{H}(a^{(old)})$ の基底で展開するか、$\mathcal{H}(a^{(old)}(\theta))$ の基底で展開するかが問題となる。(2.12) が成立しないからである。しかし、自由度が加算無限の場合は、N を有限にしておき、最後に $N\to\infty$ とすれば、ほとんど問題ない。自由度が連続無限の時は、次の小節で議論するように、より深刻な問題が起こる。

なお、(2.131) は、

$$|0(\beta)\rangle\;=\;\exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_i\ln[1+n_i(\beta)]\Big)\exp\Big(\sum_i\sqrt{\frac{n_i(\beta)}{1+n_i(\beta)}}a_i^\dagger\tilde{a}_i^\dagger\Big)|0\rangle\rangle \tag{8.20}$$

であった。ここで、

$$\sum_i\ln[1+n_i(\beta)]=\sum_i\ln\Big(1+\frac{1}{e^{\omega_l/T}-1}\Big) \tag{8.21}$$

34) これは，量子力学では，物理量の期待値は表示（基底）によらないことに対応する。

であり、ω_Λ を十分大きくとると、

$$\sum_{\omega_i>\omega_\Lambda} \ln\Big(1+\frac{1}{e^{\omega_l/T}-1}\Big) \approx \sum_{\omega_i>\omega_\Lambda} \frac{1}{e^{\omega_l/T}-1} \tag{8.22}$$

である。今、

$$\sum_i f(\omega_i) = \int d\omega\, D(\omega) f(\omega) \tag{8.23}$$

と近似すると、

$$\int_{\omega_\Lambda}^{\infty} d\omega\, D(\omega)\frac{1}{e^{\omega/T}-1} < \infty \tag{8.24}$$

ならば、$|0(\beta)\rangle\rangle$ は $|0\rangle\rangle$ と同値な真空である。この条件は $D(\omega)$ が ω^a のような関数なら満たされる。つまり、一般に $|0(\beta)\rangle\rangle$ は $|0\rangle\rangle$ と同値な真空である。

8.1.2 場の量子論と非同値真空

連続変数 μ でラベルされた，非可算無限自由度を持つ生成演算子 $a^\dagger(\mu)$，$b^\dagger(\mu)$ と消滅演算子 $a(\mu)$，$b(\mu)$ を考える。これらは正準交換関係

$$[a(\mu), a^\dagger(\mu')] \;=\; \delta(\mu-\mu')\,, \quad [b(\mu), b^\dagger(\mu')] = \delta(\mu-\mu') \tag{8.25}$$

を満たす。この他の交換関係は 0 である。また，真空 $|0\rangle$ を

$$a(\mu)|0\rangle = 0\,, \quad b(\mu)|0\rangle = 0 \tag{8.26}$$

によって導入する。$|0\rangle$ の上の Fock 空間を $\mathcal{H}[a,b]$ とする。$\mathcal{H}[a,b]$ は，$|0\rangle$ に $\alpha^\dagger(\mu)$，$b^\dagger(\mu)$ をくり返し作用させて得られる基底ベクトルによって張られる，規格化可能なベクトルの集合である。

ここで，新たな演算子

$$a_\theta(\mu) \;=\; U[\theta]a(\mu)U^\dagger[\theta]\,, \quad b_\theta(\mu) = U[\theta]b(\mu)U^\dagger[\theta] \tag{8.27}$$

をユニタリー演算子

$$U[\theta] \;=\; \exp\Big(\int d\mu\, \theta(\mu)\big[b^\dagger(\mu)a^\dagger(\mu) - a(\mu)b(\mu)\big]\Big) \tag{8.28}$$

により導入する。ただし，$\theta(\mu)$ は任意の滑らかな実 c 数関数である。前節と同様の計算により

$$a_\theta(\mu) \;=\; a(\mu)\cosh\theta(\mu) - b^\dagger(\mu)\sinh\theta(\mu), \tag{8.29}$$
$$b_\theta(\mu) \;=\; b(\mu)\cosh\theta(\mu) - a^\dagger(\mu)\sinh\theta(\mu) \tag{8.30}$$

を得る。この変換は Bogoliubov 変換と呼ばれる。

(8.27) より得られる

$$a(\mu) \;=\; U^\dagger[\theta]a_\theta(\mu)U[\theta]\,, \quad b(\mu) = U^\dagger[\theta]b_\theta(\mu)U[\theta] \tag{8.31}$$

を (8.26) に代入すると，

$$U^\dagger[\theta]a_\theta(\mu)U[\theta]|0\rangle = 0\,, \quad U^\dagger[\theta]b_\theta(\mu)U[\theta]|0\rangle = 0 \tag{8.32}$$

となる。ここで，状態

$$|0[\theta]\rangle \overset{\text{def}}{=} U[\theta]|0\rangle \tag{8.33}$$

を定義すると，この式は，

$$a_\theta(\mu)|0[\theta]\rangle = 0\,, \quad b_\theta(\mu)|0[\theta]\rangle = 0 \tag{8.34}$$

となる。

(8.28) を (8.33) に代入して，

$$\begin{aligned}
|0[\theta]\rangle &= \exp\Bigl(\int d\mu\ \tanh\theta(\mu)a^\dagger(\mu)b^\dagger(\mu)\Bigr) \\
&\qquad \times\exp\Bigl(-\int d\mu\ \ln\cosh\theta(\mu)[a(\mu)a^\dagger(\mu)+b^\dagger(\mu)b(\mu)]\Bigr)|0\rangle \\
&= \exp\Bigl(-\delta(\mu'=0)\int d\mu\ \ln\cosh\theta(\mu)\Bigr)\exp\Bigl(\int d\mu\ \tanh\theta(\mu)a^\dagger(\mu)b^\dagger(\mu)\Bigr)|0\rangle
\end{aligned} \tag{8.35}$$

を得る。ただし，第 1 等号でを用い $U[\theta]$ を $a(\mu)$，$a^\dagger(\mu)$ および $b(\mu)$，$b^\dagger(\mu)$ の正規積に近い形に書き直し，(8.26) を用いた。第 2 等号では，正準交換関係 (8.25) を用いた。(8.35) の最後の式は，$|0[\theta]\rangle$ を $\mathcal{H}[a,b]$ の元で展開した表式であるが，

$$-\delta(\mu'=0)\int d\mu\ \ln\cosh\theta(\mu) = -\infty \tag{8.36}$$

より，その展開係数は 0 である。これは $|0[\theta]\rangle$ が $\mathcal{H}[a,b]$ には属していないことを意味する。したがって，$|0[\theta]\rangle$ は $|0\rangle$ とは異なる新たな真空である（$|0\rangle$ とはユニタリー非同値な真空である）。これは，真空が 1 個しかない量子力学の場合との本質的な違いである。滑らかな関数 $\theta(\mu)$ は非可算無限個存在するので，非可算無限種類の真空が存在する。

§ 5.1.4 のように連続無限自由度の b_t を扱う時は、このような問題が生じる。つまり、温度の異なる真空 [35] は非同値である。

(8.35) の表式は係数が 0 となり，数学的には意味がない。数学的な解析は，数学的に意味のある Bogoliubov 変換 (8.29)，(8.30) や (8.34) を基礎に置くべきである。

有限自由度の場合は、Fock 空間は全て同値なので、Tr をどんな基底で計算してもよかった。非同値の真空が存在する場合、Tr をどの基底で計算するかが問題である。カノニカル集団は $e^{-\beta H}/\mathrm{Tr}[e^{-\beta H}]$ で記述されるが、場の量子論ではこれは well-defined でない（H のほとんどの固有値は $\pm\infty$ らしい）。量子系をはじめから自由度無限大にして扱う C^* 代数では、KMS 条件が出発点となる。第 2 章で、熱平均と TFD の真空期待値の同等性を証明したが、場の理論では証明はできない。むしろ、熱平均を TFD の真空期待値で定義する。なお、TFD を非平衡へ拡張するとき、以下に述べるダイナミカル・マップの扱いに注意しなくてはならない (観測粒子と、Fock 空間を構成する準粒子は同一でない。)

8.2 ダイナミカル・マップ

8.2.1 波束の導入と Fock 空間の連続集合

$a^\dagger(\mu)|0\rangle$ という状態のノルムは発散する：

$$\begin{aligned}
\|a^\dagger(\mu)|0\rangle\|^2 &= \langle 0|a(\mu)a^\dagger(\mu)|0\rangle \\
&= \langle 0|[a(\mu),a^\dagger(\mu)]|0\rangle \\
&= \delta(\mu=0) = \infty.
\end{aligned} \tag{8.37}$$

[35] ユニタリー表現（$\alpha = 1/2$）のケット真空である。$\alpha \neq 1/2$ の場合にもこの小節の議論を拡張できる。

これは交換関係が δ 関数を含んでいるために起こる。この交換関係は，2 乗可積分関数によってならさないと意味を持たない。つまり，$a(\mu)$ 上の Fock 空間 $\mathcal{H}[a]$ に作用するのは，$a(\mu)$ ではなく，

$$a_f = \int d\mu\, f(\mu)a(\mu) \tag{8.38}$$

である。ただし，$f(\mu)$ は 2 乗可積分な c 数関数

$$\int d\mu\, |f(\mu)|^2 < \infty \tag{8.39}$$

である。

$\{f_i(\mu)\}_{i=1}^{\infty}$ を，ある 2 乗可積分の規格直交完全系とする：

$$\langle f_i, f_j\rangle = \delta_{ij}\,, \quad \langle A, B\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int d\mu\, A^*(\mu)B(\mu). \tag{8.40}$$

