TFDおよびNETFD

中嶋 慧

平成25年1月20日

目 次

1　はじめに

このノートでは、まず TFD(Thermo Field Dynamics) について解説し (第 2 章)、次に NETFD(Non-Equlibrium TFD) の原理について解説する (第 3 章)。第 4 章では、半自由粒子について考える。第 5 章では､§ 2.3 との関係がある、非同値真空について述べる。付録では、本文で扱わなかった話題と、本文で証明なく使った式の導出を行う。

TFD は、もともと有限温度の場の理論の手法として導入された。第 2 章で示すように、この体系では、有限温度の統計平均が（倍加したヒルベルト空間の）真空平均でかける。これにより、一般の（絶対零度での）場の理論の手法の多くが、有限温度の場合にも使えるという利点がある。また、この見方をすることによって、チルダ粒子が熱自由度を司っているかのような視点が生まれ、熱・統計についての深遠な何かを捉えられるような気がする。しかし、このノートでは、場の理論については扱わない。

参考文献は以下の 3 つ：

柴田文明・有光敏彦・番雅司・北島佐知子『量子と非平衡系の物理』, 東京大学出版 (2009 年)

を第 2, 4 章で参考にした。また、

H.Umezawa(著), 有光敏彦・有光直子 (訳)『場の量子論
　　―ミクロ，マクロ，そして熱物理学の最前線』, 培風館 (1995 年)

を第 2 章, 第 5 章で参考にし、

鈴木増雄『統計力学』 , 岩波書店 (1994 年)

を第 2 章で参考にした。

2　TFD

2.1　チルダ粒子の導入

演算子 A に対して、そのチルダ共役演算子 $\tilde{A}(\equiv A^{\sim})$ を

$$
\begin{aligned}
(AB)^{\sim} &= \tilde{A}\tilde{B}, && (2.1)\\
c^{\sim} &= c^{*} \quad (c\ \text{は c 数}), && (2.2)\\
(A+B)^{\sim} &= \tilde{A}+\tilde{B}, && (2.3)\\
(\tilde{A})^{\sim} &= A, && (2.4)\\
[\tilde{A},B] &= 0 && (2.5)
\end{aligned}
$$

の関係によって導入する [1)]。また、ベクトル $|n\rangle$ に対してそのチルダ共役 $|n\rangle^{\sim}$ を導入する。このとき、任意の演算子 A に対して、

$$
(A|n\rangle)^{\sim} = \tilde{A}|n\rangle^{\sim} \tag{2.8}
$$

とする。

$\{|n\rangle\}$ を任意の規格直交完全系とし、

$$
|n,m\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |n\rangle \otimes |m\rangle^{\sim} \tag{2.9}
$$

とする。さらに、

$$
|I\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n |n,n\rangle \tag{2.10}
$$

を定義する。この $|I\rangle$ は規格直交完全系の選び方によらないことが、次のように示される。$\{|\mu\rangle\}$ を別の任意の規格直交完全系とすると、$|n\rangle$ は $\{|\mu\rangle\}$ で

$$
|n\rangle = \sum_\mu U_{n\mu}|\mu\rangle \tag{2.11}
$$

と展開できる。$U_{n\mu}$ はユニタリー行列である：

$$
\begin{aligned}
\sum_n U^{*}_{n\mu}U_{n\nu} &= \delta_{\mu\nu}, && (2.12)\\
\sum_\mu U_{n\mu}U^{*}_{m\mu} &= \delta_{nm}. && (2.13)
\end{aligned}
$$

(2.11) のチルダ共役を取ると、

$$
|n\rangle^{\sim} = \sum_\mu U^{*}_{n\mu}|\mu\rangle^{\sim} \tag{2.14}
$$

[1)] (2.4) は A がボソン的なときに正しい。A がフェルミオン的なときは、

$$
(\tilde{A})^{\sim} = -A \tag{2.6}
$$

とする。また、A, B がともにフェルミオン的なときは、(2.5) は、

$$
\{\tilde{A},B\} = 0 \tag{2.7}
$$

となる。

を得る。(2.11),(2.14) を (2.10) に代入して

$$\begin{aligned} |I\rangle &= \sum_n \sum_{\mu\nu} U_{n\mu} U^*_{n\nu} |\mu,\nu\rangle \\ &= \sum_{\mu\nu} \delta_{\mu\nu} |\mu,\nu\rangle \\ &= \sum_{\mu} |\mu,\mu\rangle \end{aligned} \tag{2.15}$$

を得る。第 2 等号で (2.12) を用いた。

ρ を考えている系の密度演算子とし、ケット真空 $|0\rangle$ とブラ真空 $\langle 1|$ を

$$|0\rangle \stackrel{\text{def}}{=} c_0 \rho^\alpha |I\rangle, \tag{2.16}$$

$$\langle 1| \stackrel{\text{def}}{=} c_1 \langle I|\rho^{1-\alpha}, \tag{2.17}$$

$$c_0 c_1 = 1 \tag{2.18}$$

で導入する。α は、

$$0 \le \alpha \le 1 \tag{2.19}$$

なる実数とする。任意の演算子 A に対して、

$$\begin{aligned} \langle 1|A|0\rangle &= c_0 c_1 \langle I|\rho^{1-\alpha} A \rho^\alpha |I\rangle \\ &= \sum_{n=0} \sum_{m=0}^{\infty} \langle m,m|\rho^{1-\alpha} A \rho^\alpha |n,n\rangle \\ &= \sum_{n=0} \langle n|\rho^{1-\alpha} A \rho^\alpha |n\rangle \\ &= \mathrm{Tr}(\rho^{1-\alpha} A \rho^\alpha) \\ &= \mathrm{Tr}(\rho A) \equiv \langle A\rangle \end{aligned} \tag{2.20}$$

である [2)3)]。

[2)] 重要なのは、

$$\langle I|A|I\rangle = \mathrm{Tr}(A) \tag{2.21}$$

である。

[3)] $|\alpha\rangle$ をコヒーレント状態とすると、$\int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ |\alpha\rangle\langle\alpha| = 1$ であり、

$$|I\rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ |\alpha,\alpha\rangle \tag{2.22}$$

である。実際、$|\alpha\rangle = \sum_n \langle n|\alpha\rangle |n\rangle$, $|\alpha,\alpha\rangle = \sum_{n,m} \langle n|\alpha\rangle\langle\alpha|m\rangle |n,m\rangle$ なので、$\int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ \langle n|\alpha\rangle\langle\alpha|m\rangle = \delta_{nm}$ より上式を得る。また、

$$\begin{aligned} \langle I|A|I\rangle &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \int \frac{d^2\alpha'}{\pi}\ \langle \alpha,\alpha|A|\alpha',\alpha'\rangle \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \int \frac{d^2\alpha'}{\pi}\ \langle \alpha|A|\alpha'\rangle\langle\alpha'|\alpha\rangle \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ \langle\alpha|A|\alpha\rangle = \mathrm{Tr}(A). \end{aligned} \tag{2.23}$$

逆温度 β の熱平衡状態の密度演算子は

$$\rho_{eq}(\beta) = \frac{e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})} \tag{2.24}$$

である。平衡状態のケット真空、ブラ真空は

$$|0(\beta)\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} c_0 \rho_{eq}^{\alpha}(\beta)|I\rangle, \tag{2.25}$$

$$\langle 1(\beta)| \stackrel{\mathrm{def}}{=} c_1 \langle I|\rho_{eq}^{1-\alpha}(\beta), \tag{2.26}$$

$$c_0 c_1 = 1 \tag{2.27}$$

である。

ハミルトニアン H が

$$H = \sum_l \hbar\omega_l a_l^{\dagger} a_l \tag{2.28}$$

である系を考える。ただし、

$$[a_l, a_k^{\dagger}] = \delta_{lk} \tag{2.29}$$

であり、a_l と a_k とは可換である。上式のチルダ共役より

$$[\tilde{a}_l, \tilde{a}_k^{\dagger}] = \delta_{lk} \tag{2.30}$$

を得る。今

$$a_l^{\mu=1} = a_l\,, \quad a_l^{\mu=2} = \tilde{a}_l^{\dagger}, \tag{2.31}$$

$$\bar{a}_l{}^{\mu=1} = a_l^{\dagger}\,, \quad \bar{a}_l{}^{\mu=2} = -\tilde{a}_l \tag{2.32}$$

というダブレットを導入する。(2.29),(2.30),(2.5) より

$$[a_l^{\mu}, \bar{a}_l{}^{\nu}] = \delta^{\mu\nu} \tag{2.33}$$

を得る。この系の平衡状態は、

$$\rho_{eq}(\beta) = \prod_l f_l^{a_l^{\dagger} a_l}(\beta)[1 - f_l(\beta)], \tag{2.34}$$

$$f_l(\beta) \equiv e^{-\beta\hbar\omega_l} \tag{2.35}$$

である。この状態での平均を

$$\langle A\rangle_{\beta} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Tr}(\rho_{eq}(\beta)A) \tag{2.36}$$

と書くと

$$n_l(\beta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle a_l^{\dagger} a_l\rangle_{\beta} \tag{2.37}$$

$$= \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_l} - 1} \tag{2.38}$$

である。

今、ある i に対して、真空 $|0\rangle_i$ を

$$a_i|0\rangle_i = 0 \tag{2.39}$$

で導入する。i 番目の個数状態 $|n_i\rangle_i$ は

$$|n_i\rangle_i = \frac{1}{\sqrt{n_i!}}(a_i^\dagger)^{n_i}|0\rangle_i \tag{2.40}$$

で与えられる。$\{|n_i\rangle_i\}$ は規格直交性

$$_i\langle n_i|n_i'\rangle_i = \delta_{n_i n_i'} \tag{2.41}$$

を満たす。また $\{|n_i\rangle_i\}$ は完全性

$$\sum_{n_i=0}^{\infty}|n_i\rangle_{ii}\langle n_i| = 1_i \tag{2.42}$$

も満たしているものとする。ここで，1_i は a_i，$a_i^\dagger$ が作用するベクトル空間における恒等演算子である。今、個数状態

$$|\{n_i\}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_i |n_i\rangle_i \tag{2.43}$$

を定義すると、全ての i に対して

$$a_i^\dagger a_i|\{n_i\}\rangle = n_i|\{n_i\}\rangle \tag{2.44}$$

となる。(2.41)，(2.42) より，基底 $\big\{|\{n_i\}\rangle\big\}$ は規格直交完全系をなしていることが分かる。すなわち，

$$\begin{aligned}\langle\{n_i\}|\{n_i'\}\rangle &= \prod_i {}_i\langle n_i|n_i'\rangle_i \\ &= \prod_i \delta_{n_i,n_i'}\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\Big(\prod_i\sum_{n_i}^{\infty}\Big)|\{n_i\}\rangle\langle\{n_i\}| = 1 \tag{2.46}$$

である。ただし，$1 = \bigotimes_i 1_i$ である。以下、$\bigotimes_i$ を $\prod_i$ とかく。
今、規格直交完全系 $\{|n\rangle\}$ として、$\big\{|\{n_i\}\rangle\big\}$ を取る。

$$|\{n_i\},\{m_i\}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |\{n_i\}\rangle \otimes |\{m_i\}\rangle^{\sim} \tag{2.47}$$

すると、$|I\rangle$ は

$$|I\rangle = \big(\prod_i\sum_{n_i=0}^{\infty}\big)|\{n_i\},\{n_i\}\rangle \tag{2.48}$$

とかける。この表式を用いると (2.25),(2.26) が

$$|0(\beta)\rangle = c_0\prod_l |0(\beta)\rangle_l, \tag{2.49}$$

$$\langle 1(\beta)| = c_1\prod_l {}_l\langle 1(\beta)|, \tag{2.50}$$

$$|0(\beta)\rangle_l \stackrel{\text{def}}{=} [1-f_l(\beta)]^\alpha\sum_{n_l=0}^{\infty} f_l^{\alpha n_l}(\beta)|n_l,n_l\rangle_l, \tag{2.51}$$

$$_l\langle 1(\beta)| \stackrel{\text{def}}{=} [1-f_l(\beta)]^{1-\alpha}\sum_{n_l=0}^{\infty} f_l^{(1-\alpha)n_l}(\beta)_l\langle n_l,n_l| \tag{2.52}$$

とかけることがわかる。また上式より、$|0(\beta)\rangle$ と $\langle 1(\beta)|$ のチルダ不変性

$$|0(\beta)\rangle^{\sim} = |0(\beta)\rangle, \quad \langle 1(\beta)|^{\sim} = \langle 1(\beta)| \tag{2.53}$$

がわかる。

2.2 熱的 Bogoliubov 変換

今、$\xi_l, \xi_l^{\female}$ およびそのチルダ共役 $\tilde{\xi}_l, \tilde{\xi}_l^{\female}$ を

$$\xi_l(\beta)|0(\beta)\rangle \; = \; \tilde{\xi}_l(\beta)|0(\beta)\rangle = 0, \tag{2.54}$$
$$\langle 1(\beta)|\xi_l^{\female}(\beta) \; = \; \langle 1(\beta)|\tilde{\xi}_l^{\female}(\beta) = 0 \tag{2.55}$$

を満たし、交換関係が

$$[\xi_l^{\mu}, \bar{\xi}_l^{\,\nu}] = \delta^{\mu\nu} \tag{2.56}$$

となるものとして導入する。ただし、ダブレット表記

$$\xi_l^{\mu=1} = \xi_l\,, \quad \xi_l^{\mu=2} = \tilde{\xi}_l^{\female}, \tag{2.57}$$
$$\bar{\xi}_l^{\,\mu=1} = \xi_l^{\female}, \quad \bar{\xi}_l^{\,\mu=2} = -\tilde{\xi}_l \tag{2.58}$$

を用いた。$a_l^{\mu}, \bar{a}_l^{\mu}$ は交換関係 (2.33) を満たすので、(2.56) を満たすためには、

$$\xi^{\mu}(\beta) \; = \; B_l(\beta)^{\mu\nu} a_l^{\nu}, \tag{2.59}$$
$$\bar{\xi}^{\mu}(\beta) \; = \; \bar{a}_l^{\nu} B_l^{-1}(\beta)^{\nu\mu}, \tag{2.60}$$
$$\tag{2.61}$$

でなくてはならない。$B_l(\beta)$ を、

$$B_l(\beta) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

と書くと、(2.59) は

$$\xi_l \; = \; b_{11} a_l + b_{12} \tilde{a}_l^{\dagger}, \tag{2.63}$$
$$\tilde{\xi}_l^{\female} \; = \; b_{21} a_l + b_{22} \tilde{a}_l^{\dagger} \tag{2.64}$$