このとき，任意の 2 乗可積分関数 $f(\mu)$ は $\{f_i(\mu)\}_{i=1}^{\infty}$ によって

$$f(\mu) = \sum_i c_i f_i(\mu)\,, \quad c_i = \langle f_i, f\rangle \tag{8.41}$$

と展開される。場の量子論で扱う自由度は，可算無限個なのである。(8.38) は，

$$\begin{aligned} a_f &= \int d^3k \sum_i c_i f_i(\mu)a(\mu) \\ &= \sum_i c_i a_i \end{aligned} \tag{8.42}$$

と書ける。ただし，

$$a_i \stackrel{\text{def}}{=} \int d\mu\, f_i(\mu)a(\mu) \tag{8.43}$$

である。a_i，$a_i^\dagger$ は，交換関係

$$\begin{aligned} [a_i, a_j^\dagger] &= \int d^3k d^3k'\, [a(\mu), a^\dagger(\mu')] f_i(\mu) f_j^*(\mu') \\ &= \int d^3k d^3k'\, \delta(\mu - \mu') f_i(\mu) f_j^*(\mu') \\ &= \int d^3k\, f_i(\mu) f_j^*(\mu) \\ &= \langle f_j, f_i\rangle \\ &= \delta_{ji} = \delta_{ij} \end{aligned} \tag{8.44}$$

を満たす。

$\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ の個数状態

$$|n_1, n_2, \cdots\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \Big[\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n_i!}} (a_i^\dagger)^{n_i}\Big]|0\rangle \tag{8.45}$$

を考える。ただし，$|0\rangle$ は

$$a_i|0\rangle = 0 \tag{8.46}$$

を満たす。ここで，個数状態の集合 $\{|n_1, n_2, \cdots\rangle\}$ のフェルミオン部分集合

$$\{|n_1, n_2, \cdots\rangle \,|\, n_i = 0, 1\} \tag{8.47}$$

を考える。この元は，

$$|n_1, n_2, \cdots\rangle \quad \longleftrightarrow \quad 0.n_1 n_2 \cdots \ (2\text{ 進数}) \tag{8.48}$$

のように 2 進数 $0.n_1n_2\cdots$ と 1 対 1 に対応する。よって，フェルミオン部分集合の濃度は，0 から 1 の間の実数全体の濃度に等しい。よって，フェルミオン部分集合は連続集合である（非可算無限個の状態を含む)。個数状態の全体 $\{|n_1, n_2, \cdots\rangle\}$ は，その部分集合が連続集合なので，連続集合である。

量子論では基底ベクトル $\{|i\rangle\}$ の重ね合わせの状態

$$|\rangle = \sum_i c_i |i\rangle \tag{8.49}$$

は，状態 $|i\rangle$ が確率 $|c_i|^2$ で観測される状態と解釈される。この確率解釈が可能なためには，あらゆる物理的状態空間は可算個の基底ベクトルで張られなくてはならない (分離可能性)。これは，個数状態の全体が，物理的状態空間の基底としては大きすぎることを意味している。そこで，0 集合と呼ばれる

$$\{|n_1, n_2, \cdots\rangle \,|\, \sum_i n_i < \infty\} \tag{8.50}$$

を考える。これは可算集合であり，真空 $|0\rangle$ を含んでいる。現実には有限個の粒子状態に興味があるので，0 集合上に構成された状態空間を考えればよい。この状態空間は Fock 空間と呼ばれる。

0 集合の選び方の自由度は，非可算無限個存在する。なぜなら，消滅演算子と真空の選び方が無数に存在するからである。真空の選択に非可算無限の自由度があるのは，個数状態の全体は連続集合なのに対して，Fock 空間の基底ベクトルは可算個であることに由来する。連続集合から可算部分集合を抽出する自由度は，非可算無限個ある。

8.2.2 準粒子とダイナミカルマップ

多数の異なる相の出現は，ハイゼンベルグ場の運動を，異なる Fock 空間で記述することに対応する。例えば，あるハミルトニアンで記述される同じ金属が，常伝導相と超伝導相を持つとする。金属の中での電子の運動は上向き, 下向きスピンを待つ電子の消滅演算子によって記述されるが，常伝導相でのそれ $a_\uparrow(\boldsymbol{k})$，$a_\downarrow(\boldsymbol{k})$ と超伝導相でのそれ $\alpha_\uparrow(\boldsymbol{k})$，$\alpha_\downarrow(\boldsymbol{k})$ とは異なる。常伝導状態は，$a_\uparrow(\boldsymbol{k})$，$a_\downarrow(\boldsymbol{k})$ で定義される真空 $|0\rangle$ の上に作られた Fock 空間で記述される。一方，超伝導状態は，$\alpha_\uparrow(\boldsymbol{k})$，$\alpha_\downarrow(\boldsymbol{k})$ で定義される真空 $|0\rangle\rangle$ の上に作られる Fock 空間で記述される。超伝導相の真空 $|0\rangle\rangle$ は，常伝導相の真空 $|0\rangle$ に Cooper 対が凝縮したものとして解釈される（(8.33) の $a(\mu)$，$b(\mu)$ を，フェルミオンの $a_\uparrow(\boldsymbol{k})$，$a_\downarrow(\boldsymbol{k})$ に置き換えた式から，この解釈が得られる)。

各 Fock 空間は，それぞれの真空への粒子凝縮の形によって区別され，異なる 0 集合を抽出している。Fock 空間が $a(\mu)$ に対する 0 集合上に作られているとき，$a^\dagger(\mu)$ により生成される粒子を準粒子と言う。ハイゼンベルグ場の漸近場（無限遠で観測にかかる場) は準粒子として選ぶことができる。しかし，漸近場が存在しない場合にも準粒子の概念は有用である。

いかなる演算子も，ある準粒子の真空の上の Fock 空間への作用として定義される。そこで，ハイゼンベルグ場 $\psi(x)$ は，準粒子場 $\varphi(x)$ または，準粒子の生成・消滅演算子 $a(\mu), a^\dagger(\mu)$ によって，

$$\psi(x) \;=\; \psi[x|\varphi] \tag{8.51}$$

$$\;=\; \psi[x|a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k})] \tag{8.52}$$

のように表わされる。ここで，$\psi[x|\bullet]$ は $\psi(x)$ を準粒子場 $\bullet$ で展開した表式を表わし，$\bullet$ が異なれば関数形も異なる。このように，ハイゼンベルグ場を準粒子場で表わしたものをダイナミカルマップと言う。

A 不確定性関係

ユニタリー表現では、ケット真空 (2.16), ブラ真空 (2.17) は、

$$|0\rangle \;=\; \rho^{1/2}|I\rangle, \tag{A.1}$$

$$\langle 1| \;=\; \langle I|\rho^{1/2} = |0\rangle^\dagger \tag{A.2}$$

となる。(2.20) より

$$\langle\cdots\rangle = \mathrm{Tr}(\rho\cdots) = \langle 1|\cdots|0\rangle \tag{A.3}$$

である。エルミート演算子 A, B に対して、

$$\breve{A} \overset{\text{def}}{=} A - \langle A\rangle, \quad \breve{B} \overset{\text{def}}{=} B - \langle B\rangle \tag{A.4}$$

を定義する。また、λ を実パラメーターとして、

$$|\lambda\rangle \overset{\text{def}}{=} (\breve{A} + \lambda\langle\breve{A}\breve{B}\rangle^*\breve{B})|0\rangle \tag{A.5}$$

とする。このとき、

$$\begin{aligned}\langle\lambda| \;&=\; |\lambda\rangle^\dagger \\ &=\; \langle 1|(\breve{A} + \lambda\breve{B}\langle\breve{A}\breve{B}\rangle)\end{aligned} \tag{A.6}$$

であり、(A.3) より

$$\begin{aligned}\langle\lambda|\lambda\rangle \;&=\; \langle\breve{A}^2\rangle + \lambda\langle\breve{A}\breve{B}\rangle^*\langle\breve{A}\breve{B}\rangle + \lambda\langle\breve{A}\breve{B}\rangle\langle\breve{A}\breve{B}\rangle^* + \lambda^2|\langle\breve{A}\breve{B}\rangle|^2\langle\breve{B}^2\rangle \\ &=\; \langle\breve{A}^2\rangle + 2\lambda|\langle\breve{A}\breve{B}\rangle|^2 + \lambda^2|\langle\breve{A}\breve{B}\rangle|^2\langle\breve{B}^2\rangle \qquad \text{(A.7)} \\ &=\; \langle\breve{B}^2\rangle|\langle\breve{A}\breve{B}\rangle|^2\big(\lambda + \frac{1}{\langle\breve{B}^2\rangle}\big)^2 - \frac{|\langle\breve{A}\breve{B}\rangle|^2}{\langle\breve{B}^2\rangle} + \langle\breve{A}^2\rangle \qquad \text{(A.8)}\end{aligned}$$

となる。$\langle\lambda|\lambda\rangle \geq 0$ であるから上式で $\lambda = -\langle\breve{B}^2\rangle^{-1}$ とすることで、

$$0 \leq -\frac{|\langle\breve{A}\breve{B}\rangle|^2}{\langle\breve{B}^2\rangle} + \langle\breve{A}^2\rangle$$

すなわち、

$$\langle\breve{A}^2\rangle\langle\breve{B}^2\rangle \geq |\langle\breve{A}\breve{B}\rangle|^2 \tag{A.9}$$

を得る。

今、

$$\Delta A \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2} = \sqrt{\langle\breve{A}^2\rangle}, \tag{A.10}$$

$$\Delta B \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\langle B^2\rangle - \langle B\rangle^2} = \sqrt{\langle\breve{B}^2\rangle}, \tag{A.11}$$

$$V_{AB} \overset{\text{def}}{=} \langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle = \langle\breve{A}\breve{B}\rangle \tag{A.12}$$

とすると、(A.9) は

$$\Delta A\Delta B \geq |V_{AB}| \tag{A.13}$$

となる。$V_{AB} = \langle \breve{A}\breve{B} \rangle$ を変形すると、

$$
\begin{aligned}
V_{AB} &= \frac{\langle \breve{A}\breve{B}\rangle + \langle \breve{B}\breve{A}\rangle}{2} + \frac{\langle [\breve{A}, \breve{B}]\rangle}{2} \\
&= \frac{\langle \breve{A}\breve{B}\rangle + \langle \breve{B}\breve{A}\rangle}{2} + \frac{\langle [A, B]\rangle}{2} \qquad \text{(A.14)}
\end{aligned}
$$

となり、この式の † から

$$
V_{AB}^{*} = \frac{\langle \breve{A}\breve{B}\rangle + \langle \breve{B}\breve{A}\rangle}{2} - \frac{\langle [A, B]\rangle}{2} \qquad \text{(A.15)}
$$

を得る。上 2 式より、

$$
\mathrm{Re}V_{AB} = \frac{\langle \breve{A}\breve{B}\rangle + \langle \breve{B}\breve{A}\rangle}{2}, \quad \mathrm{Im} = \frac{\langle [A, B]\rangle}{2i} \qquad \text{(A.16)}
$$

がわかる。よって、

$$
\begin{aligned}
|V_{AB}| &= \left[\left(\frac{\langle \breve{A}\breve{B}\rangle + \langle \breve{B}\breve{A}\rangle}{2}\right)^2 + \left(\frac{\langle [A, B]\rangle}{2i}\right)^2\right]^{1/2} \qquad \text{(A.17)} \\
&\geq \frac{1}{2}\left|\frac{\langle [A, B]\rangle}{i}\right| \qquad \text{(A.18)}
\end{aligned}
$$

となる。これを (A.13) に代入して、不確定性関係

$$
\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}\left|\frac{\langle [A, B]\rangle}{i}\right| \qquad \text{(A.19)}
$$

を得る。特に、

$$
[A, B] = i\hbar \qquad \text{(A.20)}
$$

のときは、

$$
\Delta A \Delta B \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \text{(A.21)}
$$

となる。

B　森公式

考えている系の演算子の組 $\{A_i\}_{i=1}^n$ を考える。考えている系のハット・ハミルトニアンを $\hat{H}$ とする。これは、

$$\langle 1|\hat{H} = 0 \tag{B.1}$$

を満たす。ハイゼンベルグ描像

$$A_i(t) \;=\; e^{i\hat{H}t}A_ie^{-i\hat{H}t} \tag{B.2}$$

で考える。運動方程式は、

$$\frac{d}{dt}A_i(t) = i[\hat{H}(t), A_i(t)] \tag{B.3}$$

である。

射影演算子 $\mathcal{P}$ を、

$$\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} A_i^\dagger|0\rangle\mathcal{A}^{ij}\langle 1|A_j, \tag{B.4}$$

$$\mathcal{A}^{ij}\mathcal{A}_{jk} \;=\; \delta^i_k, \quad \mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}^{jk} = \delta^k_i, \tag{B.5}$$

$$\mathcal{A}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \langle 1|A_iA_j^\dagger|0\rangle \tag{B.6}$$

で定義する [36]。このとき、

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^2 \;&=\; A_i^\dagger|0\rangle\mathcal{A}^{ij}\langle 1|A_jA_l^\dagger|0\rangle\mathcal{A}^{lm}\langle 1|A_m \\
&=\; A_i^\dagger|0\rangle\mathcal{A}^{ij}\mathcal{A}_{jl}\mathcal{A}^{lm}\langle 1|A_m \\
&=\; A_i^\dagger|0\rangle\delta^i_l\mathcal{A}^{lm}\langle 1|A_m \\
&=\; A_i^\dagger|0\rangle\mathcal{A}^{im}\langle 1|A_m \\
&=\; \mathcal{P}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

となる。また、

$$\mathcal{Q} \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \mathcal{P} \tag{B.8}$$

とする。次の公式が成り立つ：

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}A_i^\dagger|0\rangle \;&=\; A_i^\dagger|0\rangle - \langle 1|\bullet\mathcal{P}A_i^\dagger|0\rangle \\
&=\; A_i^\dagger|0\rangle - A_l^\dagger|0\rangle\mathcal{A}^{lj}\langle 1|A_jA_i^\dagger|0\rangle \\
&=\; A_i^\dagger|0\rangle - A_l^\dagger|0\rangle\delta^l_i \\
&=\; 0.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

(B.3) に $\langle 1|$ を作用させて、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle 1|A_i(t) \;&=\; i\langle 1|\big(\hat{H}(t)A_i(t) - A_i(t)\hat{H}(t)\big) \\
&=\; i\langle 1|e^{i\hat{H}t}\hat{H}A_ie^{-i\hat{H}t} - i\langle 1|e^{i\hat{H}t}A_i\hat{H}e^{-i\hat{H}t} \\
&=\; i\langle 1|\hat{H}A_ie^{-i\hat{H}t} - i\langle 1|A_i\hat{H}e^{-i\hat{H}t} \\
&=\; \langle 1|\dot{A}_ie^{-i\hat{H}t} \\
&=\; \langle 1|\dot{A}_i\mathcal{P}e^{-i\hat{H}t} + \langle 1|\dot{A}_i\mathcal{Q}e^{-i\hat{H}t}
\end{aligned} \tag{B.10}$$

[36] $i, j, \cdots$ について、アインシュタインの記法を使う。

を得る。ここで、

$$\dot{A}_i = i[\hat{H}, A_i] \tag{B.11}$$

である。

$$\begin{aligned}
\langle 1|\dot{A}_i\mathcal{P} &= \langle 1|\dot{A}_i A_l^\dagger|0\rangle\mathcal{A}^{lj}\langle 1|A_j \\
&= \Omega_i^j\langle 1|A_j, && \text{(B.12)}\\
\Omega_i^j &\stackrel{\text{def}}{=} \langle 1|\dot{A}_i A_l^\dagger|0\rangle\mathcal{A}^{lj}, && \text{(B.13)}\\
\langle 1|\dot{A}_i\mathcal{Q} &= \langle 1|\dot{A}_i - \Omega_i^j\langle 1|A_j \\
&= \langle 1|F_i, && \text{(B.14)}\\
F_i &\stackrel{\text{def}}{=} \dot{A}_i - \Omega_i^j A_j && \text{(B.15)}
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
(B.10) &= \Omega_i^j\langle 1|A_j e^{-i\hat{H}t} + \langle 1|F_i e^{-i\hat{H}t} \\
&= \Omega_i^j\langle 1|e^{i\hat{H}t}A_j e^{-i\hat{H}t} + \langle 1|e^{i\hat{H}t}F_i e^{-i\hat{H}t} \\
&= \Omega_i^j\langle 1|A_j(t) + \langle 1|F_i(t), && \text{(B.16)}\\
F_i(t) &= e^{-i\hat{H}t}F_i e^{-i\hat{H}t} \\
&= e^{-i\hat{H}t}(\dot{A}_i - \Omega_i^j A_j)e^{-i\hat{H}t} \\
&= \dot{A}_i(t) - \Omega_i^j A_j(t) && \text{(B.17)}
\end{aligned}$$

つまり、

$$\frac{d}{dt}\langle 1|A_i(t) = \Omega_i^j\langle 1|A_j(t) + \langle 1|F_i(t) \tag{B.18}$$

となる。

今、

$$R_i(t) = e^{i\hat{H}\mathcal{Q}t}F_i e^{-i\hat{H}\mathcal{Q}t} \tag{B.19}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_i(t) &= i\hat{H}\mathcal{Q}R_i(t) - iR_i(t)\hat{H}\mathcal{Q}, && \text{(B.20)}\\
\frac{d}{dt}\langle 1|R_i(t)A_j^\dagger|0\rangle &= i\langle 1|\hat{H}\mathcal{Q}R_i(t)A_j^\dagger|0\rangle - i\langle 1|R_i(t)\hat{H}\mathcal{Q}A_j^\dagger|0\rangle \\
&= 0 && \text{(B.21)}
\end{aligned}$$

となる。ただし、(B.9) と (B.1) を用いた。また、

$$\begin{aligned}
\langle 1|R_i(0)A_j^\dagger|0\rangle &= \langle 1|F_i A_j^\dagger|0\rangle \\
&= \langle 1|\dot{A}_i A_j^\dagger|0\rangle - \Omega_i^k\langle 1|A_k A_j^\dagger|0\rangle \\
&= \langle 1|\dot{A}_i A_j^\dagger|0\rangle - \langle 1|\dot{A}_i A_l^\dagger|0\rangle\mathcal{A}^{lk}\cdot\mathcal{A}_{kj} \\
&= \langle 1|\dot{A}_i A_j^\dagger|0\rangle - \langle 1|\dot{A}_i A_l^\dagger|0\rangle\delta_j^l \\
&= 0 && \text{(B.22)}
\end{aligned}$$

である。よって、

$$\langle 1|R_i(t)A_j^\dagger|0\rangle = \langle 1|R_i(0)A_j^\dagger|0\rangle = 0 \tag{B.23}$$