となる。$B_l^{-1}(\beta)$

$$B_l^{-1}(\beta) = \frac{1}{b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}} \begin{pmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{pmatrix} \tag{2.65}$$

となり、(2.60) は

$$\xi_l^{\female} \; = \; \frac{b_{22} a_l^{\dagger} + b_{21} \tilde{a}_l}{b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}}, \tag{2.66}$$
$$\tilde{\xi}_l \; = \; \frac{b_{12} a_l^{\dagger} + b_{11} \tilde{a}_l}{b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}} \tag{2.67}$$

となる。上 2 式のチルダ共役を取ると、

$$\tilde{\xi}_l^{♀} = \frac{b_{22}^* \tilde{a}_l^\dagger + b_{21}^* a_l}{(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})^*}, \tag{2.68}$$

$$\xi_l = \frac{b_{12}^* \tilde{a}_l^\dagger + b_{11}^* a_l}{(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})^*} \tag{2.69}$$

となる。この 2 式を (2.66),(2.67) と比べて

$$\frac{b_{ij}^*}{(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})^*} = b_{ij} \quad (i,j = 1,2) \tag{2.70}$$

を得る。この式の絶対値を取ると

$$|b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}| = 1 \tag{2.71}$$

がわかる。今、

$$b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} = e^{i\theta} \tag{2.72}$$

とおき、

$$b_{ij} = |b_{ij}|e^{i\theta_{ij}} \tag{2.73}$$

と書くと、(2.70) より

$$e^{i2\theta_{ij}} = e^{-i\theta} \tag{2.74}$$

を得る。よって、$\theta = 0$ と選ぶと、

$$b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} = 1, \tag{2.75}$$

$$b_{ij}^* = b_{ij} \tag{2.76}$$

となる。

(2.51) より

$$\begin{aligned} a_l|0(\beta)\rangle_l &= [1 - f_l(\beta)]^\alpha \sum_{n_l=0}^{\infty} f_l^{\alpha n_l}(\beta)\sqrt{n_l}|n_l - 1, n_l\rangle_l \\ &= [1 - f_l(\beta)]^\alpha \sum_{n_l=0}^{\infty} f_l^{\alpha(n_l+1)}(\beta)\sqrt{n_l+1}|n_l, n_l+1\rangle_l, \end{aligned} \tag{2.77}$$

$$\tilde{a}_l^\dagger|0(\beta)\rangle_l = [1 - f_l(\beta)]^\alpha \sum_{n_l=0}^{\infty} f_l^{\alpha n_l}(\beta)\sqrt{n_l+1}|n_l, n_l+1\rangle_l \tag{2.78}$$

を得る。この 2 式と (2.63) より

$$\xi_l|0(\beta)\rangle_l = (b_{11}f_l^\alpha(\beta) + b_{12})[1 - f_l(\beta)]^\alpha \sum_{n_l=0}^{\infty} f_l^{\alpha n_l}(\beta)\sqrt{n_l+1}|n_l, n_l+1\rangle_l \tag{2.79}$$

となる。これと、(2.54) から

$$b_{11}f_l^\alpha(\beta) + b_{12} = 0 \tag{2.80}$$

を得る。

　また、(2.52) より

$$
\begin{aligned}
{}_l\langle 1(\beta)|a_l \;&=\; [1-f_l(\beta)]^{1-\alpha}\sum_{n_l=0}^{\infty} f_l^{(1-\alpha)n_l}(\beta)\sqrt{n_l+1}\,{}_l\langle n_l+1,n_l|, && (2.81)\\
{}_l\langle 1(\beta)|\tilde{a}_l^{\dagger} \;&=\; [1-f_l(\beta)]^{1-\alpha}\sum_{n_l=0}^{\infty} f_l^{(1-\alpha)n_l}(\beta)\sqrt{n_l}\,{}_l\langle n_l,n_l-1| \\
&=\; [1-f_l(\beta)]^{1-\alpha}\sum_{n_l=0}^{\infty} f_l^{(1-\alpha)(n_l+1)}(\beta)\sqrt{n_l+1}\,{}_l\langle n_l+1,n_l| && (2.82)
\end{aligned}
$$

を得る。この 2 式と (2.64) より

$$
{}_l\langle 1(\beta)|\tilde{\xi}_l^{\text{♀}} \;=\; [b_{21}+b_{22}f_l^{1-\alpha}(\beta)][1-f_l(\beta)]^{1-\alpha}\sum_{n_l=0}^{\infty} f_l^{(1-\alpha)(n_l+1)}(\beta)\sqrt{n_l+1}\,{}_l\langle n_l+1,n_l| \tag{2.83}
$$

となる。これと、(2.55) から

$$
b_{21}+b_{22}f_l^{1-\alpha}(\beta) \;=\; 0 \tag{2.84}
$$

を得る。

　(2.75) に (2.80),(2.84) から得られる式を代入して

$$
[1-f_l(\beta)]b_{11}b_{22} = 1 \tag{2.85}
$$

を得る。

　(2.75) を (2.66) に代入すると、

$$
\xi_l^{\text{♀}} \;=\; b_{22}a_l^{\dagger} + b_{21}\tilde{a}_l \tag{2.86}
$$

となる。ところで、ξ のダガー共役 $\xi^{\dagger}$ は (2.63),(2.76) から

$$
\xi^{\dagger} = b_{11}a^{\dagger} + b_{12}\tilde{a}_l \tag{2.87}
$$

である。$\xi_l^{\text{♀}}$ と $\xi^{\dagger}$ と $a^{\dagger}$ の係数を一致するように

$$
b_{11} = b_{22} \tag{2.88}
$$

と選ぶ。

　(2.80),(2.84),(2.85) より

$$
\begin{aligned}
B_l(\beta) \;&=\; \frac{1}{\sqrt{1-f_l(\beta)}}\begin{pmatrix} 1 & -f_l^{\alpha}(\beta) \\ -f_l^{1-\alpha}(\beta) & 1 \end{pmatrix} \qquad (f_l(\beta)\equiv e^{-\beta\hbar\omega_l}) && (2.89)\\
&=\; \sqrt{1+n_l(\beta)}\begin{pmatrix} 1 & -f_l^{\alpha}(\beta) \\ -f_l^{1-\alpha}(\beta) & 1 \end{pmatrix} && (2.90)
\end{aligned}
$$

を得る。これを (2.59),(2.60) に代入すると、

$$
\begin{aligned}
\xi_l(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{1-f_l(\beta)}}a_l - \frac{f_l^{\alpha}(\beta)}{\sqrt{1-f_l(\beta)}}\tilde{a}_l^{\dagger}, & (2.91)\\
\xi_l^{♀}(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{1-f_l(\beta)}}a_l^{\dagger} - \frac{f_l^{1-\alpha}(\beta)}{\sqrt{1-f_l(\beta)}}\tilde{a}_l, & (2.92)\\
\tilde{\xi}_l(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{1-f_l(\beta)}}\tilde{a}_l - \frac{f_l^{\alpha}(\beta)}{\sqrt{1-f_l(\beta)}}a_l^{\dagger}, & (2.93)\\
\tilde{\xi}_l^{♀}(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{1-f_l(\beta)}}\tilde{a}_l^{\dagger} - \frac{f_l^{1-\alpha}(\beta)}{\sqrt{1-f_l(\beta)}}a_l & (2.94)
\end{aligned}
$$

となる。この 4 式を (2.54),(2.55) に代入して、

$$
\begin{aligned}
(a_l - f_l^{\alpha}(\beta)\tilde{a}_l^{\dagger})|0(\beta)\rangle &= 0, & (2.95)\\
(\tilde{a}_l - f_l^{\alpha}(\beta)a_l^{\dagger})|0(\beta)\rangle &= 0, & (2.96)\\
\langle 1(\beta)|(a_l^{\dagger} - f_l^{1-\alpha}(\beta)\tilde{a}_l) &= 0, & (2.97)\\
\langle 1(\beta)|(\tilde{a}_l^{\dagger} - f_l^{1-\alpha}(\beta)a_l) &= 0 & (2.98)
\end{aligned}
$$

を得る。これを熱状態条件という。

なお、(2.95),(2.96),(2.97),(2.98) は

$$
\xi_l^{\mu}(\beta) = \hat{V}(\theta)a_l^{\mu}\hat{V}^{-1}(\theta), \quad \bar{\xi}_l^{\mu}(\beta) = \hat{V}(\theta)\bar{a}_l^{\mu}\hat{V}^{-1}(\theta) \tag{2.99}
$$

の形で書けることが知られている。ここで $\hat{V}(\theta)$ は、

$$
\begin{aligned}
\hat{V}(\theta) &= e^{i\hat{G}(\theta)}, & (2.100)\\
i\hat{G}(\theta) &= \sum_l \sum_{a=1}^{3} \theta_{l,a} i\hat{G}_{l,a}, & (2.101)\\
i\hat{G}_{l,1} &= a_l\tilde{a}_l - a_l^{\dagger}\tilde{a}_l^{\dagger}, & (2.102)\\
i\hat{G}_{l,2} &= a_l\tilde{a}_l + a_l^{\dagger}\tilde{a}_l^{\dagger}, & (2.103)\\
i\hat{G}_{l,3} &= a_l^{\dagger}\tilde{a}_l + \tilde{a}_l^{\dagger}\tilde{a}_l^{\dagger} & (2.104)
\end{aligned}
$$

で $\theta_{l,a}$ を適当に選んだものである。$\hat{G}_{l,2}, \hat{G}_{l,3}$ は反エルミートである。§ 2.3 で議論するように、ユニタリー表現 ($\alpha = \frac{1}{2}$) では $\theta_{l,2} = \theta_{l,3} = 0$ である。

2.3 ユニタリー表現

(2.16),(2.17) で

$$
c_1 = c_0^*, \quad \alpha = \frac{1}{2} \tag{2.105}
$$

としたものをユニタリー表現という。ユニタリー表現では、

$$
\langle 1| = |0\rangle^{\dagger} \tag{2.106}
$$

である。以下ではさらに

$$
c_0 = c_1 = 1 \tag{2.107}
$$

と選ぶ。このとき、(2.25),(2.26) は

$$|0(\beta)\rangle \;=\; \rho_{eq}^{1/2}(\beta)|I\rangle, \tag{2.108}$$

$$\langle 1(\beta)| \;=\; \langle I|\rho_{eq}^{1/2}(\beta), \tag{2.109}$$

$$\;=\; |0(\beta)\rangle^\dagger \tag{2.110}$$

となる。

ハミルトニアンが (2.28) で与えられる系を考える。真空 $|0\rangle\rangle$ を

$$a_i|0\rangle\rangle = 0\,,\quad \tilde{a}_i|0\rangle\rangle = 0 \qquad \text{for all } i \tag{2.111}$$

によって導入すると、$|0\rangle\rangle$ は (2.47) の記号を用いて

$$|0\rangle\rangle = |\{0\},\{0\}\rangle \tag{2.112}$$

とかける。

(2.95),(2.96),(2.97),(2.98) で

$$f_i(\beta) = \tanh^2\theta_i \tag{2.113}$$

と置き、$\alpha = \frac{1}{2}$ を代入すると、

$$\xi_i(\beta) \;=\; \cosh\theta_i a_l - \sinh\theta_i\tilde{a}_l^\dagger \equiv a_i(\theta), \tag{2.114}$$

$$\xi_i^{♀}(\beta) \;=\; \cosh\theta_i a_l^\dagger - \sinh\theta_i\tilde{a}_l \equiv a_i^\dagger(\theta), \tag{2.115}$$

$$\tilde{\xi}_i(\beta) \;=\; \cosh\theta_i\tilde{a}_l - \sinh\theta_i a_l^\dagger \equiv \tilde{a}_i(\theta), \tag{2.116}$$

$$\tilde{\xi}_i^{♀}(\beta) \;=\; \cosh\theta_i\tilde{a}_l^\dagger - \sinh\theta_i a_l \equiv \tilde{a}_i^\dagger(\theta) \tag{2.117}$$

となる。ユニタリー表現では、

$$\xi_i^{♀}(\beta) = [\xi_i(\beta)]^\dagger \tag{2.118}$$

となっている。

a から $a(\theta)$ への変換はユニタリー変換

$$a_i(\theta) = \hat{U}(\theta)a_i\hat{U}^\dagger(\theta)\,,\quad \tilde{a}_i(\theta) = \hat{U}(\theta)\tilde{a}_i\hat{U}^\dagger(\theta) \tag{2.119}$$

である。ただし、

$$\hat{U}(\theta) \;=\; \exp\Bigl(\sum_i \theta_i(\tilde{a}_i^\dagger a_i^\dagger - a_i\tilde{a}_i)\Bigr) \tag{2.120}$$

はユニタリー演算子である。これは (2.100) で

$$\theta_{i,1} = -\theta_i \quad , \quad \theta_{i,2} = \theta_{i,3} = 0 \tag{2.121}$$

としたものである。

交換関係 (2.33) と性質

$$\hat{U}[A,B]\hat{U}^\dagger = [\hat{U}A\hat{U}^\dagger, \hat{U}B\hat{U}^\dagger] \tag{2.122}$$

より，$\{a_i(\theta), a_i^\dagger(\theta), \tilde{a}_i(\theta), \tilde{a}_i^\dagger(\theta)\}_{i=1}^N$ も正準交換関係

$$\Big[a_i(\theta), a_j^\dagger(\theta)\Big] \;=\; \delta_{ij}\,, \quad \Big[\tilde{a}_i(\theta), \tilde{a}_j^\dagger(\theta)\Big] = \delta_{ij} \tag{2.123}$$

を満たす。これ以外の交換関係は 0 である。

(2.119) より得られる

$$a_i \;=\; \hat{U}^\dagger(\theta) a_i(\theta) \hat{U}(\theta)\,, \quad \tilde{a}_i = \hat{U}^\dagger(\theta) \tilde{a}_i(\theta) \hat{U}(\theta) \tag{2.124}$$

を (2.111) に代入すると，

$$\hat{U}^\dagger(\theta) a_i(\theta) \hat{U}(\theta) |0\rangle\rangle = 0\,, \quad \hat{U}^\dagger(\theta) \tilde{a}_i(\theta) \hat{U}(\theta) |0\rangle\rangle = 0 \tag{2.125}$$

となる。ここで、状態

$$|0(\theta)\rangle \overset{\text{def}}{=} \hat{U}(\theta)|0\rangle\rangle \tag{2.126}$$