を得る。

次の量を考える：

$$\hat{W}(t) = e^{-i\hat{H}\mathcal{Q}t}. \tag{B.24}$$

これを s で微分して、

$$\frac{d}{dt}\hat{W}(t) = -\hat{W}(t)i\hat{H}\mathcal{Q} \tag{B.25}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[\hat{W}(t)e^{i\hat{H}t}] &= \frac{d}{dt}[\hat{W}(t)]e^{i\hat{H}t} + \hat{W}(t)\frac{d}{dt}e^{i\hat{H}t} \\
&= -\hat{W}(t)i\hat{H}\mathcal{Q}e^{i\hat{H}t} + \hat{W}(t)i\hat{H}e^{i\hat{H}t} \\
&= \hat{W}(t)i\hat{H}\mathcal{P}e^{i\hat{H}t}, \qquad \text{(B.26)} \\
\hat{W}(t)e^{i\hat{H}t} &= 1 + \int_0^t du\,\hat{W}(u)i\hat{H}\mathcal{P}e^{i\hat{H}u}, \\
\hat{W}(t) &= e^{-i\hat{H}t} + \int_0^t du\,\hat{W}(u)i\hat{H}\mathcal{P}e^{i\hat{H}(u-t)} \\
&= e^{-i\hat{H}t} + \int_0^t ds\,\hat{W}(t-s)i\hat{H}\mathcal{P}e^{-i\hat{H}s} \qquad \text{(B.27)}
\end{aligned}$$

となる。ところで、

$$\begin{aligned}
\langle 1|R_i(t) &= \langle 1|e^{i\hat{H}\mathcal{Q}t}F_i e^{-i\hat{H}\mathcal{Q}t} \\
&= \langle 1|F_i\hat{W}(t) \qquad \text{(B.28)}
\end{aligned}$$

であるから、(B.27) を代入して、

$$\begin{aligned}
\langle 1|R_i(t) &= \langle 1|F_i e^{-i\hat{H}t} + \langle 1|\int_0^t ds\,F_i e^{-i\hat{H}\mathcal{Q}(t-s)}i\hat{H}\mathcal{P}e^{-i\hat{H}s} \\
&= \langle 1|e^{i\hat{H}t}F_i e^{-i\hat{H}t} + \int_0^t ds\,\langle 1|e^{i\hat{H}\mathcal{Q}(t-s)}F_i e^{-i\hat{H}\mathcal{Q}(t-s)}i\hat{H}\mathcal{P}e^{-i\hat{H}s} \\
&= \langle 1|F_i(t) + \int_0^t ds\,\langle 1|R_i(t-s)i\hat{H}\mathcal{P}e^{-i\hat{H}s} \\
&= \langle 1|F_i(t) + \int_0^t ds\,\langle 1|R_i(t-s)i\hat{H}A_l^\dagger|0\rangle\mathcal{A}^{lj}\langle 1|A_j e^{-i\hat{H}s} \\
&= \langle 1|F_i(t) + \int_0^t ds\,\Gamma_i^j(t-s)\langle 1|A_j(s), \qquad \text{(B.29)} \\
\Gamma_i^j(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \langle 1|R_i(t)i\hat{H}A_l^\dagger|0\rangle\mathcal{A}^{lj} \qquad \text{(B.30)}
\end{aligned}$$

を得る。

(B.29) を (B.18) に代入して、森公式

$$\frac{d}{dt}\langle 1|A_i(t) = \Omega_i^j\langle 1|A_j(t) - \int_0^t ds\,\Gamma_i^j(t-s)\langle 1|A_j(s) + \langle 1|R_i(t) \tag{B.31}$$

を得る。右辺第 3 項が、ランダム力のようにも見える。
(B.31) に $A_j^\dagger|0\rangle$ を作用させて、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle 1|A_i(t)A_j^\dagger|0\rangle &= \Omega_i^j\langle 1|A_j(t)A_j^\dagger|0\rangle - \int_0^t ds\,\Gamma_i^j(t-s)\langle 1|A_j(s)A_j^\dagger|0\rangle + \langle 1|R_i(t)A_j^\dagger|0\rangle \\ &= \Omega_i^j\langle 1|A_j(t)A_j^\dagger|0\rangle - \int_0^t ds\,\Gamma_i^j(t-s)\langle 1|A_j(s)A_j^\dagger|0\rangle \qquad \text{(B.32)}\end{aligned}$$

を得る。ただし、(B.23) を用いた。今、

$$\Xi_i^k(t) \overset{\text{def}}{=} \langle 1|A_i(t)A_j^\dagger|0\rangle\mathcal{A}^{jk} \qquad \text{(B.33)}$$

とすると、上式より、

$$\frac{d}{dt}\Xi_i^k(t) = \Omega_i^j\Xi_j^k(t) - \int_0^t ds\,\Gamma_i^j(t-s)\Xi_j^k(s) \qquad \text{(B.34)}$$

を得る。(B.13),(B.33) より、

$$\Omega_i^k = \frac{d}{dt}\Xi_i^k(t)\Big|_{t=0} \qquad \text{(B.35)}$$

である。
なお、

$$\hat{H}|0\rangle = 0\,, \quad \hat{H}^\dagger = \hat{H} \qquad \text{(B.36)}$$

の時は、

$$\begin{aligned}\Gamma_i^j(t) &= \langle 1|R_i(t)i\hat{H}A_l^\dagger|0\rangle\mathcal{A}^{lj} \\ &= \langle 1|R_i(t)R_l^\dagger(0)|0\rangle\mathcal{A}^{lj} \qquad \text{(B.37)}\end{aligned}$$

である。実際、このとき、

$$\begin{aligned}\langle 1|R_i(t)R_l^\dagger(0)|0\rangle &= \langle 1|R_i(t)F_l^\dagger|0\rangle \\ &= \langle 1|R_i(t)\dot{A}_l^\dagger|0\rangle - \Omega_l^j\langle 1|R_i(t)A_j^\dagger|0\rangle \\ &= \langle 1|R_i(t)\dot{A}_l^\dagger|0\rangle \\ &= \langle 1|R_i(t)(i\hat{H}A_l - iA_l\hat{H})^\dagger|0\rangle \\ &= \langle 1|R_i(t)i\hat{H}A_l^\dagger|0\rangle - \langle 1|R_i(t)iA_l^\dagger\hat{H}|0\rangle \\ &= \langle 1|R_i(t)i\hat{H}A_l^\dagger|0\rangle \qquad \text{(B.38)}\end{aligned}$$

となる。

C　c 数空間へのマップ

$a, a^\dagger$ を

$$[a, a^\dagger] = 1\,, \quad [a, a] = 0 = [a^\dagger, a^\dagger] \tag{C.1}$$

を満たす生成・消滅演算子とする。さらに、

$$D(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a), \tag{C.2}$$

$$D(\alpha, s) \stackrel{\text{def}}{=} D(\alpha) \exp(\frac{1}{2} s|\alpha|^2), \tag{C.3}$$

$$\Delta_s(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} D(\alpha, s) \exp(-\alpha z^* + \alpha^* z) \tag{C.4}$$

とする [37)]。$a, a^\dagger$ で記述される系の状態を ρ とすると、

$$\rho_s(z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Tr}[\rho \Delta_{-s}(z)] \tag{C.6}$$

は、ρ と同じ情報を持つ。つまり、

$$\rho = \int \frac{d^2 z}{\pi} \rho_s(z) \Delta_s(z) \tag{C.7}$$

となる。一般に、$a, a^\dagger$ の任意関数 A に対して、

$$A \;=\; \int \frac{d^2 z}{\pi} A_s(z) \Delta_s(z), \tag{C.8}$$

$$A_s(z) \;=\; \mathrm{Tr}[A \Delta_{-s}(z)] \tag{C.9}$$

となる。これを示そう。

C.1　コヒーレント状態

公式

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^A e^B \qquad \text{for} \quad \big[A, [A, B]\big] = \big[B, [A, B]\big] = 0 \tag{C.10}$$

より（これは付録 E で示す）、

$$D(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} = e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger} \tag{C.11}$$

である。また、

$$\begin{aligned}
D(\alpha)D(\beta) \;&=\; e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} \cdot e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} e^{\beta a^\dagger} e^{-\beta^* a} \\
&=\; e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} e^{\beta a^\dagger} e^{-\beta^* a} \\
&=\; \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 - \alpha^* \beta) e^{\alpha a^\dagger} e^{\beta a^\dagger} e^{-\alpha^* a} e^{-\beta^* a} \\
&=\; \exp\big(-\frac{1}{2}|\alpha + \beta|^2 - \frac{1}{2}\alpha^* \beta + \frac{1}{2}\alpha \beta^*\big) e^{(\alpha+\beta)a^\dagger} e^{-(\alpha+\beta)^* a} \\
&=\; D(\alpha + \beta) e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)}, && \text{(C.12)} \\
D^\dagger(\alpha) \;&=\; \exp[(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)^\dagger] \\
&=\; D(-\alpha) && \text{(C.13)}
\end{aligned}$$

---

37) $\alpha = x + iy = re^{i\theta}$ とすると、

$$\int d^2\alpha \cdots \;\equiv\; \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdots = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\theta\, r \cdots \tag{C.5}$$

である。

である。

今、コヒーレント状態

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle \quad (a|0\rangle = 0, \langle 0|0\rangle = 1) \tag{C.14}$$

を定義すると、(C.11) より、

$$\begin{aligned}|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}(a^\dagger)^n|0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \end{aligned} \tag{C.15}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}a|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\sqrt{n}|n-1\rangle \\ &= \alpha e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\ &= \alpha|\alpha\rangle \end{aligned} \tag{C.16}$$

である。また、(C.12),(C.13),(C.11) より、

$$\begin{aligned}\langle\alpha|\beta\rangle &= \langle 0|D(-\alpha)D(\beta)|0\rangle \\ &= \langle 0|D(-\alpha+\beta)|0\rangle e^{\frac{1}{2}(-\alpha\beta^*+\alpha^*\beta)} \\ &= \exp(-\frac{1}{2}|-\alpha+\beta|^2)\langle 0|e^{(-\alpha+\beta)a^\dagger}e^{-(-\alpha+\beta)^*a}|0\rangle e^{\frac{1}{2}(-\alpha\beta^*+\alpha^*\beta)} \\ &= \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2-\frac{1}{2}|\beta|^2+\alpha^*\beta) \end{aligned} \tag{C.17}$$

となる。なお、(C.15) より、

$$\begin{aligned}\int\frac{d^2\alpha}{\pi}|\alpha\rangle\langle\alpha| &= \int\frac{d^2\alpha}{\pi}e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}}|n\rangle\langle m| \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dr\int_0^{2\pi}d\theta\, re^{-r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{r^n}{\sqrt{n!}}\frac{r^m}{\sqrt{m!}}e^{i\theta(n-m)}|n\rangle\langle m| \\ &= 2\int_0^{\infty}dr\, re^{-r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{2n}}{n!}|n\rangle\langle n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| \\ &= 1 \end{aligned} \tag{C.18}$$

である。ただし、(C.5) を用いた。上 2 式より、$\{|\alpha\rangle\}$ は規格非直交（過剰）完全系である。

C.2　対応関係

今、演算子 A に対して、

$$A' = \int\frac{d^2\alpha}{\pi}\mathrm{Tr}[AD^\dagger(\alpha)]D(\alpha) \tag{C.19}$$

とする。ところで、$\{|\alpha\rangle\}$ は完全系なので、

$$\mathrm{Tr}(\cdots) \;=\; \int \frac{d^2z}{\pi}\langle z|\cdots|z\rangle \tag{C.20}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[AD^\dagger(\alpha)] \;&=\; \int \frac{d^2z}{\pi}\langle z|AD^\dagger(\alpha)|z\rangle \\
&= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\langle z|A|w\rangle\langle w|D^\dagger(\alpha)|z\rangle \\
&= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\langle z|A|w\rangle\langle 0|D(-w)D(-\alpha)D(z)|0\rangle \\
&= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\langle z|A|w\rangle\langle 0|D(-w)D(-\alpha+z)|0\rangle e^{\frac{1}{2}(-\alpha z^*+\alpha^* z)} \\
&= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\langle z|A|w\rangle\langle 0|D(-\alpha+z-w)|0\rangle \\
&\quad \times \exp\big[-w\frac{1}{2}(-\alpha+z)^* + w^*\frac{1}{2}(-\alpha+z)\big]e^{\frac{1}{2}(-\alpha z^*+\alpha^* z)} \\
&= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\langle z|A|w\rangle \\
&\quad \times \exp\frac{1}{2}\big[-|-\alpha+z-w|^2 - (-\alpha+z)w^* + (-\alpha+z)^* w - \alpha z^* + \alpha^* z\big] \\
&= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\langle z|A|w\rangle \exp\big[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|z|^2+|w|^2) + zw^* + z\alpha^* - \alpha w^*\big]
\end{aligned} \tag{C.21}$$

となる[38]。ただし、(C.12),(C.13) を使った。(C.21),(C.19),(C.22) より、

$$\begin{aligned}
\langle\beta|A'|\gamma\rangle \;&=\; \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\mathrm{Tr}[AD^\dagger(\alpha)]\langle\beta|D(\alpha)|\gamma\rangle \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\mathrm{Tr}[AD^\dagger(\alpha)]\exp\big[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2) + \gamma\beta^* - \gamma\alpha^* + \beta\alpha^*\big] \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\langle z|A|w\rangle \exp\big[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|z|^2+|w|^2) + zw^* + z\alpha^* - \alpha w^*\big] \\
&\quad \times \exp\big[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2) + \gamma\beta^* - \gamma\alpha^* + \beta\alpha^*\big] \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\langle z|A|w\rangle \exp\big[-|\alpha|^2 + \alpha^*(z-\gamma) + \alpha(\beta^*-w^*)\big] \\
&\quad \times \exp\big[-\frac{1}{2}(|z|^2+|w|^2) + zw^* - \frac{1}{2}(|\beta|^2+|\gamma|^2) + \gamma\beta^*\big].
\end{aligned} \tag{C.23}$$

今、

$$\alpha = a + ib, \quad z-\gamma = A, \quad \beta^* - w^* = B \tag{C.24}$$

---

[38] この計算より、

$$\langle w|D(-\alpha)|z\rangle \;=\; \exp\frac{1}{2}\big[-|-\alpha+z-w|^2 - (-\alpha+z)w^* + (-\alpha+z)^* w - \alpha z^* + \alpha^* z\big] \tag{C.22}$$

とかくと、

$$
\begin{aligned}
& -|\alpha|^2+\alpha^*(z-\gamma)+\alpha(\beta^*-w^*) \\
= & -a^2-b^2+(a-ib)A+(a+ib)B \\
= & -a(a-A-B)-b(b+iA-iB) \\
= & -(a-[A+B]/2)^2+(A+B)^2/4-(b+i[A-B]/2)+i^2(A-B)^2/4 \\
= & -(a-[A+B]/2)^2-(b+i[A-B]/2)+AB
\end{aligned}
\tag{C.25}
$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
& \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \exp\big[-|\alpha|^2+\alpha^*(z-\gamma)+\alpha(\beta^*-w^*)\big] \\
= & \frac{1}{\pi}(\sqrt{\pi})^2 \exp[AB] \\
= & \exp[(z-\gamma)(\beta^*-w^*)] \\
= & \exp[\beta^* z - z w^* - \gamma\beta^* + w^*\gamma]
\end{aligned}
\tag{C.26}
$$

となる。従って、

$$
\begin{aligned}
(C.23) = & \int\int \frac{d^2 z}{\pi} \int \frac{d^2 w}{\pi} \langle z|A|w\rangle \exp\big[-\frac{1}{2}(|z|^2+|w|^2)+\beta^* z-\frac{1}{2}(|\beta|^2+|\gamma|^2)+w^*\gamma\big] \\
= & \int\int \frac{d^2 z}{\pi} \int \frac{d^2 w}{\pi} \langle \beta|z\rangle\langle z|A|w\rangle\langle w|\gamma\rangle \\
= & \langle\beta|A|\gamma\rangle
\end{aligned}
\tag{C.27}
$$

を得る。これが任意の $|\beta\rangle, |\gamma\rangle$ について成り立つので、

$$
A' = A \tag{C.28}
$$

である。つまり、(C.19) は、

$$
A = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \mathrm{Tr}[AD^\dagger(\alpha)] D(\alpha) \tag{C.29}
$$

となる。
　今、

$$
\alpha = a + ib, \quad z = x + iy \tag{C.30}
$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
\alpha z^* - \alpha^* z = & (a+ib)(x-iy)-(a-ib)(x+iy) \\
= & 2i(-ay+bx)
\end{aligned}
\tag{C.31}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
\int \frac{d^2 z}{\pi} e^{\alpha z^* - \alpha^* z} = & \int \frac{dxdy}{\pi} e^{2i(-ay+bx)} \\
= & \pi\delta(-a)\delta(b) \\
= & \pi\delta(a)\delta(b) \equiv \pi\delta^2(\alpha)
\end{aligned}
\tag{C.32}
$$

となる。これを用いて、(C.4) を逆フーリエ変換して、

$$D(\alpha,s) \,=\, D(\alpha)\exp(\frac{1}{2}s|\alpha|^2) = \int \frac{d^2z}{\pi}\Delta_s(z)e^{\alpha z^*-\alpha^* z},$$

$$D(\alpha) \,=\, \exp(-\frac{1}{2}s|\alpha|^2)\int \frac{d^2z}{\pi}\Delta_s(z)e^{\alpha z^*-\alpha^* z}, \tag{C.33}$$

$$D^\dagger(\alpha) \,=\, \exp(\frac{1}{2}s|\alpha|^2)\int \frac{d^2z}{\pi}\Delta_{-s}(z)e^{-\alpha z^*+\alpha^* z} \tag{C.34}$$

を得る。第 2 式と第 3 式では、s が -1 倍違う。これを (C.29) に代入して、

$$\begin{aligned}
A \,=&\, \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\mathrm{Tr}[\exp(\frac{1}{2}s|\alpha|^2)\int \frac{d^2z}{\pi}\Delta_{-s}(z)e^{-\alpha z^*+\alpha^* z}] \\
&\times \exp(-\frac{1}{2}s|\alpha|^2)\int \frac{d^2w}{\pi}\Delta_s(w)e^{\alpha w^*-\alpha^* w} \\
=&\, \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\mathrm{Tr}[A\Delta_{-s}(z)]\Delta_s(w)\int \frac{d^2\alpha}{\pi}e^{\alpha(w-z)^*-\alpha^*(w-z)} \\
=&\, \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\mathrm{Tr}[A\Delta_{-s}(z)]\Delta_s(w)\pi\delta(w-z) \\
=&\, \int \frac{d^2z}{\pi}\mathrm{Tr}[A\Delta_{-s}(z)]\Delta_s(z) \\
=&\, \int \frac{d^2z}{\pi}A_s(z)\Delta_s(z).
\end{aligned} \tag{C.35}$$

第 3 等号で (C.32) を、第 5 等号で (C.9) を用いた。上式は、(C.8) である。
　A, B を $a, a^\dagger$ の関数とする。(C.7) より、

$$A\rho B \,=\, \int \frac{d^2z}{\pi}\rho_s(z)A\Delta_s(z)B \tag{C.36}$$

である。また、(C.4) より、

$$A\Delta_s(z)B \,=\, \int \frac{d^2\alpha}{\pi}AD(\alpha,s)Be^{-\alpha z^*+\alpha^* z} \tag{C.37}$$

である。$A\Delta_s(z)B$ が、

$$A\Delta_s(z)B \,=\, f_s^{AB}(z,z^*;\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z^*})\Delta_s(z) \tag{C.38}$$

の形にかけるので、(C.36) より、

$$\begin{aligned}
A\rho B \,=&\, \int \frac{d^2z}{\pi}\rho_s(z)[f_s^{AB}(z,z^*;\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z^*})\Delta_s(z)] \\
=&\, \int \frac{d^2z}{\pi}[f_s'^{AB}(z,z^*;\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z^*})\rho_s(z)]\Delta_s(z)
\end{aligned} \tag{C.39}$$