を導入すると (2.125) は

$$a_i(\theta)|0(\theta)\rangle = 0\,, \quad \tilde{a}_i(\theta)|0(\theta)\rangle = 0 \tag{2.127}$$

となる。$|0(\theta)\rangle$ は

$$|0(\theta)\rangle = |0(\beta)\rangle \quad \text{where} \quad \tanh^2\theta_i = f_i(\beta) \tag{2.128}$$

を満たす。

$|0(\theta)\rangle$ を計算すると、

$$\begin{aligned}
|0(\theta)\rangle \;&=\; \exp\Big(\sum_i a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger \tanh\theta_i\Big) \exp\Big(-\sum_i [a_i a_i^\dagger + \tilde{a}_i^\dagger \tilde{a}_i] \ln\cosh\theta_i\Big)|0\rangle\rangle \\
&=\; \exp\Big(-\sum_i \ln\cosh\theta_i\Big) \exp\Big(\sum_i \tanh\theta_i a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger\Big)|0\rangle\rangle
\end{aligned} \tag{2.129}$$

$$\begin{aligned}
&=\; \exp\Big(-\sum_i \ln\cosh\theta_i\Big) \prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty} (\tanh\theta_i)^{n_i} |n_i, n_i\rangle_i \\
&=\; \exp\Big(-\sum_i \ln\cosh\theta_i\Big) \Big(\prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty}\Big) \Big(\prod_i (\tanh\theta_j)^{n_j}\Big) |\{n_i\}, \{n_i\}\rangle
\end{aligned} \tag{2.130}$$

となる。ただし，第 1 等号では (B.33) を利用して $\hat{U}(\theta)$ を a_i，$a_i^\dagger$ および $\tilde{a}_i$，$\tilde{a}_i^\dagger$ の正規積に近い形に書き直し，(2.111) を用いた。第 2 等号では正準交換関係 (2.33) を，第 3 等号では (2.47) を，第 4 等号では (2.40) を用いた。

(2.129),(2.128) より

$$|0(\beta)\rangle \;=\; \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_i \ln[1 + n_i(\beta)]\Big) \exp\Big(\sum_i \sqrt{\frac{n_i(\beta)}{1 + n_i(\beta)}} a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger\Big)|0\rangle\rangle \tag{2.131}$$

を得る。この式から、有限温度の熱的真空 $|0(\beta)\rangle$ は、サーマル・ペア $a_i^\dagger \tilde{a}_i^\dagger$ が真空 $|0\rangle\rangle$ の上に凝縮した状態であることがわかる。

2.4　時間に依存する場合

Liouville-von Neumann 方程式は

$$i\hbar\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}=[H(t),\rho(t)] \tag{2.132}$$

である。ただし、ハミルトニアンが時間に陽に依存するとした。今、

$$|0(t)\rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \rho^{\alpha}(t)|I\rangle, \tag{2.133}$$
$$\langle 1(t)| \overset{\mathrm{def}}{=} \langle I|\rho^{1-\alpha}(t) \tag{2.134}$$

とする。$|0(t)\rangle$ の従う微分方程式を求める。

今、$A(t)$ を時間に陽に依存するエルミート演算子とし、その固有値方程式を

$$A(t)|n\rangle_t = A_n(t)|n\rangle_t \tag{2.135}$$

とする。$A(t)$ はエルミートなので、

$$A_n^*(t)=A_n(t) \tag{2.136}$$

であり、$\{|n\rangle_t\}$ は規格完全直交系をなす。すると、$|I\rangle$ は、任意の時刻で

$$|I\rangle=\sum_n |n\rangle_t\otimes|n\rangle_t^{\sim} \tag{2.137}$$

とかける。$|I\rangle$ は時間によらない。

(2.135) のチルダ共役は、(2.2),(2.8),(2.136) より

$$\tilde{A}(t)|n\rangle_t^{\sim}=A_n(t)|n\rangle_t^{\sim} \tag{2.138}$$

となる。(2.135),(2.138) より、

$$\begin{aligned} A(t)|I\rangle &= \sum_n A_n(t)|n\rangle_t\otimes|n\rangle_t^{\sim} \\ &= \sum_n \tilde{A}(t)|n\rangle_t\otimes|n\rangle_t^{\sim} \\ &= \tilde{A}(t)|I\rangle \end{aligned} \tag{2.139}$$

を得る。

(2.132) は、

$$i\hbar\frac{\partial U(t)}{\partial t}=H(t)U(t) \tag{2.140}$$

を満たす $U(t)$ を用いて、

$$\rho(t)=U(t)\rho(0)U^{\dagger}(t) \tag{2.141}$$

と形式的に解ける。また、この式より、

$$\rho^{\alpha}(t)=U(t)\rho^{\alpha}(0)U^{\dagger}(t) \tag{2.142}$$

を得る。上式を微分すると、

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial\rho^\alpha(t)}{\partial t} &= i\hbar\frac{\partial U(t)}{\partial t}\rho^\alpha(0)U^\dagger(t) + i\hbar U(t)\rho^\alpha(0)\frac{\partial U^\dagger(t)}{\partial t} \\
&= H(t)U(t)\rho^\alpha(0)U^\dagger(t) - U(t)\rho^\alpha(0)U^\dagger(t)H(t) \\
&= [H(t), \rho^\alpha(t)] \qquad (2.143)
\end{aligned}$$

となる。第 2 等号で (2.140) と (2.140) の † を取った式を用いた。よって、(2.133) の $|0(t)\rangle$ の時間微分は、

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|0(t)\rangle &= [H(t), \rho^\alpha(t)]|I\rangle \\
&= H(t)\rho^\alpha(t)|I\rangle - \rho^\alpha(t)H(t)|I\rangle \\
&= H(t)\rho^\alpha(t)|I\rangle - \rho^\alpha(t)\tilde{H}(t)|I\rangle \\
&= H(t)|0(t)\rangle - \tilde{H}(t)\rho^\alpha(t)|I\rangle \\
&= [H(t) - \tilde{H}(t)]|0(t)\rangle \\
&\equiv \hat{H}(t)|0(t)\rangle \qquad (2.144)
\end{aligned}$$

となる。ただし、第 1 等号で (2.143) を、第 3 等号で (2.139) で $A(t) = H(t)$ としたものを、第 4 等号で (2.5) を用いた。なお、

$$\hat{H}(t) \overset{\text{def}}{=} H(t) - \tilde{H}(t) \qquad (2.145)$$

をハット・ハミルトニアンと言う。

$\rho(t)$ の固有方程式

$$\rho(t)|n\rangle_t = p_n(t)|n\rangle_t \qquad (2.146)$$

を考える。$\rho(t)$ はエルミート演算子なので、$p_n(t)$ は実数であり、$\{|n\rangle_t\}$ は規格直交完全系をなす。$\rho^\alpha(t)$ は

$$\rho^\alpha(t) = \sum_n p_n^\alpha(t)|n\rangle_t\langle n| \qquad (2.147)$$

と書ける。$\{|n\rangle_t\}$ を用いて、$|I\rangle$ を (2.137) とかくと、上式と (2.133) から、

$$\begin{aligned}
|0(t)\rangle &= \sum_n p_n^\alpha(t)|n\rangle_t|n\rangle_t^\sim \qquad (2.148) \\
&= |0(t)\rangle^\sim \qquad (2.149)
\end{aligned}$$

を得る。同様にして、

$$\langle 1(t)| = \langle 1(t)|^\sim \qquad (2.150)$$

を得る。真空のチルダ不変性は、$\rho(t)$ のユニタリー性の反映である。

3 NETFD

3.1 NETFD の導入

NETFD は TFD で $\alpha = 1$ とした場合に、散逸のある Liouville-von Neumann 方程式を扱う方法である。

(2.133),(2.134) で $\alpha = 1$ とすると、

$$|0(t)\rangle = \rho(t)|1\rangle, \tag{3.1}$$

$$\langle 1(t)| = \langle I| \equiv \langle 1| \tag{3.2}$$

となり、ブラ真空 $\langle 1(t)|$ は時間によらない。(2.144) は、ハミルトニアンが時間によらないとき

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|0(t)\rangle = \hat{H}|0(t)\rangle, \tag{3.3}$$

$$\hat{H} = H - \tilde{H} \tag{3.4}$$

$$= -\hat{H}^{\sim} \tag{3.5}$$

となる。また、(2.149),(2.150) は

$$|0(t)\rangle^{\sim} = |0(t)\rangle, \quad \langle 1|^{\sim} = \langle 1| \tag{3.6}$$

となる。

(2.139) の † から

$$\langle 1|A = \langle 1|\tilde{A} \quad \text{for} \quad A^\dagger = A \tag{3.7}$$

を得る。特に、$A = H$ とすると、

$$\langle 1|\hat{H} = \langle 1|H - \langle 1|\tilde{H} = 0 \tag{3.8}$$

を得る。

(2.95),(2.96),(2.97),(2.98) に $\alpha = 1$ を代入すると、

$$a_l|0(\beta)\rangle - f_l(\beta)\tilde{a}_l^\dagger|0(\beta)\rangle = 0, \tag{3.9}$$

$$\tilde{a}_l|0(\beta)\rangle - f_l(\beta)a^\dagger|0(\beta)\rangle = 0, \tag{3.10}$$

$$\langle 1|a_l^\dagger - \langle 1|\tilde{a}_l = 0, \tag{3.11}$$

$$\langle 1|\tilde{a}_l^\dagger - \langle 1|a_l = 0 \tag{3.12}$$

を得る。(3.11),(3.12) の † より

$$a_l|I\rangle = \tilde{a}_l^\dagger|I\rangle, \quad a_l^\dagger|I\rangle = \tilde{a}_l|I\rangle \tag{3.13}$$

を得る。ただし、(3.2) を用いた。

散逸のある Liouville-von Neumann 方程式は、

$$i\hbar\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} = [H, \rho(t)] + i\Pi\rho(t) \tag{3.14}$$

である。ここで、Π は $\rho(t)$ に作用する超演算子で、例えば

$$\frac{1}{\hbar}\Pi\bullet = \kappa([a\bullet, a^\dagger] + [a, \bullet a^\dagger]) + 2\kappa\bar{n}\big[a, [\bullet, a^\dagger]\big] \tag{3.15}$$

である。Π は散逸の効果を表す。このとき、$|0(t)\rangle$ は散逸シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|0(t)\rangle \;=\; \hat{H}|0(t)\rangle \tag{3.16}$$

に従う。$\hat{H}$ は

$$\hat{H} = H - \tilde{H} + i\hat{\Pi} \tag{3.17}$$

と書ける。$\hat{\Pi}$ は Π の対応物である。ハット・ハミルトニアン $\hat{H}$ の i 倍はチルディアン [4] である：

$$(i\hat{H})^{\sim} = i\hat{H}. \tag{3.18}$$

$\hat{H}$ はエルミートとは限らない。(3.16) のチルダ共役は (3.6),(3.18) より (3.16) 自身になる [5]。また、ハット・ハミルトニアンは

$$\langle 1|\hat{H} = 0 \tag{3.19}$$

を満たす [6]。(3.16),(3.17) は (3.3),(3.4) の、(3.18) は (3.5) の、(3.19) は (3.8) の拡張である。(3.19) は確率の保存を意味する。実際、(3.16) に $\langle 1|$ を作用させると、

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle 1|0(t)\rangle \;=\; \langle 1|\hat{H}|0(t)\rangle$$

であり、(3.19) より、

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle 1|0(t)\rangle \;=\; 0 \tag{3.21}$$

を得る。

(3.16) を解くと、

$$|0(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|0\rangle, \quad |0\rangle \equiv |0(0)\rangle \tag{3.22}$$

となる。(3.17) の H として (2.28) を取る。初期条件として、

$$a_l|0\rangle = f_l\tilde{a}_l^{\dagger}|0\rangle \tag{3.23}$$

が仮定される [7]。特に、

$$f_l = f_l(\beta) = e^{-\beta\hbar\omega_l} \tag{3.24}$$

が $|0\rangle$ が熱平衡の場合である。(3.23) は (3.9) の拡張である。

今まで、$\hat{H}$ は時間によらないとしてきたが、時間に依存する場合への拡張は容易である。

---

[4] $\hat{X}^{\sim} = \hat{X}$ となる演算子 $\hat{X}$ をチルディアンという。

[5] § 2.4 の議論から分かるように、ケット真空のチルダ不変性は、$\rho(t)$ のエルミート性に由来する。(3.18) は、(3.14) の右辺が反エルミートであることを意味する。

[6] これは、

$$\langle 1|\hat{\Pi} = 0 \tag{3.20}$$

を意味する。

[7] ただし、§ 4.2 以外でこの初期条件を使わない。

Π から $\hat{\Pi}$ は、(3.13) を用いて一意的に得られる。例えば、Π が (3.15) のとき、(3.14) の右辺の $\kappa[a\rho(t), a^\dagger]$ の項は、

$$
\begin{aligned}
\kappa[a\rho(t), a^\dagger]|I\rangle &= \kappa a\rho(t)a^\dagger|I\rangle - \kappa a^\dagger a\rho(t)|I\rangle \\
&= \kappa a\rho(t)\tilde{a}|I\rangle - \kappa a^\dagger a|0(t)\rangle \\
&= \kappa a\tilde{a}\rho(t)|I\rangle - \kappa a^\dagger a|0(t)\rangle \\
&= \kappa(a\tilde{a} - a^\dagger a)|0(t)\rangle
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

となる。ただし、(3.1) と (2.5) も用いた。同様に、

$$
\begin{aligned}
\kappa[a, \rho(t)a^\dagger]|I\rangle &= \kappa a\rho(t)a^\dagger|I\rangle - \kappa\rho(t)a^\dagger a|I\rangle \\
&= \kappa a\tilde{a}\rho(t)|I\rangle - \kappa\tilde{a}^\dagger\rho(t)a^\dagger|I\rangle \\
&= \kappa a\tilde{a}|0(t)\rangle - \kappa\tilde{a}^\dagger\tilde{a}\rho(t)|I\rangle \\
&= \kappa(a\tilde{a} - \tilde{a}^\dagger\tilde{a})|0(t)\rangle, \qquad (3.26) \\
2\kappa\bar{n}\big[a, [\rho(t), a^\dagger]\big]|I\rangle &= 2\kappa\bar{n}\Big\{a\rho(t)a^\dagger|I\rangle - aa^\dagger\rho(t)|I\rangle - \rho(t)a^\dagger a|I\rangle + a^\dagger\rho(t)a|I\rangle\Big\} \\
&= 2\kappa\bar{n}\Big\{a\tilde{a}\rho(t)|I\rangle - aa^\dagger\rho(t)|I\rangle - \tilde{a}^\dagger\tilde{a}\rho(t)|I\rangle + a^\dagger\tilde{a}^\dagger\rho(t)|I\rangle\Big\} \\
&= 2\kappa\bar{n}(a\tilde{a} - aa^\dagger - \tilde{a}^\dagger\tilde{a} + a^\dagger\tilde{a}^\dagger)|0(t)\rangle \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