となる。$f_s'^{AB}$ は部分積分を実行して、微分を $\rho_s(z)$ に移したときの関数形である。上式は、

$$(A\rho B)_s(z) = f_s'^{AB}(z,z^*;\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z^*})\rho_s(z) \tag{C.40}$$

を意味する。これによって、$\rho(t)$ についての、散逸がある場合の（なくても良いが）Liouville 方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_s(z,t) = F_s(z,z^*;\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z^*})\rho_s(z,t) \tag{C.41}$$

のタイプの方程式となる。これを解けば、(C.7) によって、$\rho(t)$ がわかる。

$f_s'^{AB}$ を求めよう。(C.11) より、

$$\begin{aligned} D(\alpha, s) &= e^{\frac{1}{2}(s-1)|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} \\ &= e^{\frac{1}{2}(s+1)|\alpha|^2} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger} \end{aligned} \tag{C.42}$$

であるから、

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} D(\alpha, s) = \big[\frac{1}{2}(s-1)\alpha^* + a^\dagger\big] D(\alpha, s) = D(\alpha, s)\big[\frac{1}{2}(s+1)\alpha^* + a^\dagger\big], \tag{C.43}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^*} D(\alpha, s) = D(\alpha, s)\big[\frac{1}{2}(s-1)\alpha - a\big] = \big[\frac{1}{2}(s+1)\alpha - a\big] D(\alpha, s) \tag{C.44}$$

であり、これより、

$$a D(\alpha, s) = \big[\frac{1}{2}(s+1)\alpha - \frac{\partial}{\partial \alpha^*}\big] D(\alpha, s), \tag{C.45}$$

$$a^\dagger D(\alpha, s) = \big[-\frac{1}{2}(s-1)\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha}\big] D(\alpha, s), \tag{C.46}$$

$$D(\alpha, s) a = \big[\frac{1}{2}(s-1)\alpha^* - \frac{\partial}{\partial \alpha^*}\big] D(\alpha, s), \tag{C.47}$$

$$D(\alpha, s) a^\dagger = \big[-\frac{1}{2}(s+1)\alpha^* + \frac{\partial}{\partial \alpha}\big] D(\alpha, s) \tag{C.48}$$

を得る。これと (C.37) より、

$$\begin{aligned} a\Delta_s(z) &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} a D(\alpha, s) e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \big[\frac{1}{2}(s+1)\alpha D(\alpha, s) - \frac{\partial}{\partial \alpha^*} D(\alpha, s)\big] e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \big[-\frac{1}{2}(s+1) D(\alpha, s) \frac{\partial}{\partial z^*} e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} + D(\alpha, s) \frac{\partial}{\partial \alpha^*} e^{-\alpha z^* + \alpha^* z}\big] \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \big[-\frac{1}{2}(s+1) \frac{\partial}{\partial z^*} + z\big] D(\alpha, s) e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} \\ &= \big[z - \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big] \Delta_s(z) \end{aligned} \tag{C.49}$$

同様に、

$$a^\dagger \Delta_s(z) = \big[z^* - \frac{1}{2}(s-1)\frac{\partial}{\partial z}\big] \Delta_s(z), \tag{C.50}$$

$$\Delta_s(z) a = \big[z - \frac{1}{2}(s-1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big] \Delta_s(z), \tag{C.51}$$

$$\Delta_s(z) a^\dagger = \big[z^* - \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z}\big] \Delta_s(z) \tag{C.52}$$

を得る。(C.36) より、

$$\begin{aligned} a\rho &= \int \frac{d^2 z}{\pi} \rho_s(z) \big[z - \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big] \Delta_s(z) \\ &= \int \frac{d^2 z}{\pi} \big\{\big[z + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big] \rho_s(z)\big\} \Delta_s(z) \end{aligned} \tag{C.53}$$

つまり、

$$(a\rho)_s(z) = \big[z + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big] \rho_s(z) \tag{C.54}$$

である。同様に、

$$(\rho a)_s(z) \;=\; \big[z + \frac{1}{2}(s-1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]\rho_s(z), \tag{C.55}$$

$$(a^\dagger \rho)_s(z) \;=\; \big[z^* + \frac{1}{2}(s-1)\frac{\partial}{\partial z}\big]\rho_s(z), \tag{C.56}$$

$$(\rho a^\dagger)_s(z) \;=\; \big[z^* + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z}\big]\rho_s(z) \tag{C.57}$$

を得る。また、

$$(a^2\rho)_s(z) \;=\; \big[z + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]^2\rho_s(z), \tag{C.58}$$

$$\begin{aligned}(a\rho a^\dagger)_s(z) \;&=\; \big[z^* + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z}\big]\Big(\big[z + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]\rho_s(z)\Big) \\ &=\; \big[z + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]\Big(\big[z^* + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z}\big]\rho_s(z)\Big),\end{aligned} \tag{C.59}$$

$$(a^\dagger a\rho)_s(z) \;=\; \big[z^* + \frac{1}{2}(s-1)\frac{\partial}{\partial z}\big]\Big(\big[z + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]\rho_s(z)\Big) \tag{C.60}$$

などである。

Π が (3.15) のときの (3.14) は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho_s(z,t) \;&=\; \Big[-i\omega\big(\frac{\partial}{\partial z^*}z^* - \mathrm{c.c.}\big) + \kappa\big(\frac{\partial}{\partial z^*}z^* + \mathrm{c.c.}\big) \\ &\qquad +2\kappa(\bar{n}+\nu)\frac{\partial^2}{\partial z^*\partial z}\Big]\rho_s(z,t),\end{aligned} \tag{C.61}$$

$$\nu \;=\; \frac{1+s}{2} \tag{C.62}$$

となる。

C.3 諸公式

(C.22),(C.32) より、

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[D(\alpha)] \;&=\; \int \frac{d^2z}{\pi}\langle z|D(z)|z\rangle \\ &=\; e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\int \frac{d^2z}{\pi}e^{\alpha z^* - \alpha^* z} \\ &=\; e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\pi\delta^2(\alpha) \\ &=\; \pi\delta^2(\alpha)\end{aligned} \tag{C.63}$$

である。これと、(C.12) より、

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[D(\alpha)D(\beta)] \;&=\; \mathrm{Tr}[D(\alpha+\beta)]e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)} \\ &=\; \pi\delta^2(\alpha+\beta)e^{\frac{1}{2}(\alpha\alpha^* - \alpha^*\alpha)} \\ &=\; \pi\delta^2(\alpha+\beta)\end{aligned} \tag{C.64}$$

を得る。これと、(C.4) より、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[\Delta_s(z)\Delta_{-s}(w)] &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\int \frac{d^2\beta}{\pi}\mathrm{Tr}[D(\alpha)D(\beta)]e^{\frac{1}{2}s|\alpha|^2}e^{-\alpha z^*+\alpha^* z}e^{-s\frac{1}{2}|\beta|^2}e^{-\beta w^*+\beta^* w} \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\int \frac{d^2\beta}{\pi}\pi\delta^2(\alpha)e^{\frac{1}{2}s|\alpha|^2}e^{-\alpha z^*+\alpha^* z}e^{-s\frac{1}{2}|\beta|^2}e^{-\beta w^*+\beta^* w} \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}e^{-\alpha(z-w)^*+\alpha^*(z-w)} \\
&= \pi\delta^2(z-w). \qquad (C.65)
\end{aligned}$$

これと、(C.35) より、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[AB] &= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}A_s(z)B_{-s}(w)\mathrm{Tr}[\Delta_s(z)\Delta_{-s}(w)] \\
&= \int \frac{d^2z}{\pi}A_s(z)B_{-s}(z) = \int \frac{d^2z}{\pi}A_{-s}(z)B_s(z) \qquad (C.66)
\end{aligned}$$

を得る。特に、$B=\rho$ として、

$$\langle A\rangle \equiv \mathrm{Tr}[\rho A] = \int \frac{d^2z}{\pi}\rho_s(z)A_{-s}(z) = \int \frac{d^2z}{\pi}\rho_{-s}(z)A_s(z) \qquad (C.67)$$

を得る。

(C.4) より、

$$\begin{aligned}
z^{*n}z^m\Delta_{-s}(z) &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}D(\alpha,-s)z^{*n}z^m e^{-\alpha z^*+\alpha^* z} \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}D(\alpha,-s)(-1)^n\frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n\partial\alpha^{*m}}e^{-\alpha z^*+\alpha^* z} \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\big[(-1)^m\frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n\partial\alpha^{*m}}D(\alpha,-s)\big]e^{-\alpha z^*+\alpha^* z}. \qquad (C.68)
\end{aligned}$$

両辺を z で積分し、(C.32) を用いて、

$$\int \frac{d^2z}{\pi}z^{*n}z^m\Delta_{-s}(z) = \{(a^\dagger)^n a^m\}_s, \qquad (C.69)$$

$$\{(a^\dagger)^n a^m\}_s \stackrel{\mathrm{def}}{=} (-1)^m\frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n\partial\alpha^{*m}}D(\alpha,-s)\big|_{\alpha=0} \qquad (C.70)$$

を得る。(C.35) より、これは、

$$(\{(a^\dagger)^n a^m\}_s)_{-s}(z) = z^{*n}z^m \qquad (C.71)$$

を意味する。これと (C.67) より、

$$\langle\{(a^\dagger)^n a^m\}_s\rangle = \int \frac{d^2z}{\pi}\rho_s(z)z^{*n}z^m \qquad (C.72)$$