となる。よって、(3.15) の対応物は、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\hbar}\hat{\Pi} &= \kappa(a\tilde{a} - a^\dagger a) + \kappa(a\tilde{a} - \tilde{a}^\dagger\tilde{a}) + 2\kappa\bar{n}(a\tilde{a} - aa^\dagger - \tilde{a}^\dagger\tilde{a} + a^\dagger\tilde{a}^\dagger) \\
&= -\kappa[(1+2\bar{n})(a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}) - 2(1+\bar{n})a\tilde{a} - 2\bar{n}a^\dagger\tilde{a}^\dagger] - 2\kappa\bar{n}
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

である。

3.2 超演算子形式

超演算子とは演算子に作用する演算子である。例えば、(3.15) の Π のようなものである。以下に示すように、$a_l, a_l^\dagger$ を

$$
A\bullet = A\cdot\bullet, \quad \tilde{A}\bullet = \bullet\cdot A^\dagger \quad (\bullet \text{は任意の演算子。} A = a_l, a_l^\dagger) \tag{3.29}
$$

という超演算子と考えても、今までの公式が適当な読み替えをすれば成り立つ。

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に作用する演算子の集合を $\mathcal{O}$ とする。$\mathcal{O}$ の元 $\bullet$ は、任意の規格直交完全系 $|n\rangle$ を用いて、

$$
\bullet = \sum_{n,m}\langle n|\bullet|m\rangle|n\rangle\langle m| \tag{3.30}
$$

と書ける。$\mathcal{O}$ に対して、Liouville 空間 $\mathcal{L}$ が考えられる。$\mathcal{L}$ の元 $|\bullet\rangle\rangle$ は、

$$
|\bullet\rangle\rangle = \sum_{n,m}\langle n|\bullet|m\rangle|nm\rangle\rangle \tag{3.31}
$$

と書かれる。特に、

$$
||n\rangle\langle m|\rangle\rangle = |nm\rangle\rangle \tag{3.32}
$$

である。$|nm\rangle\!\rangle$ に対して、その双対 $\langle\!\langle nm|$ を

$$\begin{aligned} \langle\!\langle nm| &= ||n\rangle\langle m|\rangle\!\rangle^\dagger = \langle\!\langle(|n\rangle\langle m|)^\dagger|, && (3.33)\\ \langle\!\langle nm|n'm'\rangle\!\rangle &= \delta_{nn'}\delta_{mm'} && (3.34)\end{aligned}$$

で定義する。対応、

$$\begin{aligned} |nm\rangle\!\rangle \quad &\longleftrightarrow \quad |n\rangle\langle m|, && (3.35)\\ \langle\!\langle nm|\cdots \quad &\longleftrightarrow \quad \mathrm{Tr}(|m\rangle\langle n|\cdots) && (3.36)\end{aligned}$$

を考えると [8]、(3.34) は、

$$\begin{aligned} \langle\!\langle nm|n'm'\rangle\!\rangle \quad &\longleftrightarrow \quad \mathrm{Tr}(|m\rangle\langle n|\cdot|n'\rangle\langle m'|)\\ &= \quad \delta_{nn'}\mathrm{Tr}(|m\rangle\langle m'|)\\ &= \quad \delta_{nn'}\langle m'|m\rangle\\ &= \quad \delta_{nn'}\delta_{mm'} && (3.38)\end{aligned}$$

となる。ただし、公式

$$\mathrm{Tr}(|\phi\rangle\langle\phi'|) = \langle\phi'|\phi\rangle \tag{3.39}$$

を用いた。

$\langle\!\langle\bullet|$ を、

$$\langle\!\langle\bullet| = \sum_{n,m}\langle m|\bullet|n\rangle\langle\!\langle nm| \tag{3.40}$$

とする。従って、

$$\begin{aligned} |\bullet\rangle\!\rangle^\dagger &= \sum_{n,m}\langle n|\bullet|m\rangle^*\langle\!\langle nm|\\ &= \sum_{n,m}\langle m|\bullet^\dagger|n\rangle\langle\!\langle nm|\\ &= \langle\!\langle\bullet^\dagger| && (3.41)\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \langle\!\langle A|B\rangle\!\rangle &= \sum_{n,m}\sum_{n',m'}\langle m|A|n\rangle\langle n'|B|m'\rangle\langle\!\langle nm|n'm'\rangle\!\rangle\\ &= \sum_{n,m}\langle m|A|n\rangle\langle n|B|m\rangle\\ &= \sum_{m}\langle m|AB|m\rangle\\ &= \mathrm{Tr}(AB) && (3.42)\end{aligned}$$

である。第 2 等号で、(3.34) を、第 3, 第 4 等号で $\{|n\rangle\}$ の完全性を用いた。

[8] (3.35) は、

$$|\bullet\rangle\!\rangle \quad \longleftrightarrow \quad \bullet \tag{3.37}$$

を意味する。

• $= 1 = \sum_n |n\rangle\langle n|$ のときは、(3.31),(3.40) は、

$$|1\rangle\!\rangle \;=\; \sum_n |nn\rangle\!\rangle, \tag{3.43}$$
$$\langle\!\langle 1| \;=\; \sum_n \langle\!\langle nn| \tag{3.44}$$

となる。対応 (3.35),(3.36) によると、

$$|1\rangle\!\rangle \quad \longleftrightarrow \quad \sum_n |n\rangle\langle n| = 1, \tag{3.45}$$
$$\langle\!\langle 1|\cdots \quad \longleftrightarrow \quad \mathrm{Tr}(\sum_n |n\rangle\langle n|\cdots) = \mathrm{Tr}(\cdots) \tag{3.46}$$

を得る。

超演算子 $a_l, a_l, \tilde{a}_l, \tilde{a}_l^\dagger$ を Liouville 空間 $\mathcal{L}$ の元に、

$$a_l|nm\rangle\!\rangle \;=\; |a_l|n\rangle\langle m|\rangle\!\rangle, \tag{3.47}$$
$$\tilde{a}_l|nm\rangle\!\rangle \;=\; ||n\rangle\langle m|a_l^\dagger\rangle\!\rangle \tag{3.48}$$

および、

$$a_l^\dagger|nm\rangle\!\rangle \;=\; |a_l^\dagger|n\rangle\langle m|\rangle\!\rangle, \tag{3.49}$$
$$\tilde{a}_l^\dagger|nm\rangle\!\rangle \;=\; ||n\rangle\langle m|a_l\rangle\!\rangle \tag{3.50}$$

として作用するものとして定義する。対応 (3.35)、即ち (3.37) により、$a_l, a_l, \tilde{a}_l, \tilde{a}_l^\dagger$ は演算子に (3.29) のように作用する超演算子に対応する。上の 4 式より、超演算子に対する交換関係

$$[a_l, a_m^\dagger] = \delta_{lm}\,, \quad [\tilde{a}_l, \tilde{a}_m^\dagger] = \delta_{lm} \tag{3.51}$$

を得る。このほかの交換関係はゼロである。

今、規格直交完全系 $\{|n\rangle\}$ として、(2.43) の $\big\{|\{n_i\}\rangle\big\}$ を取る。このとき、

$$a_l a_l^\dagger|nm\rangle\!\rangle \;=\; n_i|nm\rangle\!\rangle, \tag{3.52}$$
$$\tilde{a}_l \tilde{a}_l^\dagger|nm\rangle\!\rangle \;=\; m_i|nm\rangle\!\rangle \tag{3.53}$$

が成り立つ。また、

$$a_l|00\rangle\!\rangle = \tilde{a}_l|00\rangle\!\rangle = 0 \tag{3.54}$$

となる。

対応 (3.37),(3.45) および (3.47),(3.49) より、$a_l, a_m^\dagger$ から構成される任意の演算子 A に対して、

$$|A\rangle\!\rangle = A|1\rangle\!\rangle \tag{3.55}$$

を得る。ただし、左辺の A は $\mathcal{O}$ の元であり、右辺の A は対応する超演算子である。(3.14) を満たす $\rho(t)$ を考える。ただし、H として (2.28) を考える。このとき、$\rho(t)$ は $a_l, a_m^\dagger$ から構成されるはずなので、(3.55) が使えて、

$$|\rho(t)\rangle\!\rangle = \rho(t)|1\rangle\!\rangle \tag{3.56}$$

を得る。また、(3.33) と (3.47)-(3.50) より、

$$\begin{aligned}\langle\langle nm|a_l^\dagger &= \langle\langle |n\rangle\langle m|a_l^\dagger|, &(3.57)\\ \langle\langle nm|\tilde{a}_l^\dagger &= \langle\langle a_l|n\rangle\langle m||, &(3.58)\\ \langle\langle nm|a_l &= \langle\langle |n\rangle\langle m|a_l|, &(3.59)\\ \langle\langle nm|\tilde{a}_l &= \langle\langle a_l^\dagger|n\rangle\langle m|| &(3.60)\end{aligned}$$

である。(3.55) と同様に、

$$\langle\langle A| = \langle\langle 1|A \tag{3.61}$$

を得る。(3.55),(3.61),(3.42) より、

$$\langle\langle A|B\rangle\rangle = \langle\langle 1|A|B\rangle\rangle = \langle\langle 1|AB|1\rangle\rangle = \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) \tag{3.62}$$

となる。時に、$B = \rho(t)$ として、

$$\langle\langle A|\rho(t)\rangle\rangle = \langle\langle 1|A|\rho(t)\rangle\rangle = \mathrm{Tr}(\rho(t)A) \tag{3.63}$$

を得る。

3.2.1 対応関係

明らかに、

$$\begin{aligned}|nm\rangle\rangle &\quad\longleftrightarrow\quad |n\rangle\otimes|m\rangle^\sim, &(3.64)\\ |1\rangle\rangle &\quad\longleftrightarrow\quad |I\rangle, &(3.65)\\ \langle\langle 1| &\quad\longleftrightarrow\quad \langle I| = \langle 1|, &(3.66)\\ |\rho(t)\rangle\rangle = \rho(t)|1\rangle\rangle &\quad\longleftrightarrow\quad |0(t)\rangle &(3.67)\end{aligned}$$

の対応がある。また、対応 (3.35),(3.45),(3.46) は、

$$\begin{aligned}|nm\rangle\rangle &\quad\longleftrightarrow\quad |n\rangle\langle m|, &(3.68)\\ |1\rangle\rangle &\quad\longleftrightarrow\quad \sum_n |n\rangle\langle n| = 1, &(3.69)\\ \langle\langle 1|\cdots &\quad\longleftrightarrow\quad \mathrm{Tr}(\sum_n |n\rangle\langle n|\cdots) = \mathrm{Tr}(\cdots) &(3.70)\end{aligned}$$

であった。この対応により、$a_l, a_l, \tilde{a}_l, \tilde{a}_l^\dagger$ は、

$$\begin{aligned}a_l\bullet = a_l\cdot\bullet \quad,&\quad \tilde{a}_l\bullet = \bullet\cdot a_l^\dagger, &(3.71)\\ a_l^\dagger\bullet = a_l^\dagger\cdot\bullet \quad,&\quad \tilde{a}_l^\dagger\bullet = \bullet\cdot a_l &(3.72)\end{aligned}$$

という超演算子にかわる。このとき、(3.14) は、

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) = \hat{H}\rho(t) \tag{3.73}$$

となる。これは (3.16) に相当する。§ 3.1 までは、チルダ粒子は何か神秘的な、実在するのかしないのか分からない代物に見えたが、超演算子の見方をすると、ただの道具に見える。

(3.19) の意味は、(3.70) によると、

$$\mathrm{Tr}(\hat{H}\bullet) = 0 \tag{3.74}$$

である。ここで、

$$\hat{H}\bullet = [H, \bullet] + i\Pi\bullet \tag{3.75}$$

であり、Π が (3.15) のときは、

$$\hat{H}\bullet = [H, \bullet] + i\hbar\kappa([a\bullet, a^\dagger] + [a, \bullet a^\dagger]) + 2i\hbar\kappa\bar{n}\big[a, [\bullet, a^\dagger]\big] \tag{3.76}$$

である。一般に、

$$\mathrm{Tr}([A, B]) = 0 \tag{3.77}$$

であるから、$\Pi\bullet$ が $[A, B]$ の形でかける [9] なら、(3.74) が成り立つ。Π から $\hat{\Pi}$ は次のように一意的に得られる：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\hbar}\Pi\bullet &= \kappa([a\bullet, a^\dagger] + [a, \bullet a^\dagger]) + 2\kappa\bar{n}\big[a, [\bullet, a^\dagger]\big] \\
&= \kappa(a\bullet a^\dagger - a^\dagger a\bullet + a\bullet a^\dagger - \bullet a^\dagger a) + 2\kappa\bar{n}(a\bullet a^\dagger - aa^\dagger\bullet - \bullet a^\dagger a + a^\dagger\bullet a) \\
&= \kappa(a\tilde{a}\bullet - a^\dagger a\bullet + a\tilde{a}\bullet - \tilde{a}\bullet a) + 2\kappa\bar{n}(a\tilde{a}\bullet - aa^\dagger\bullet - \tilde{a}\bullet a + a^\dagger\tilde{a}^\dagger\bullet) \\
&= \kappa(a\tilde{a} - a^\dagger a + a\tilde{a} - \tilde{a}\tilde{a}^\dagger)\bullet + 2\kappa\bar{n}(a\tilde{a} - aa^\dagger - \tilde{a}\tilde{a}^\dagger + a^\dagger\tilde{a}^\dagger)\bullet \\
&= \Big(-\kappa[(1+2\bar{n})(a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}) - 2(1+\bar{n})a\tilde{a} - 2\bar{n}a^\dagger\tilde{a}^\dagger] - 2\kappa\bar{n}\Big)\bullet \equiv \frac{1}{\hbar}\hat{\Pi}\bullet
\end{aligned} \tag{3.78}$$

このように、(3.68),(3.69),(3.70) により、Liouville 空間 $\mathcal{L}$ を持ち出さないことも可能であるが、$\mathcal{L}$ で考えた方が都合がよい。特に、熱状態条件

$$\langle\!\langle 1|a_l = \langle\!\langle 1|\tilde{a}_l^\dagger, \tag{3.79}$$

$$\langle\!\langle 1|a_l^\dagger = \langle\!\langle 1|\tilde{a}_l \tag{3.80}$$

が使えるのが利点である。(3.79) は、規格直交完全系 $\{|n\rangle\}$ として、(2.43) の $\big\{|\{n_i\}\rangle\big\}$ を取り、

$$\begin{aligned}
\sum_{n_l=0}^{\infty} |n_l\rangle_l\langle n_l|a_l &= \sum_{n_l=0}^{\infty} \sqrt{n_l+1}|n_l\rangle_l\langle n_l+1| \\
&= \sum_{n_l=1}^{\infty} \sqrt{n_l}|n_l-1\rangle_l\langle n_l| \\
&= a_l\sum_{n_l=0}^{\infty} |n_l\rangle_l\langle n_l|
\end{aligned} \tag{3.81}$$

を用いればいられる。(3.80) も同様である。(3.79),(3.80) より、$a_l, a_m^\dagger$ から構成される任意の演算子 A に対して、

$$\langle\!\langle 1|A^\dagger = \langle\!\langle 1|\tilde{A} \tag{3.82}$$

を得る [10]。

以下で、$|0(t)\rangle$,$\langle 1|$ と書いたとき、§ 3.1 の意味と思ってもよいし、$|\rho(t)\rangle\!\rangle$,$\langle\!\langle 1|$ の意味と思ってもよい。

[9] A,B が $[C, D]$ や、$\{C, D\}$,$\{C, \{D, E\}\}$ などの形でも良い。

[10] 同様に、(3.11),(3.12) から

$$\langle 1|A^\dagger = \langle 1|\tilde{A}. \tag{3.83}$$

3.3 ハイゼンベルグ描像

(3.16) はシュレーディンガー描像である。ハイゼンベルグ描像では、ケット真空は時間発展せず、演算子のほうが

$$
\begin{aligned}
A(t) &= e^{i\hat{H}t/\hbar} A e^{-i\hat{H}t/\hbar}, && (3.84)\\
i\hbar\frac{d}{dt}A(t) &= [A(t), \hat{H}(t)] && (3.85)
\end{aligned}
$$

に従って時間発展する。期待は、どちらの描像でも同じである：

$$
\begin{aligned}
\langle 1|A(t)|0\rangle &= \langle 1|e^{i\hat{H}t/\hbar} A e^{-i\hat{H}t/\hbar}|0\rangle \\
&= \langle 1|A e^{-i\hat{H}t/\hbar}|0\rangle \\
&= \langle 1|A|0(t)\rangle. && (3.86)
\end{aligned}
$$

ただし、第 2 等号で (3.19) を用いた。ハット・ハミルトニアンが

$$
\hat{H} = H - \tilde{H} \tag{3.87}
$$

のときは、A が非チルダ演算子なら $A(t)$ も非チルダ演算子であり、A がチルダ演算子なら $A(t)$ もチルダ演算子である。散逸を表す $\hat{\Pi}$ があると、$A(t)$ に非チルダとチルダとが混ざる。また、$\hat{\Pi}$ があると $\hat{H}$ は一般にエルミートでないので、$e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ はユニタリーでない。よって、

$$
a^{\dagger\!\dagger}(t) \equiv e^{i\hat{H}t/\hbar} a^\dagger e^{-i\hat{H}t/\hbar} \neq [e^{i\hat{H}t/\hbar} a e^{-i\hat{H}t/\hbar}]^\dagger \equiv [a(t)]^\dagger \tag{3.88}
$$

である。

4 半自由粒子

4.1 $\hat{\Pi}$ の公理的導出

$\hat{H}$ として、$a, a^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger$ に対して双線形で、変換

$$a \to a e^{i\theta}\,, \quad a^\dagger \to a^\dagger e^{-i\theta}\,, \quad \tilde{a} \to \tilde{a} e^{-i\theta}\,, \quad \tilde{a}^\dagger \to \tilde{a}^\dagger e^{i\theta} \tag{4.1}$$

に対して不変なもの（半自由粒子）を考える。一般には、

$$i\hat{H} = g_1(t) a^\dagger a + g_2(t)\tilde{a}^\dagger \tilde{a} + g_3(t) a\tilde{a} + g_4(t) a^\dagger \tilde{a}^\dagger + g_0(t) \tag{4.2}$$

であるが、(3.18) の要請から、

$$g_1^* \tilde{a}^\dagger \tilde{a} + g_2^* a^\dagger a + g_3^* \tilde{a} a + g_4^* \tilde{a}^\dagger a^\dagger + g_0^* = g_1 a^\dagger a + g_2 \tilde{a}^\dagger \tilde{a} + g_3 a\tilde{a} + g_4 a^\dagger \tilde{a}^\dagger + g_0$$

すなわち、

$$g_1^* = g_2\,, \quad g_3^* = g_3\,, \quad g_4 * = g_4\,, \quad g_0^* = g_0 \tag{4.3}$$

である。今、

$$g_1(t) = -c_1(t) + i\hbar\omega(t)\,, \quad g_3(t) = -c_2(t)\,, \quad g_4(t) = -c_3(t)\,, \quad g_0(t) = -c_4(t) \tag{4.4}$$

とかくと、

$$\begin{aligned} \hat{H} \;&=\; -i\big[[-c_1(t) + i\hbar\omega(t)]a^\dagger a + [-c_1(t) - i\hbar\omega(t)]\tilde{a}^\dagger \tilde{a} - c_2(t) a\tilde{a} - c_3(t) a^\dagger \tilde{a}^\dagger - c_4(t)\big] \\ &=\; \hbar\omega(t)(a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a}) + i\hat{\Pi}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\hat{\Pi} \;=\; c_1(t)(a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger \tilde{a}) + c_2(t) a\tilde{a} + c_3(t) a^\dagger \tilde{a}^\dagger + c_4(t) \tag{4.6}$$

となる。$\omega(t)$ はくり込まれたエネルギーである。さらに、要請 (3.19) より、

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; c_1\langle 1|a^\dagger a + c_1\langle 1|\tilde{a}^\dagger \tilde{a} + c_2\langle 1|a\tilde{a} + c_3\langle 1|a^\dagger \tilde{a}^\dagger + c_4\langle 1| \\ &=\; c_1\langle 1|a^\dagger a + c_1\langle 1|a^\dagger a + c_2\langle 1|a^\dagger a + c_3\langle 1|a a^\dagger + c_4\langle 1| \\ &=\; (2c_1 + c_2 + c_3)\langle 1|a^\dagger a + (c_3 + c_4)\langle 1| \end{aligned} \tag{4.7}$$

すなわち、

$$2c_1 + c_2 + c_3 = 0\,, \quad c_3 + c_4 = 0 \tag{4.8}$$

が課される。よって、

$$\hat{\Pi} \;=\; c_1(t)(a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger \tilde{a}) + c_2(t) a\tilde{a} - [2c_1(t) + c_2(t)]a^\dagger \tilde{a}^\dagger + [2c_1(t) + c_2(t)] \tag{4.9}$$

となる。

ところで、$a(t), a^\ddagger(t)$ の運動方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a(t) \;&=\; \frac{i}{\hbar}[\hat{H}(t), a(t)] \\ &=\; -i\omega(t)a(t) + c_1(t)/\hbar a(t) - [2c_1(t) + c_2(t)]/\hbar\ \tilde{a}^\ddagger(t), \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\frac{d}{dt}a^\ddagger(t) \;=\; i\omega(t)a^\ddagger(t) - c_1(t)/\hbar\ a^\ddagger(t) - c_2(t)/\hbar\ \tilde{a}(t) \tag{4.11}$$

となる。よって、$\langle 1|a^{\dagger\!\!\dagger}(t)a(t)$ の運動方程式は、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle 1|a^{\dagger\!\!\dagger}(t)a(t) &= \langle 1|[\frac{d}{dt}a^{\dagger\!\!\dagger}(t)]a(t) + \langle 1|a^{\dagger\!\!\dagger}(t)[\frac{d}{dt}a(t)] \\
&= \langle 1|\Big(i\omega(t)a^{\dagger\!\!\dagger}(t) - c_1(t)/\hbar\; a^{\dagger\!\!\dagger}(t) - c_2(t)/\hbar\; \tilde{a}(t)\Big)a(t) \\
&\quad +\langle 1|a^{\dagger\!\!\dagger}(t)\Big(- i\omega(t)a(t) + c_1(t)/\hbar a(t) - [2c_1(t)+c_2(t)]/\hbar\; \tilde{a}^{\dagger\!\!\dagger}(t)\Big) \\
&= \langle 1|\Big(i\omega(t)a^{\dagger\!\!\dagger}(t)a(t) - c_1(t)/\hbar\; a^{\dagger\!\!\dagger}(t)a(t) - c_2(t)/\hbar\; a^{\dagger\!\!\dagger}(t)a(t) \\
&\quad + - i\omega(t)a^{\dagger\!\!\dagger}(t)a(t) + c_1(t)/\hbar a^{\dagger\!\!\dagger}(t)a(t) - [2c_1(t)+c_2(t)]/\hbar a(t)a^{\dagger\!\!\dagger}(t)\Big) \\
&= -2\kappa(t)\langle 1|a^{\dagger\!\!\dagger}(t)a(t) + \Sigma(t)\langle 1|, \qquad (4.12) \\
\kappa(t) &= [c_1(t)+c_2(t)]/\hbar, \quad \Sigma(t) = -[2c_1(t)+c_2(t)]/\hbar \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

となる。今、

$$
n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \langle 1|a^{\dagger\!\!\dagger}(t)a(t)|0\rangle \qquad (4.14)
$$

とすると、上式より、

$$
\frac{d}{dt}n(t) = -2\kappa(t)n(t) + \Sigma(t) \qquad (4.15)
$$

を得る。$\kappa(t)$ はくり込まれた感受率である。

今、この方程式の定常状態が唯一

$$
n(\infty) = \bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1} \qquad (4.16)
$$

しかないと仮定する。すると、(4.15) より、

$$
\Sigma(\infty) = 2\kappa(\infty)\bar{n} \qquad (4.17)
$$

となる。更に、$\omega(t), \kappa(t), \Sigma(t)$ が時間によらず一定であるとする。このとき、(4.15) は、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}n(t) &= -2\kappa n(t) + 2\kappa\bar{n} \\
&= -2\kappa[n(t)-\bar{n}] \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

となる。また、(4.13),(4.17) より、

$$
c_1 = \hbar(-\kappa-\Sigma) = -\hbar\kappa(1+2\bar{n}), \quad c_2 = 2\hbar(\kappa+\Sigma) = 2\hbar\kappa(1+\bar{n}) \qquad (4.19)
$$

である。これと (4.5),(4.9) より、

$$
\begin{aligned}
\hat{H} &= \hat{H}_S + i\hat{\Pi}, \qquad (4.20) \\
\hat{H}_S &= \hbar(a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger\tilde{a}), \qquad (4.21) \\
\hat{\Pi} &= -\hbar\kappa[(1+2\bar{n})(a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}) - 2(1+\bar{n})a\tilde{a} - 2\bar{n}a^\dagger\tilde{a}^\dagger] - 2\hbar\kappa\bar{n} \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

を得る。この $\hat{\Pi}$ は (3.28) と一致する。

今、ダブレット記法

$$
\begin{aligned}
a^{\mu=1} = a \quad &, \quad a^{\mu=2} = \tilde{a}^\dagger, \qquad (4.23) \\
\bar{a}^{\mu=1} = a^\dagger \quad &, \quad \bar{a}^{\mu=2} = -\tilde{a} \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

を導入する。交換関係は、

$$[a^\mu, \bar{a}^\nu] = \delta^{\mu\nu} \tag{4.25}$$

で、これ以外は 0 である。(4.22) は、

$$\hat{H} = \hbar\omega\bar{a}^\mu a^\mu + \hbar\omega + i\hat{\Pi}, \quad \hat{\Pi} = -\hbar\kappa\bar{a}^\mu A^{\mu\nu}a^\nu + \hbar\kappa, \tag{4.26}$$

$$A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1+2\bar{n} & -2\bar{n} \\ 2(1+\bar{n}) & -(1+2\bar{n}) \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

とかける。半自由粒子に対するハイゼンベルグ方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a(t)^\mu &= \frac{i}{\hbar}[\hat{H}(t), a(t)^\mu] \\ &= i[\omega\bar{a}(t)^\nu a(t)^\nu + \omega - i\kappa\bar{a}(t)^\lambda A^{\lambda\nu}a(t)^\nu + i\kappa, a(t)^\mu] \\ &= -i\omega\delta^{\mu\nu}a(t)^\nu - \kappa\delta^{\mu\lambda}A^{\lambda\nu}a(t)^\nu \\ &= (-i\omega\delta^{\mu\nu} - \kappa A^{\mu\nu})a(t)^\nu, \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\frac{d}{dt}\bar{a}(t)^\mu = \bar{a}(t)^\nu(i\omega\delta^{\nu\mu} + \kappa A^{\nu\mu}) \tag{4.29}$$

となる。

4.2 散逸の自発的発現

今、

$$\gamma(t)^\mu = \mathcal{B}(t)^{\mu\nu}a(t)^\nu, \quad \bar{\gamma}(t)^\mu = \bar{a}(t)^\nu\mathcal{B}^{-1}(t)^{\nu\mu}, \tag{4.30}$$

$$\mathcal{B}(t)^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1+n(t) & -n(t) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

によって、

$$\gamma(t) = \gamma(t)^{\mu=1} \quad , \quad \tilde{\gamma}^{\female}(t) = \gamma(t)^{\mu=2}, \tag{4.32}$$

$$\gamma^{\female}(t) = \bar{\gamma}(t)^{\mu=1} \quad , \quad -\tilde{\gamma}(t) = \bar{\gamma}(t)^{\mu=2} \tag{4.33}$$

を導入する。ただし、$n(t)$ は、(4.18) を満たすものとする。$\gamma(t)^\mu, \bar{\gamma}(t)^\mu$ は、交換関係

$$[\gamma(t)^\mu, \bar{\gamma}(t)^\nu] = \delta^{\mu\nu} \tag{4.34}$$

を満たし、これ以外は 0 である。$\gamma^{\female}(t)$ は、

$$\begin{aligned} \langle 1|\gamma^{\female}(t) &= \langle 1|e^{i\hat{H}t}(a^\dagger - \tilde{a})e^{-i\hat{H}t} \\ &= \langle 1|(a^\dagger - \tilde{a})e^{-i\hat{H}t} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\langle 1|\tilde{\gamma}^{\female}(t) = 0 \tag{4.36}$$