を得る。

ところで、(C.11) より、

$$\begin{aligned}
D(\alpha,-s) &= D(\alpha)e^{-\frac{1}{2}s|\alpha|^2} \\
&= e^{\frac{-1-s}{2}|\alpha|^2}e^{\alpha a^\dagger}e^{-\alpha^* a} = e^{\frac{1-s}{2}}e^{-\alpha^* a}e^{\alpha a^\dagger} \qquad (C.73)
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\{(a^\dagger)^n a^m\}_1 &= (-1)^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger}\Big|_{\alpha=0} \\ &= a^m (a^\dagger)^n, \qquad \text{(C.74)} \\ \{(a^\dagger)^n a^m\}_{-1} &= (-1)^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}\Big|_{\alpha=0} \\ &= (a^\dagger)^n a^m \qquad \text{(C.75)}\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\langle (a^\dagger)^n a^m \rangle &= \int \frac{d^2 z}{\pi} \rho_{-1}(z) z^{*n} z^m, \qquad \text{(C.76)} \\ \langle a^m (a^\dagger)^n \rangle &= \int \frac{d^2 z}{\pi} \rho_1(z) z^{*n} z^m \qquad \text{(C.77)}\end{aligned}$$

である。$\rho_{-1}(z)$ を P 関数, $\rho_1(z)$ を Q 関数という。また、

$$\begin{aligned}\{(a^\dagger)^n a^m\}_0 &= (-1)^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}\Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} (\alpha a^\dagger - \alpha^* a)^k \Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{(-1)^m}{(n+m)!} \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} (\alpha a^\dagger - \alpha^* a)^{n+m} \Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{1}{(n+m)!} \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} (\alpha a^\dagger + \alpha^* a)^{n+m} \Big|_{\alpha=0} \qquad \text{(C.78)}\end{aligned}$$

である。例えば、

$$\{a^\dagger a\}_0 = \frac{a^\dagger a + a a^\dagger}{2} \qquad \text{(C.79)}$$

であり、$\{(a^\dagger)^n a^m\}_0$ は、$a, a^\dagger$ について対称である。これは weyl 順序と呼ばれる。また、$\rho_0(z)$ を Wigner 関数という。

(C.54) から (C.57) は、

$$\rho \to F = (\text{任意の演算子}) \qquad \text{(C.80)}$$

としても成り立つ。いま、$s = 1$ とすると、(C.72),(C.54) より、

$$\begin{aligned}([a^\dagger]^n)_1(z) &= (z^*)^n, \qquad \text{(C.81)} \\ (a^m [a^\dagger]^n)_1(z) &= \left[z + \frac{\partial}{\partial z^*}\right]^m (z^*)^n \\ &= \sum_{r=0}^{m} {}_m C_r z^{m-r} \frac{\partial^r}{\partial z^{*r}} z^{*n} \\ &= \sum_{r=0}^{\min(n,m)} {}_m C_r z^{m-r} \frac{n!}{(n-r)!} z^{*(n-r)} \\ &= \sum_{r=0}^{\min(n,m)} \frac{m! n!}{r!(m-r)!(n-r)!} z^{m-r} z^{*(n-r)} \qquad \text{(C.82)}\end{aligned}$$

である。また、(C.55) より、

$$(Fa^n)_1(z) = z^n F_1(z) \tag{C.83}$$

なので、

$$z^{m-r} z^{*(n-r)} = ([a^\dagger]^{n-r} a^{m-r})_1(s) \tag{C.84}$$

である。(C.82),(C.84) より、

$$a^m [a^\dagger]^n = \sum_{r=0}^{\min(n,m)} \frac{m!n!}{r!(m-r)!(n-r)!} [a^\dagger]^{n-r} a^{m-r} \tag{C.85}$$

を得る。

D　Bogoliubov 変換

D.1　(8.6),(8.27) の導出

(8.6),(8.27) は

$$\alpha(\theta) = e^{iG(\theta)}\alpha e^{-iG(\theta)} \tag{D.1}$$

の形に書ける。ただし，

$$\alpha \ = \ a_i, b_i\,,\ \ a(\mu), b(\mu), \tag{D.2}$$
$$\alpha(\theta) \ = \ a_i(\theta), b_i(\theta)\,,\ \ a_\theta(\mu), b_\theta(\mu) \tag{D.3}$$

であり，

$$iG(\theta) = \sum_{i=1}^{N}\theta_i(b_i^\dagger a_i^\dagger - a_i b_i)\,,\ \ \int d\mu\,\theta(\mu)[b^\dagger(\mu)a^\dagger(\mu) - a(\mu)b(\mu)] \tag{D.4}$$

である。(D.1) の θ を $x\theta$ に置き換えたものを x で微分すると，

$$\frac{d}{dx}\alpha(x\theta) = e^{iG(x\theta)}[iG(\theta), \alpha]e^{-iG(x\theta)} \tag{D.5}$$

を得る。$\alpha = a_i$，b_i の場合，$[iG(\theta), \alpha]$ は

$$\begin{aligned}
[\sum_{j=1}^{N}\theta_j(b_j^\dagger a_j^\dagger - a_j b_j), a_i] \ &= \ \sum_{j=1}^{N}\theta_j b_j^\dagger[a_j^\dagger, a_i] \\
&= \ \sum_{j=1}^{N}\theta_j b_j^\dagger(-\delta_{ij}) \\
&= \ -\theta_i b_i^\dagger, && \text{(D.6)} \\
[\sum_{j=1}^{N}\theta_j(b_j^\dagger a_j^\dagger - a_j b_j), b_i] \ &= \ \sum_{j=1}^{N}\theta_j b_j^\dagger[b_j^\dagger, b_i]a_j^\dagger \\
&= \ \sum_{j=1}^{N}\theta_j(-\delta_{ij})a_j^\dagger \\
&= \ -\theta_i a_i^\dagger && \text{(D.7)}
\end{aligned}$$

となる。ただし，正準交換関係 を用いた。この 2 式を (D.5) に代入して，

$$\frac{d}{dx}a_i(x\theta) \ = \ -\theta_i b_i^\dagger(x\theta), \tag{D.8}$$
$$\frac{d}{dx}b_i(x\theta) \ = \ -\theta_i a_i^\dagger(x\theta) \tag{D.9}$$

を得る。$\alpha = a(\mu)$，$b(\mu)$ の場合，$[iG(\theta), \alpha]$ は

$$\begin{aligned}
\left[\int d\mu'\,\theta(\mu')[b^\dagger(\mu')a^\dagger(\mu') - a(\mu')b(\mu')], a(\mu)\right] &= \int d\mu'\,\theta(\mu')b^\dagger(\mu')[a^\dagger(\mu'), a(\mu)] \\
&= \int d\mu'\,\theta(\mu')b^\dagger(\mu')[-\delta(\mu-\mu')] \\
&= -\theta(\mu)b^\dagger(\mu), \qquad \text{(D.10)} \\
\left[\int d\mu'\,\theta(\mu')[b^\dagger(\mu')a^\dagger(\mu') - a(\mu')b(\mu')], b(\mu)\right] &= \int d\mu'\,\theta(\mu')[b^\dagger(\mu'), b(\mu)]a^\dagger(\mu') \\
&= \int d\mu'\,\theta(\mu')[-\delta(\mu-\mu')]a^\dagger(\mu') \\
&= -\theta(\mu)a^\dagger(\mu) \qquad \text{(D.11)}
\end{aligned}$$

となる。ただし，交換関係 (8.25) を用いた。この 2 式を (D.5) に代入して，

$$\frac{d}{dx}a_{x\theta}(\mu) = -\theta(\mu)b^\dagger_{x\theta}(\mu), \qquad \text{(D.12)}$$

$$\frac{d}{dx}b_{x\theta}(\mu) = -\theta(\mu)a^\dagger_{x\theta}(\mu) \qquad \text{(D.13)}$$

を得る。

今，

$$a = a_i, a(\mu), \quad b = b_i, b(\mu), \qquad \text{(D.14)}$$

$$a(\theta) = a_i(\theta), a_\theta(\mu), \quad b(\theta) = b_i(\theta), b_\theta(\mu), \qquad \text{(D.15)}$$

$$\theta = \theta_i, \theta(\mu) \qquad \text{(D.16)}$$

とすると，(D.8)，(D.9) および (D.12)，(D.13) は，まとめて

$$\frac{d}{dx}a(x\theta) = -\theta b^\dagger(x\theta), \qquad \text{(D.17)}$$

$$\frac{d}{dx}b(x\theta) = -\theta a^\dagger(x\theta) \qquad \text{(D.18)}$$

と書ける。この 2 式の $\dagger$ より

$$\frac{d}{dx}a^\dagger(x\theta) = -\theta b(x\theta), \qquad \text{(D.19)}$$

$$\frac{d}{dx}b^\dagger(x\theta) = -\theta a(x\theta) \qquad \text{(D.20)}$$

を得る。これらを初期条件

$$a^\dagger(0) = a^\dagger, \quad b^\dagger(0) = b^\dagger, \quad a(0) = a, \quad b(0) = b \qquad \text{(D.21)}$$

の下で解く。(D.17)，(D.20) は，

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a(x\theta) \\ b^\dagger(x\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(x\theta) \\ b^\dagger(x\theta) \end{pmatrix} \qquad \text{(D.22)}$$

と書ける。(D.18)，(D.19) はこの式の † に対応する。この式を $x=0$ から $x=1$ まで積分し，初期条件 (D.21) を用いると，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a(\theta) \\ b^\dagger(\theta) \end{pmatrix} &= \exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b^\dagger \end{pmatrix} \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a \\ b^\dagger \end{pmatrix} \\
&= \cosh\theta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b^\dagger \end{pmatrix} - \sinh\theta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b^\dagger \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a\cosh\theta - b^\dagger\sinh\theta \\ b^\dagger\cosh\theta - a\sinh\theta \end{pmatrix} \qquad \text{(D.23)}
\end{aligned}
$$

を得る。この第 1 成分が (8.2) または (8.29) であり，第 2 成分の † が (8.4) または (8.30) である。

D.2　(2.130), (8.12) の導出

今，

$$U(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{x(b^\dagger a^\dagger - ab)} = e^{x(S_+ - S_-)} \qquad \text{(D.24)}$$

を導入する。§ 6.4 の議論が、$\tilde{a} \to b$ の読み返でそのまま成り立つ。(6.134) すなわち、

$$
\begin{aligned}
e^{x(A_zS_z + A_-S_- + A_+S_+)} &= e^{f_+(x)S_+}e^{f_z(x)S_z}e^{f_-(x)S_-} && \text{(D.25)} \\
f_+(x) &= \frac{A_+}{\phi}\frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)}, && \text{(D.26)} \\
f_z(x) &= -2\ln[\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)], && \text{(D.27)} \\
f_-(x) &= \frac{A_-}{\phi}\frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)}, && \text{(D.28)} \\
\phi &= \sqrt{A_z^2/4 - A_-A_+} && \text{(D.29)}
\end{aligned}
$$

で、

$$A_z = 0\,, \quad A_+ = 1\,, \quad A_- = -1 \qquad \text{(D.30)}$$

として、

$$e^{x(S_+ - S_-)} = e^{S_+\tanh x}e^{-2S_z\ln\cosh x}e^{-S_-\tanh x} \qquad \text{(D.31)}$$

を得る。この式は、

$$U(z) = e^{\theta(b^\dagger a^\dagger - ab)} = e^{a^\dagger b^\dagger\tanh\theta}e^{-(aa^\dagger + b^\dagger b)\ln\cosh\theta}e^{-ab\tanh\theta} \qquad \text{(D.32)}$$

を意味する。

ユニタリー演算子 (8.7) は、(D.32) と $[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij}$ より，

$$e^{\sum_i\theta_i(b_i^\dagger a_i^\dagger - a_ib_i)} = e^{\sum_i a_i^\dagger b_i^\dagger\tanh\theta_i}e^{-\sum_i(a_ia_i^\dagger + b_i^\dagger b_i)\ln\cosh\theta_i}e^{-\sum_i a_ib_i\tanh\theta_i} \qquad \text{(D.33)}$$

となる。また，ユニタリー演算子 (8.28) については，(D.33) とのアナロジーから

$$\begin{aligned}
&\exp\Bigl(\int d\mu\,\theta(\mu)[b^\dagger(\mu)a^\dagger(\mu) - a(\mu)b(\mu)]\Bigr)\\
=\ &\exp\Bigl(\int d\mu\,a^\dagger(\mu)b^\dagger(\mu)\tanh\theta(\mu)\Bigr)\exp\Bigl(-\int d\mu\,[a(\mu)a^\dagger(\mu) + b^\dagger(\mu)b(\mu)]\ln\cosh\theta(\mu)\Bigr)\\
\times\ &\exp\Bigl(-\int d\mu\,a(\mu)b(\mu)\tanh\theta(\mu)\Bigr) \qquad \text{(D.34)}
\end{aligned}$$

となることが分かる。

E　Campbell-Hausdorff の公式 (C.10) の導出

$U(x)$ を

$$e^{x(A+B)} = U(x)e^{xB} \tag{E.1}$$

で定義する。ただし，x は実数パラメーターである。これを x で微分すると，

$$e^{x(A+B)}(A+B) = U'(x)e^{xB} + U(x)e^{xB}B \tag{E.2}$$

となる。ここで，

$$' \equiv \frac{d}{dx}$$

である。(E.2) に (E.1) を代入して，

$$\begin{aligned} U(x)e^{xB}(A+B) &= U'(x)e^{xB} + U(x)e^{xB}B, \\ U(x)e^{xB}A &= U'(x)e^{xB}, \\ U'(x) &= U(x)e^{xB}Ae^{-xB} \\ &\equiv U(x)f(x) \end{aligned} \tag{E.3}$$

を得る。ただし，

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} e^{xB}Ae^{-xB} \tag{E.4}$$

である。(E.3) を積分して

$$U(x) = U(0) + \int_0^x dy_1\, U(y_1)f(y_1) \tag{E.5}$$

を得る。(E.1) より

$$U(0) = 1 \tag{E.6}$$

である。(E.5) の右辺の $U(y_1)$ に (E.5) の右辺全体を代入し，この操作を繰り返して，

$$\begin{aligned} U(x) &= 1 + \int_0^x dy_1\, U(y_1)f(y_1) \\ &= 1 + \int_0^x dy_1\, f(y_1) + \int_0^x dy_1 \int_0^{y_1} dy_2\, U(y_2)f(y_2)f(y_1) \\ &= 1 + \int_0^x dy_1\, f(y_1) + \int_0^x dy_1 \int_0^{y_1} dy_2\, f(y_2)f(y_1) + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \cdots \int_0^{y_{n-1}} dy_n\, f(y_n)f(y_{n-1})\cdots f(y_1) \end{aligned} \tag{E.7}$$

を得る。

$f(x)$ を求める。(E.4) を x で微分して，

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{xB}BAe^{-xB} - e^{xB}ABe^{-xB} \\ &= e^{xB}[B,A]e^{-xB} \end{aligned} \tag{E.8}$$

を得る。さらに，x で微分して，

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{xB}B[B,A]e^{-xB} - e^{xB}[B,A]Be^{-xB} \\ &= e^{xB}\big[B,[B,A]\big]e^{-xB} \end{aligned} \tag{E.9}$$

となる。もし，

$$\big[B,[B,A]\big] = 0 \tag{E.10}$$

であるなら，

$$f''(x) = 0 \tag{E.11}$$

となる。また，(E.4)，(E.8) より，

$$f(0) = A, \tag{E.12}$$
$$f'(0) = [B,A] \tag{E.13}$$

である。この初期条件の下で (E.11) を解いて，

$$f(x) = A - [A,B]x \qquad \text{for} \quad \big[B,[B,A]\big] = 0 \tag{E.14}$$

を得る。これは，

$$f(x) = \frac{dg(x)}{dx}, \tag{E.15}$$
$$g(x) = Ax - \frac{1}{2}[A,B]x^2 \tag{E.16}$$

とも書ける。$g(0)$ は，

$$g(0) = 0 \tag{E.17}$$

である。(E.15) を (E.7) に代入して，

$$\begin{aligned} U(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x dy_1 \cdots \int_0^{y_{n-1}} dy_n \, \frac{dg(y_n)}{dy_n} \cdots \frac{dg(y_1)}{dy_1} \\ &= 1 + \int_0^x dy_1 \frac{dg(y_1)}{dy_1} + \int_0^x dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \, \frac{dg(y_2)}{dy_2}\frac{dg(y_1)}{dy_1} + \cdots \\ &= 1 + g(x) + \int_0^x g(y_1)\frac{dg(y_1)}{dy_1} + \int_0^x dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \, g(y_2)\frac{dg(y_2)}{dy_2}\frac{dg(y_1)}{dy_1} + \cdots \end{aligned} \tag{E.18}$$

を得る。

今，a，b を，互いに可換

$$[a,b] = 0 \tag{E.19}$$

な演算子として，

$$h(x) = \alpha(x)a + \beta(x)b \tag{E.20}$$

を定義する。(E.19) のために，

$$h^n(x) = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r \alpha^r(x)\beta^{n-r}(x)a^r b^{n-r} \tag{E.21}$$

となる。このとき，

$$\frac{d}{dx}h^n(x) = nh^{n-1}(x)\frac{dh(x)}{dx} = n\frac{dh(x)}{dx}h^{n-1}(x) \tag{E.22}$$

となることは，c 数関数のときと同様に示せる。今，

$$a \;=\; A, \quad b = [A, B] \tag{E.23}$$

選ぶと，もしも，

$$\big[A, [A, B]\big] = 0 \tag{E.24}$$

であるなら，(E.19) が成立し，したがって (E.22) が成り立つ。よって，(E.24) のとき，

$$\begin{aligned}
g(y_1)\frac{dg(y_1)}{dy_1} \;&=\; \frac{d}{dy_1}[\frac{1}{2}g(y_1)], \\
\int_0^x dy_1 \int_0^{y_1} dy_2\, g(y_2)\frac{dg(y_2)}{dy_2}\frac{dg(y_1)}{dy_1} \;&=\; \int_0^x dy_1 \int_0^{y_1} dy_2\, \frac{d}{dy_2}[\frac{1}{2}g^2(y_2)]\frac{dg(y_1)}{dy_1} \\
&=\; \int_0^x dy_1\, \frac{1}{2}g^2(y_1)\frac{dg(y_1)}{dy_1} \\
&=\; \frac{1}{3!}g^3(x)
\end{aligned} \tag{E.25}$$

などが成立し，したがって (E.18) は，

$$\begin{aligned}
U(x) \;&=\; 1 + g(x) + \frac{1}{2!}g^2(x) + \frac{1}{3!}g^3(x) + \cdots \\
&=\; \exp\big(g(x)\big)
\end{aligned} \tag{E.26}$$

となる。これを (E.1) に代入して，

$$\begin{aligned}
e^{x(A+B)} \;&=\; \exp(Ax - \frac{1}{2}[A, B]x^2)e^{xB} \\
&=\; \exp\big(-\frac{1}{2}[A, B]x^2\big)e^{xA}e^{xB}
\end{aligned} \tag{E.27}$$

を得る。ただし，第 2 等号で再び (E.24) を用いた。この式で $x = 1$ として，

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]}e^A e^B \qquad \text{for} \quad \big[A, [A, B]\big] = \big[B, [A, B]\big] = 0 \tag{E.28}$$

を得る。