を満たす。

$\gamma(t)^\mu$ の運動方程式は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\gamma(t)^\mu &= \frac{d\mathcal{B}(t)^{\mu\nu}}{dt}a^\nu(t) + \mathcal{B}(t)^{\mu\nu}\frac{da^\nu(t)}{dt} \\ &= [\frac{d\mathcal{B}(t)}{dt}\mathcal{B}^{-1}(t)]^{\mu\nu}\gamma(t)^\nu + [\mathcal{B}(t)(-i\omega 1_2 - \kappa A)\mathcal{B}^{-1}(t)]^{\mu\nu}\gamma(t)^\nu \end{aligned} \tag{4.37}$$

である。第 2 等号で、(4.28) を用いた。(4.31) より、

$$\frac{d\mathcal{B}(t)}{dt} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{dn(t)}{dt}, \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{B}(t)}{dt}\mathcal{B}^{-1}(t) &= \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{dn(t)}{dt}\begin{pmatrix}1 & n(t)\\ 1 & 1+n(t)\end{pmatrix} \\ &= -\frac{dn(t)}{dt}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \\ &= 2\kappa[n(t)-\bar{n}]\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.39}$$

であり、(4.27) より、

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(t)A\mathcal{B}^{-1}(t) &= \begin{pmatrix}1+n(t) & -n(t)\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+2\bar{n} & -2\bar{n}\\ 2(1+\bar{n}) & -(1+2\bar{n})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n(t)\\ 1 & 1+n(t)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1+n(t) & -n(t)\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n(t)-2\bar{n}\\ 1 & n(t)-2\bar{n}-1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1 & 2[n(t)-\bar{n}]\\ 0 & -1\end{pmatrix} \\ &= \tau_3 + 2[n(t)-\bar{n}]\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.40}$$

を得る。ただし、

$$\tau_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{4.41}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\gamma(t)^\mu &= 2\kappa[n(t)-\bar{n}]\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}^{\mu\nu}\gamma(t)^\nu + \Big[-i\omega\delta^{\mu\nu} - \kappa\tau_3^{\mu\nu} - 2\kappa[n(t)-\bar{n}]\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}^{\mu\nu}\Big]\gamma(t)^\nu \\ &= (-\omega\delta^{\mu\nu} - \kappa\tau_3^{\mu\nu})\gamma(t)^\nu\end{aligned} \tag{4.42}$$

となる。これを解いて、

$$\begin{aligned}\gamma(t)^\mu &= [\exp(-i\omega 1_2 - \kappa\tau_3)t]^{\mu\nu}\gamma(0)^\nu \\ &= \begin{pmatrix}e^{-i\omega t-\kappa t} & 0\\ 0 & e^{-i\omega t+\kappa t}\end{pmatrix}^{\mu\nu}\gamma(0)^\nu,\end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\gamma(0)^{\nu=1} = (1+n)a - n\tilde{a}^\dagger, \quad n = \langle 1|a^\dagger a|0\rangle, \tag{4.44}$$

$$\gamma(0)^{\nu=2} = \tilde{a}^\dagger - a \tag{4.45}$$

を得る。
　今、初期条件として、(3.23) 即ち、

$$a|0\rangle = f\tilde{a}^{\dagger}|0\rangle \tag{4.46}$$

を仮定する。これより、

$$\langle 1|a\tilde{a}|0\rangle = \langle 1|afa^{\dagger}|0\rangle = f[\langle 1|a^{\dagger}a|0\rangle + \langle 1|0\rangle] = f(n+1) \tag{4.47}$$

を得るが、左辺は、

$$\langle 1|a\tilde{a}|0\rangle = \langle 1|\tilde{a}a|0\rangle = \langle 1|a^{\dagger}a|0\rangle = n \tag{4.48}$$

であるから、

$$\begin{aligned} n &= f(n+1), \\ f &= \frac{n}{n+1} \end{aligned} \tag{4.49}$$

これを (4.46) に代入して、

$$(1+n)a|0\rangle \;=\; n\tilde{a}^{\dagger}|0\rangle$$

を得る。これは、

$$[(1+n)a - n\tilde{a}^{\dagger}]|0\rangle = \gamma(0)|0\rangle = 0 \tag{4.50}$$

を意味する。(4.43) より、

$$\gamma(t)|0\rangle = e^{-i\omega t-\kappa t}\gamma(0)|0\rangle = 0 \tag{4.51}$$

を得る。
　今、

$$\gamma_t^{\mu} = e^{-i\hat{H}t}\gamma(t)^{\mu}e^{i\hat{H}t}, \quad \bar{\gamma}_t^{\mu} = e^{-i\hat{H}t}\bar{\gamma}(t)^{\mu}e^{i\hat{H}t} \tag{4.52}$$

つまり、

$$\gamma_t^{\mu} \;=\; \mathcal{B}(t)^{\mu\nu}a^{\nu}, \quad \bar{\gamma}_t^{\mu} = \bar{a}^{\nu}\mathcal{B}^{-1}(t)^{\nu\mu}, \tag{4.53}$$

$$\mathcal{B}(t)^{\mu\nu} \;=\; \begin{pmatrix} 1+n(t) & -n(t) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.54}$$

によって、

$$\gamma_t = \gamma_t^{\mu=1} \quad , \quad \tilde{\gamma}^{\female} = \gamma_t^{\mu=2}, \tag{4.55}$$

$$\gamma^{\female} = \bar{\gamma}_t^{\mu=1} \quad , \quad -\tilde{\gamma}_t = \bar{\gamma}_t^{\mu=2} \tag{4.56}$$

を導入する。$\gamma^{\female} = a^{\dagger} - \tilde{a}$ とそのチルダ共役は時間によらない。(4.51) と (4.52) より、初期条件が (4.46) のとき、

$$\gamma_t|0(t)\rangle = 0 \tag{4.57}$$

となる。また、$\hat{H}$ は、$\gamma_t^\mu, \bar{\gamma}_t^\mu$ によって、次のように書ける：

$$
\begin{aligned}
\hat{H} &= \hbar\omega\bar{a}^\mu a^\mu + \hbar\omega + i\hat{\Pi} \\
&= \hbar\omega\bar{\gamma}_t^\mu \gamma_t^\mu + \hbar\omega + i\hat{\Pi} \\
&= \hbar\omega(\gamma^{\text{♀}}\gamma_t - \tilde{\gamma}^{\text{♀}}\tilde{\gamma}_t) + i\hat{\Pi}, \qquad (4.58) \\
\hat{\Pi} &= -\hbar\kappa\bar{a}^\mu A^{\mu\nu} a^\nu + \hbar\kappa \\
&= -\hbar\kappa\bar{\gamma}_t^\mu[\mathcal{B}(t)A\mathcal{B}^{-1}(t)]^{\mu\nu}\gamma_t^\nu + \hbar\kappa \\
&= -\hbar\kappa\bar{\gamma}_t^\mu\Big[\tau_3^{\mu\nu} + 2(n(t)-\bar{n})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu}\Big]\gamma_t^\nu + \hbar\kappa \\
&= -\hbar\kappa(\gamma^{\text{♀}}\gamma_t + \tilde{\gamma}^{\text{♀}}\tilde{\gamma}_t + 2[n(t)-\bar{n}]\gamma^{\text{♀}}\tilde{\gamma}^{\text{♀}}). \qquad (4.59)
\end{aligned}
$$

これと (4.57) より、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|0(t)\rangle &= \frac{1}{i\hbar}\hat{H}|0(t)\rangle \\
&= -2\kappa[n(t)-\bar{n}]\gamma^{\text{♀}}\tilde{\gamma}^{\text{♀}}|0(t)\rangle \\
&= \frac{dn(t)}{dt}\gamma^{\text{♀}}\tilde{\gamma}^{\text{♀}}|0(t)\rangle \qquad (4.60)
\end{aligned}
$$

を得る。これを解くと、

$$
\begin{aligned}
|0(t)\rangle &= \exp\Big[\int_0^t dt'\frac{dn(t')}{dt'}\gamma^{\text{♀}}\tilde{\gamma}^{\text{♀}}\Big]|0\rangle \\
&= \exp\Big[[n(t)-n]\gamma^{\text{♀}}\tilde{\gamma}^{\text{♀}}\Big]|0\rangle \qquad (4.61)
\end{aligned}
$$

となる [11)]。この表式により、「不安定真空の時間発展がサーマル・ペア $\gamma^{\text{♀}}\tilde{\gamma}^{\text{♀}}$ の真空への凝縮により実現される」と解釈できる。この表式は、散逸の自発的発現 (spontanious creation of dissipation) という機構の存在を予感させる。

4.3 覚え書き

(3.28) または (4.22) は、

$$
\begin{aligned}
\hat{\Pi} &= -\kappa[(1+2\bar{n})(a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}) - 2(1+\bar{n})a\tilde{a} - 2\bar{n}a^\dagger\tilde{a}^\dagger] - 2\kappa\bar{n} \\
&= \kappa[-(1+2\bar{n})(aa^\dagger + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}) + 2(1+\bar{n})a\tilde{a} + 2\bar{n}a^\dagger\tilde{a}^\dagger] + \kappa \qquad (4.62)
\end{aligned}
$$

であった。今、

$$
S_+ \overset{\text{def}}{=} \tilde{a}^\dagger a^\dagger, \quad S_- \overset{\text{def}}{=} a\tilde{a}, \quad S_z \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(aa^\dagger + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}) \qquad (4.63)
$$

11) 半自由場で、初期条件が (4.46) のときは、これが成り立つ。

とすると、これらの交換関係は

$$
\begin{aligned}
[S_-, S_+] &= [a\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger a^\dagger] \\
&= [a\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger]a^\dagger + \tilde{a}^\dagger[a\tilde{a}, a^\dagger] \\
&= aa^\dagger + \tilde{a}^\dagger\tilde{a} \\
&= 2S_z, \qquad (4.64) \\
[S_-, S_z] &= \frac{1}{2}[a\tilde{a}, aa^\dagger + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}] \\
&= \frac{1}{2}(a[a, a^\dagger]\tilde{a} + a[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger]\tilde{a}) \\
&= \frac{1}{2}(a\tilde{a} + a\tilde{a}) \\
&= S_-, \qquad (4.65) \\
[S_+, S_z] &= -S_+ \qquad (4.66)
\end{aligned}
$$

である。最後の式は，2 つ目の式の $\dagger$ をとって，$S_-^\dagger = S_+$，$S_z^\dagger = S_z$ を用いれば得られる。(4.62) は、

$$\hat{\Pi} = \kappa[-2(1+2\bar{n})S_z + 2(1+\bar{n})S_- + 2\bar{n}S_+] + \kappa \qquad (4.67)$$

となる。今、

$$S_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger\tilde{a} \qquad (4.68)$$

とすると、半自由粒子の $\hat{H}$ は、

$$\hat{H} = \omega S_0 + i\kappa[-2(1+2\bar{n})S_z + 2(1+\bar{n})S_- + 2\bar{n}S_+] + i\kappa \qquad (4.69)$$

とかける。S_0 は $S_\pm, S_z$ と可換である。実際、

$$\tilde{S}_i = S_a \quad (i = \pm, z, 0) \qquad (4.70)$$

より [12] 、

$$[S_0, S_i] = [a^\dagger a, S_i] - [a^\dagger a, S_i]^\sim \qquad (4.71)$$

であり、

$$[a^\dagger a, S_+] = a^\dagger\tilde{a}^\dagger, \quad [a^\dagger a, S_+] = -a\tilde{a}, \quad [a^\dagger a, S_z] = 0 \qquad (4.72)$$

なので、

$$[S_0, S_i] = 0 \qquad (4.73)$$

---

[12]

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}_z &= \frac{1}{2}(a^\dagger a + \tilde{a}\tilde{a}^\dagger) \\
&= \frac{1}{2}([aa^\dagger + 1] + [\tilde{a}^\dagger\tilde{a} - 1]) \\
&= S_z
\end{aligned}
$$

となる。よって、時間発展の演算子は、

$$
\begin{aligned}
e^{-i\hat{H}t} &= e^{-i\omega S_0} e^{\hat{\Pi}t} \\
&= e^{-i\omega S_0 t} e^{\kappa t[-2(1+2\bar{n})S_z+2(1+\bar{n})S_-+2\bar{n}S_+]} e^{\kappa t}
\end{aligned}
\tag{4.74}
$$

となる。$e^{-i\omega S_0 t}$ という因子は何番目に来ても良い。

後で示すように、

$$
U(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{x(A_z S_z + A_- S_- + A_+ S_+)} \tag{4.75}
$$

という演算子は、

$$
U(x) = e^{f_+(x;A_z,A_-,A_+)S_+} e^{f_z(x;A_z,A_-,A_+)S_z} e^{f_-(x;A_z,A_-,A_+)S_-} \tag{4.76}
$$

の形に書き換えるられる。よって、(4.74) は、

$$
e^{-i\hat{H}t} = e^{-i\omega S_0 t} e^{\kappa t} e^{f_+(t)S_+} e^{f_z(t)S_z} e^{f_-(t)S_-} \tag{4.77}
$$

とかける。もしも、チルダ粒子を超演算子と思うなら、

$$
S_+ \bullet = a^\dagger \bullet a, \tag{4.78}
$$

$$
S_- \bullet = a \bullet a^\dagger, \tag{4.79}
$$

$$
S_z \bullet = \frac{1}{2}(aa^\dagger \bullet + \bullet a^\dagger a) \tag{4.80}
$$

であるから、

$$
e^{f_+(t)S_+} \bullet = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_+^n(t)}{n!} (a^\dagger)^n \bullet a^n, \tag{4.81}
$$

$$
e^{f_-(t)S_-} \bullet = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_-^m(t)}{m!} a^m \bullet (a^\dagger)^m, \tag{4.82}
$$

$$
e^{f_z(t)S_z} \bullet = e^{f_z(t)aa^\dagger} \bullet e^{f_z(t)a^\dagger a} \tag{4.83}
$$

となる。また、

$$
e^{-i\hat{H}_S t} \bullet = e^{-iH_S t} \bullet e^{iH_S t}, \quad \hat{H}_S = H_S - \tilde{H}_S = \omega S_0 \tag{4.84}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
\rho(t) &= e^{-i\hat{H}t}\rho(0) \\
&= e^{\kappa t} e^{iH_S t} e^{f_+(t)S_+} e^{f_z(t)aa^\dagger} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_-^m(t)}{m!} a^m \rho(0) (a^\dagger)^m e^{f_z(t)a^\dagger a} \\
&= e^{\kappa t} e^{iH_S t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_+^n(t)}{n!} (a^\dagger)^n e^{f_z(t)aa^\dagger} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_-^m(t)}{m!} a^m \rho(0) (a^\dagger)^m e^{f_z(t)a^\dagger a} a^n
\end{aligned}
\tag{4.85}
$$

となる。今、

$$
\langle A \rangle_t = \mathrm{Tr}[\rho(t) A] \tag{4.86}
$$

とかくと、(4.85) より、

$$
\begin{aligned}
\langle A\rangle_t &= e^{\kappa t}\mathrm{Tr}[e^{\kappa t}e^{iH_S t}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{f_+^n(t)}{n!}\frac{f_-^m(t)}{m!}(a^\dagger)^n e^{f_z(t)aa^\dagger}a^m\rho(0)(a^\dagger)^m e^{f_z(t)a^\dagger a}a^n e^{-iH_S t}A] \\
&= \mathrm{Tr}[\rho(0)e^{\kappa t}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{f_+^n(t)}{n!}\frac{f_-^m(t)}{m!}(a^\dagger)^m e^{f_z(t)a^\dagger a}a^n e^{-iH_S t}Ae^{iH_S t}(a^\dagger)^n e^{f_z(t)aa^\dagger}a^m] \\
&= \mathrm{Tr}[\rho(0)\hat{T}(t)A], \\
\hat{T}(t)\bullet &\stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{\kappa t}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{f_+^n(t)}{n!}\frac{f_-^m(t)}{m!}(a^\dagger)^m e^{f_z(t)a^\dagger a}a^n e^{-iH_S t}\bullet e^{iH_S t}(a^\dagger)^n e^{f_z(t)aa^\dagger}a^m \\
&= e^{\kappa t}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{f_+^n(t)}{n!}\frac{f_-^m(t)}{m!}(a^\dagger)^m e^{f_z(t)a^\dagger a}a^n[e^{-i\hat{H}_S t}\bullet](a^\dagger)^n e^{f_z(t)aa^\dagger}a^m \\
&= e^{\kappa t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f_-^m(t)}{m!}(a^\dagger)^m e^{f_z(t)a^\dagger a}[e^{f_+(t)S_-}e^{-i\hat{H}_S t}\bullet]e^{f_z(t)aa^\dagger}a^m \\
&= e^{\kappa t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f_-^m(t)}{m!}(a^\dagger)^m[e^{f_z(t)S_z}e^{f_+(t)S_-}e^{-i\hat{H}_S t}\bullet]a^m \\
&= e^{\kappa t}e^{f_-(t)S_+}e^{f_z(t)S_z}e^{f_+(t)S_-}e^{i\hat{H}_S t}\bullet \qquad (4.87) \\
&= [e^{-i\hat{H}t}]^\dagger\bullet \\
&= e^{i\hat{H}^\dagger t}\bullet \qquad (4.88)
\end{aligned}
$$

となる。$\hat{T}(t)A$ は、いわば超演算子法でのハイゼンベルグ描像の演算子である。これの運動方程式は、

$$\frac{d}{dt}\hat{T}(t)A = i\hat{T}(t)\hat{H}^\dagger A \qquad (4.89)$$

である。

$\rho^{1/2}(t)$ について考える。散逸がない場合は、(2.4) のように、$\rho^{1/2}(t)$ の時間発展方程式を求めるのは容易だった。それは、$\rho(t)$ が、

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t), \quad U^\dagger(t) = U^{-1}(t) \qquad (4.90)$$

の形でかけたからである。散逸がある場合、(4.85) からも分かるように、これは成り立たない。

半自由粒子のように $\hat{\Pi}$ と $\hat{H}_S$ が可換の場合は、

$$e^{-i\hat{H}t} = e^{-i\hat{H}_S t}e^{\hat{\Pi}t} \qquad (4.91)$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
|0^{(0)}(t)\rangle &= e^{-i\hat{H}_S t}|(0)\rangle, \qquad (4.92) \\
A^{(0)}(t) &= e^{-\hat{\Pi}t}Ae^{\hat{\Pi}t} \qquad (4.93)
\end{aligned}
$$

とすれば、

$$
\begin{aligned}
\langle 1|A^{(0)}(t)|0^{(0)}(t)\rangle &= \langle 1|e^{-\hat{\Pi}t}Ae^{\hat{\Pi}t}|0^{(0)}(t)\rangle \\
&= \langle 1|Ae^{\hat{\Pi}t}e^{-i\hat{H}_S t}|0\rangle \\
&= \langle 1|A|0(t)\rangle \qquad (4.94)
\end{aligned}
$$

となる。つまり、真空の時間発展は、散逸がない場合と同じで、演算子の方は $\hat{\Pi}$ により変化する、という描像が可能である。逆に、

$$
\begin{aligned}
|0^{(1)}(t)\rangle &= e^{\hat{\Pi}t}|0\rangle, & (4.95)\\
A^{(1)}(t) &= e^{i\hat{H}_S t}Ae^{-i\hat{H}_S t} & (4.96)
\end{aligned}
$$

としても、

$$
\langle 1|A^{(1)}(t)|0^{(1)}(t)\rangle = \langle 1|A|0(t)\rangle \tag{4.97}
$$

である。

4.4 $su(1,1)$ の公式

(4.76) を示そう。

$$
\begin{aligned}
e^{x(A_zS_z+A_-S_-+A_+S_+)} &= U(x) \equiv e^{f_+(x)S_+}F(x), & (4.98)\\
F(0) &= 1, \quad f_+(0) = 0 & (4.99)
\end{aligned}
$$

とおく。これを微分して、

$$
(A_zS_z + A_-S_- + A_+S_+)e^{f_+(x)S_+}F(x) = f'_+(x)S_+F(x) + e^{f_+(x)S_+}F'(x)
$$

$F'(x)$ について解いて、

$$
F'(x) = [A_+ - f'_+(x)]S_+F(x) + e^{-f_+(x)S_+}(A_zS_z + A_-S_-)e^{f_+(x)S_+}F(x) \tag{4.100}
$$

を得る。今、

$$
t_i(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{-f_+(x)S_+}S_ie^{f_+(x)S_+} \tag{4.101}
$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
t'_-(x) &= -e^{-f_+(x)S_+}f'_+(x)S_+S_-e^{f_+(x)S_+} + e^{-f_+(x)S_+}S_-f'_+(x)S_+e^{f_+(x)S_+}\\
&= f'_+(x)e^{-f_+(x)S_+}[S_-, S_+]e^{f_+(x)S_+}\\
&= f'_+(x)e^{-f_+(x)S_+}2S_ze^{f_+(x)S_+}\\
&\equiv 2f'_+(x)t_z(x) & (4.102)
\end{aligned}
$$

である。ただし，第 3 等号で (4.64) を用いた。また，

$$
\begin{aligned}
t'_z(x) &= f'_+(x)e^{-f_+(x)S_+}[S_z, S_+]e^{f_+(x)S_+}\\
&= f'_+(x)e^{-f_+(x)S_+}S_+e^{f_+(x)S_+}\\
&= f'_+(x)S_+ & (4.103)
\end{aligned}
$$

である。第 2 等号で (4.66) を用いた。ところで，

$$
t_-(0) = S_-, \quad t_z(0) = S_z \tag{4.104}
$$

である。(4.103) をこの初期条件の下で解くと，

$$
t_z(x) = S_z + f_+(x)S_+ \tag{4.105}
$$

となる。これを (4.102) に代入して

$$\begin{aligned} t'_-(x) &= 2f'(x)[S_z + f_+(x)S_+] \\ &= \frac{d}{dx}[2f_+(x)S_z + f_+^2(x)S_+] \end{aligned} \tag{4.106}$$

を得る。これを初期条件 (4.104) の下で解いて,

$$t_-(x) = S_- + 2f_+(x)S_z + f_+^2(x)S_+ \tag{4.107}$$

を得る。(4.100) は、

$$\begin{aligned} F'(x) &= [A_+ - f'_+(x)]S_+F(x) + [A_zS_z + A_zf_+(x)S_+ + A_-S_- + 2A_-f_+(x)S_z + A_-f_+^2(x)S_+]F(x) \\ &= [A_+ - f'_+(x) + A_zf_+(x) + A_-f_+^2(x)]S_+F(x) + [A_zS_z + A_-S_- + 2A_-f_+(x)S_z]F(x) \end{aligned} \tag{4.108}$$

となる。今、

$$A_+ - f'_+(x) + A_zf_+(x) + A_-f_+^2(x) = 0 \tag{4.109}$$

とすると、(4.108) は、

$$F'(x) = [A_zS_z + A_-S_- + 2A_-f_+(x)S_z]F(x) \tag{4.110}$$

となる。(4.109) を (4.99) の初期条件の下に解く。

$$\begin{aligned} \frac{1}{f'_+(x)} = \frac{dx}{df_+} &= \frac{1}{A_+ + A_zf_+(x) + A_-f_+^2(x)}, \\ x &= \int_0^{f_+(x)} \frac{df}{A_+ + A_zf + A_-f^2}. \end{aligned} \tag{4.111}$$

今、

$$A_+ + A_zf + A_-f^2 = A_-(f-\alpha)(f-\beta) \quad , \tag{4.112}$$

$$\alpha, \beta = \frac{-A_z \pm \sqrt{A_z^2 - 4A_-A_+}}{2A_-} \tag{4.113}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \int_0^{f_+(x)} \frac{df}{A_+ + A_zf + A_-f^2} &= \frac{1}{A_-(\alpha-\beta)} \int_0^{f_+(x)} df \left(\frac{1}{f-\alpha} - \frac{1}{f-\beta}\right) \\ &= \frac{1}{A_-(\alpha-\beta)} \left(\ln\frac{f_+(x)-\alpha}{-\alpha} - \ln\frac{f_+(x)-\beta}{-\beta}\right) \\ &= \frac{1}{A_-(\alpha-\beta)} \ln[\frac{f_+(x)-\alpha}{f_+(x)-\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha}]. \end{aligned} \tag{4.114}$$

これと (4.111) より、

$$\begin{aligned} e^{xA_-(\alpha-\beta)} &= \frac{f_+(x)-\alpha}{f_+(x)-\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha}, \\ f_+(x) &= \beta\frac{e^{xA_-(\alpha-\beta)} - 1}{e^{xA_-(\alpha-\beta)} - \beta/\alpha} \end{aligned} \tag{4.115}$$

を得る。これは、次のようにも書ける：

$$
\begin{aligned}
f_+(x) &= \beta \frac{e^{xA_-(\alpha-\beta)/2} - e^{-xA_-(\alpha-\beta)/2}}{e^{xA_-(\alpha-\beta)/2} - \beta/\alpha e^{-xA_-(\alpha-\beta)/2}} \\
&= \frac{2\alpha\beta}{\alpha-\beta} \frac{\sinh \frac{A_-(\alpha-\beta)x}{2}}{\cosh \frac{A_-(\alpha-\beta)x}{2} + \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\sinh \frac{A_-(\alpha-\beta)x}{2}} \\
&= \frac{A_-\alpha\beta}{\phi} \frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) + \frac{A_-(\alpha+\beta)}{2\phi}\sinh(\phi x)} \\
&= \frac{A_+}{\phi} \frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)}, \qquad (4.116) \\
\phi &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{A_-(\alpha-\beta)}{2} = \sqrt{A_z^2/4 - A_-A_+}. \qquad (4.117)
\end{aligned}
$$

今、

$$
\begin{aligned}
F(x) &= e^{f_z(x)S_z}G(x), \qquad (4.118) \\
G(0) &= 1, \quad f_z(0) = 0 \qquad (4.119)
\end{aligned}
$$

とおく。これを微分し,(4.110) を代入すると、

$$
[A_zS_z + A_-S_- + 2A_-f_+(x)S_z]e^{f_z(x)S_z}G(x) = f_z'(x)S_z e^{f_z(x)S_z}G(x) + e^{f_z(x)S_z}G'(x)
$$

となり、これから、

$$
G'(x) = [A_z + 2A_-f_+(x) - f_z'(x)]S_zG(x) + A_-e^{-f_z(x)S_z}S_-e^{f_z(x)S_z}G(x) \qquad (4.120)
$$

を得る。ここで、

$$
u_-(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{-f_z(x)S_z}S_-e^{f_z(x)S_z} \qquad (4.121)
$$

を導入すると,

$$
\begin{aligned}
u_-'(x) &= f_z'(x)e^{-f_z(x)S_z}[S_-, S_z]e^{f_z(x)S_z} \\
&= f_z'(x)e^{-f_z(x)S_z}S_-e^{f_z(x)S_z} \\
&= f_z'(x)u_-(x) \qquad (4.122)
\end{aligned}
$$

である。ただし，第 2 等号で，(4.65) を用いた。これを初期条件

$$
u_-(0) = S_- \qquad (4.123)
$$

の下で解くと,

$$
u_-(x) = e^{f_z(x)}S_-
$$

すなわち、

$$
e^{-f_z(x)S_z}S_-e^{f_z(x)S_z} = e^{f_z(z)}S_- \qquad (4.124)
$$

を得る。(4.120) は、

$$
G'(x) = [A_z + 2A_-f_+(x) - f_z'(x)]S_zG(x) + A_-e^{f_z(z)}S_-G(x) \qquad (4.125)
$$

となる。今、

$$A_z + 2A_- f_+(x) - f_z'(x) = 0 \tag{4.126}$$

とすると、(4.125) は、

$$G'(x) \;=\; A_- e^{f_z(x)} S_- G(x) \tag{4.127}$$

となる。(4.126),(4.119),(4.116) より、

$$\begin{aligned}
f_z(x) \;&=\; A_z x + 2A_- \int_0^x dy\, f_+(y) \\
&=\; A_z x + \frac{1}{\phi}\int_0^x dy\, \frac{2A_-A_+\sinh(\phi y)}{\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)} \\
&=\; \frac{1}{\phi}\int_0^x dy\left[\phi A_z + \frac{2A_-A_+\sinh(\phi y)}{\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)}\right] \\
&=\; \frac{1}{\phi}\int_0^x dy\, \frac{2[A_-A_+ - A_z^2/4]\sinh(\phi y) + \phi A_z\cosh(\phi y)}{\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)} \\
&=\; \int_0^x dy\, \frac{-2\phi\sinh(\phi y) + A_z\cosh(\phi y)}{\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)} \\
&=\; -2\int_0^x dy\, \frac{1}{\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)}\frac{d}{dy}[\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)] \\
&=\; -2\ln[\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)] + 2\ln[\cosh(0) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(0)] \\
&=\; -2\ln[\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)]
\end{aligned} \tag{4.128}$$

となる。(4.127),(4.119) より、

$$G(x) \;=\; e^{f_-(x)S_-}, \tag{4.129}$$

$$f_-(x) \;=\; A_- \int_0^x dy\, e^{f_z(y)} \tag{4.130}$$

であり、(4.128) より、

$$f_-(x) \;=\; A_- \int_0^x \frac{dy}{[\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y)]^2} \tag{4.131}$$

である。今、

$$u = e^{\phi y} \tag{4.132}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
dy \;&=\; \frac{du}{\phi u}, \\
\cosh(\phi y) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi y) \;&=\; \frac{2\phi - A_z}{4\phi}u + \frac{2\phi + A_z}{4\phi}u^{-1}
\end{aligned}$$

なので、

$$
\begin{aligned}
f_-(x) &= A_- \int_1^{u(x)} \frac{du}{\phi u} \frac{u^2}{[\frac{2\phi - A_z}{4\phi} u^2 + \frac{2\phi + A_z}{4\phi}]^2} \\
&= A_- \int_1^{u(x)} du \, \frac{16\phi u}{[(2\phi - A_z)u^2 + 2\phi + A_z]^2} \\
&= A_- \int_1^{u(x)} du \, \frac{8\phi}{2\phi - A_z} \frac{1}{[(2\phi - A_z)u^2 + 2\phi + A_z]^2} \frac{d}{dy}[(2\phi - A_z)u^2 + 2\phi + A_z] \\
&= -A_- \frac{8\phi}{2\phi - A_z} \frac{1}{(2\phi - A_z)u^2 + 2\phi + A_z}\Big|_1^{u(x)} \\
&= -A_- \frac{8\phi}{2\phi - A_z} \Big(\frac{1}{(2\phi - A_z)u^2(x) + 2\phi + A_z} - \frac{1}{4\phi} \Big) \\
&= -A_- \frac{8\phi}{2\phi - A_z} \frac{4\phi - (2\phi - A_z)u^2(x) - 2\phi - A_z}{[(2\phi - A_z)u^2(x) + 2\phi + A_z] \cdot 4\phi} \\
&= \frac{2A_-}{2\phi - A_z} \frac{(2\phi - A_z)u^2(x) - 2\phi + A_z}{(2\phi - A_z)u^2(x) + 2\phi + A_z} \\
&= \frac{2A_-}{2\phi - A_z} \frac{(2\phi - A_z)e^{\phi x} - (2\phi - A_z)e^{-\phi x}}{(2\phi - A_z)e^{\phi x} + (2\phi + A_z)e^{-\phi x}} \\
&= 2A_- \frac{\sinh(\phi x)}{2\phi \cosh(\phi x) - A_z \sinh(\phi x)} \\
&= \frac{A_-}{\phi} \frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi} \sinh(\phi x)}
\end{aligned} \tag{4.133}
$$

となる。まとめると、

$$
e^{x(A_z S_z + A_- S_- + A_+ S_+)} = e^{f_+(x) S_+} e^{f_z(x) S_z} e^{f_-(x) S_-}, \tag{4.134}
$$

$$
f_+(x) = \frac{A_+}{\phi} \frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi} \sinh(\phi x)}, \tag{4.135}
$$

$$
f_z(x) = -2 \ln[\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi} \sinh(\phi x)], \tag{4.136}
$$

$$
f_-(x) = \frac{A_-}{\phi} \frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi} \sinh(\phi x)}, \tag{4.137}
$$

$$
\phi = \sqrt{A_z^2/4 - A_- A_+} \tag{4.138}
$$

である。

(4.77) の $f_i(t)$ を求める。この場合、

$$
A_z = -2\kappa(1 + 2\bar{n}), \quad A_- = 2\kappa(1 + \bar{n}), \quad A_+ = 2\kappa\bar{n}, \quad x = t \tag{4.139}
$$

とすればよい。このとき、

$$
\begin{aligned}
\phi &= \sqrt{A_z^2/4 - A_- A_+} \\
&= \kappa \sqrt{(1 + 2\bar{n})^2 - 4(1 + \bar{n})\bar{n}} \\
&= \kappa
\end{aligned} \tag{4.140}
$$

であり、

$$
\begin{aligned}
f_+(t) &= 2\bar{n}\frac{\sinh(\kappa t)}{\cosh(\kappa t)+(1+2\bar{n})\sinh(\kappa t)}, &(4.141)\\
f_z(t) &= -2\ln[\cosh(\kappa t)+(1+2\bar{n})\sinh(\kappa t)], &(4.142)\\
f_-(t) &= 2(1+\bar{n})\frac{\sinh(\kappa t)}{\cosh(\kappa t)+(1+2\bar{n})\sinh(\kappa t)} &(4.143)
\end{aligned}
$$

となる。$\kappa t \gg 1$ で、

$$
f_+(t) \to \frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}, \quad f_-(t) \to 1, \quad f_z(t) \to -2\kappa t - 2\ln[1+\bar{n}] \quad (\kappa t \gg 1) \tag{4.144}
$$

となる。また、$\kappa t \ll 1$ で、

$$
f_+(t) \to 2\bar{n}\kappa t, \quad f_-(t) \to 2(1+\bar{n})\kappa t, \quad f_z(t) \to -2(1+2\bar{n})\kappa t \quad (\kappa t \ll 1) \tag{4.145}
$$

である。続きは、付録 (C)。

5　非同値真空

5.1　量子力学と場の量子論との相違

5.1.1　量子力学と場の量子論との相違

正準交換関係

$$\left[a_i, a_j^\dagger\right] = \delta_{ij}\,, \quad \left[b_i, b_j^\dagger\right] = \delta_{ij} \tag{5.1}$$

を満たす N 組の生成演算子 $\{a_i^\dagger,\ b_i^\dagger\}_{i=1}^N$ と消滅演算子 $\{a_i,\ b_i\}_{i=1}^N$ を考える。この他の交換関係は 0 である。Bogoliubov 変換

$$a_i(\theta) = \cosh\theta_i a_l - \sinh\theta_i b_l^\dagger, \tag{5.2}$$

$$a_i^\dagger(\theta) = \cosh\theta_i a_l^\dagger - \sinh\theta_i b_l, \tag{5.3}$$

$$b_i(\theta) = \cosh\theta_i b_l - \sinh\theta_i a_l^\dagger, \tag{5.4}$$

$$b_i^\dagger(\theta) = \cosh\theta_i b_l^\dagger - \sinh\theta_i a_l \tag{5.5}$$

を考える。§ 2.3 で $\tilde{a}_i, \tilde{a}_i^\dagger$ を $b_i, b_i^\dagger$ と読み替えれば、そのまま§ 2.3 の公式が使える。上の変換は、ユニタリー変換

$$a_i(\theta) = U(\theta) a_i U^\dagger(\theta)\,, \quad b_i(\theta) = U(\theta) b_i U^\dagger(\theta) \tag{5.6}$$

である。ただし、

$$U(\theta) = \exp\Big(\sum_{i=1}^N \theta_i (b_i^\dagger a_i^\dagger - a_i b_i)\Big) \tag{5.7}$$

はユニタリー演算子である。

真空 $|0\rangle$ を

$$a_i|0\rangle = b_i|0\rangle = 0 \tag{5.8}$$

で定義する。新しい真空を

$$|0(\theta)\rangle \overset{\text{def}}{=} U(\theta)|0\rangle \tag{5.9}$$

で定義すると、

$$a_i(\theta)|0(\theta)\rangle = b_i(\theta)|0(\theta)\rangle = 0 \tag{5.10}$$

となる。(5.9) より，$|0(\theta)\rangle$ が新しい真空であるように見えるが，以下で示すようにそれは正しくない。(2.130) より、

$$\begin{aligned}
|0(\theta)\rangle &= \exp\Big(\sum_{i=1}^N a_i^\dagger b_i^\dagger \tanh\theta_i\Big) \exp\Big(-\sum_{i=1}^N [a_i a_i^\dagger + b_i^\dagger b_i] \ln\cosh\theta_i\Big)|0\rangle\rangle \\
&= \exp\Big(-\sum_{i=1}^N \ln\cosh\theta_i\Big) \exp\Big(\sum_{i=1}^N \tanh\theta_i a_i^\dagger b_i^\dagger\Big)|0\rangle\rangle \qquad (5.11) \\
&= \exp\Big(-\sum_{i=1}^N \ln\cosh\theta_i\Big) \prod_{i=1}^N \sum_{n_i=0}^\infty (\tanh\theta_i)^{n_i} |n_i\rangle_i |n_i\rangle_i \\
&= \exp\Big(-\sum_{i=1}^N \ln\cosh\theta_i\Big) \Big(\prod_{i=1}^N \sum_{n_i=0}^\infty\Big) \Big(\prod_{i=1}^N (\tanh\theta_j)^{n_j}\Big) |\{n_i\}, \{n_i\}\rangle \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

である。ただし、

$$|\{n_i\},\{m_i\}\rangle \;=\; \prod_{i=1}^{N}|n_i\rangle_i|m_i\rangle_i, \tag{5.13}$$

$$|n_i\rangle_i|m_i\rangle_i \;=\; \frac{1}{\sqrt{n_i!m_i!}}(a_i^\dagger)^{n_i}(b_i^\dagger)^{m_i}|0\rangle_i, \tag{5.14}$$

$$a_i|0\rangle_i = b_i|0\rangle_i \;=\; 0\,, \quad |0\rangle = \prod_{i=1}^{N}|0\rangle_i \tag{5.15}$$

である。この基底によって張られる，規格化可能なベクトルの全体を $|0\rangle$ 上の Fock 空間と言い，$\mathcal{H}(a,b)$ と書く。(5.12) の最後の式より，$|0(\theta)\rangle$ が $\mathcal{H}(a,b)$ の基底で展開されることが分かる。従って，$|0(\theta)\rangle$ は真空ではなく，真空 $|0\rangle$ 上の Fock 空間 $\mathcal{H}(a,b)$ に属する 1 つの状態ベクトルである。

今，ベクトル空間 $\mathcal{H}(a,b)$ を別の基底

$$|\{n_i\},\{m_i\}:\theta\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \Big[\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n_i!m_i!}}(a_i^\dagger(\theta))^{n_i}(b_i^\dagger(\theta))^{m_i}\Big]|0(\theta)\rangle \qquad n_i, m_i = 0,1,2,\cdots \tag{5.16}$$

で表示することを考える。よって，(5.16) で張られる，規格化可能な任意のベクトルは $\mathcal{H}(a,b)$ に属する。逆に，$\mathcal{H}(a,b)$ の任意の元は基底 (5.16) で展開できることが分かる [13)]。量子力学には，真空（および Fock 空間）は 1 種類しかないのである（同値定理）。

しかし、$N\to\infty$ の時は、この限りではない。(5.12) で

$$-\sum_{i=1}^{\infty}\ln\cosh\theta_i = -\infty \tag{5.17}$$

のときは、$|0(\theta)\rangle$ は $\mathcal{H}(a,b)$ に属さない。

上では、a_i, b_i という 2 種類の粒子を考えたが、$a_i^{(old)}$ だけがあった時に、

$$a_i = a_{2i}^{(old)}\,, \quad b_i = a_{2i+1}^{(old)} \tag{5.18}$$

によって a_i, b_i を導入することができる。$a_i^{(old)}$ の張る Fock 空間 $\mathcal{H}(a^{(old)}) = \mathcal{H}(a,b)$ と

$$a_{2i}^{(old)}(\theta) = a_i(\theta)\,, \quad a_{2i+1}^{(old)}(\theta) = b_i(\theta) \tag{5.19}$$

の張る Fock 空間 $\mathcal{H}(a^{(old)}(\theta))$ は非同値である。つまり、無限次元では、(2.10) を $\mathcal{H}(a^{(old)})$ の基底で展開するか、$\mathcal{H}(a^{(old)}(\theta))$ の基底で展開するかが問題となる。(2.12) が成立しないからである。しかし、自由度が加算無限の場合は、N を有限にしておき、最後に $N\to\infty$ とすれば、ほとんど問題ない。自由度が連続無限の時は、次の小節で議論するように、より深刻な問題が起こる。

なお、(2.131) は、

$$|0(\beta)\rangle\rangle \;=\; \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_i\ln[1+n_i(\beta)]\Big)\exp\Big(\sum_i\sqrt{\frac{n_i(\beta)}{1+n_i(\beta)}}a_i^\dagger\tilde{a}_i^\dagger\Big)|0\rangle\rangle \tag{5.20}$$

であった。ここで、

$$\sum_i\ln[1+n_i(\beta)] = \sum_i\ln\Big(1+\frac{1}{e^{\omega_l/T}-1}\Big) \tag{5.21}$$

[13)] これは，量子力学では，物理量の期待値は表示（基底）によらないことに対応する。

であり、ω_Λ を十分大きくとると、

$$\sum_{\omega_i>\omega_\Lambda}\ln\Big(1+\frac{1}{e^{\omega_l/T}-1}\Big)\approx\sum_{\omega_i>\omega_\Lambda}\frac{1}{e^{\omega_l/T}-1} \tag{5.22}$$

である。今、

$$\sum_i f(\omega_i)=\int d\omega\,D(\omega)f(\omega) \tag{5.23}$$

と近似すると、

$$\int_{\omega_\Lambda}^{\infty}d\omega\,D(\omega)\frac{1}{e^{\omega/T}-1}<\infty \tag{5.24}$$

ならば、$|0(\beta)\rangle\rangle$ は $|0\rangle\rangle$ と同値な真空である。この条件は $D(\omega)$ が ω^a のような関数なら満たされる。つまり、一般に $|0(\beta)\rangle\rangle$ は $|0\rangle\rangle$ と同値な真空である。

5.1.2 場の量子論と非同値真空

連続変数 μ でラベルされた，非可算無限自由度を持つ生成演算子 $a^\dagger(\mu)$，$b^\dagger(\mu)$ と消滅演算子 $a(\mu)$，$b(\mu)$ を考える。これらは正準交換関係

$$[a(\mu),a^\dagger(\mu')]\;=\;\delta(\mu-\mu')\,,\quad [b(\mu),b^\dagger(\mu')]=\delta(\mu-\mu') \tag{5.25}$$

を満たす。この他の交換関係は 0 である。また，真空 $|0\rangle$ を

$$a(\mu)|0\rangle=0\,,\quad b(\mu)|0\rangle=0 \tag{5.26}$$

によって導入する。$|0\rangle$ の上の Fock 空間を $\mathcal{H}[a,b]$ とする。$\mathcal{H}[a,b]$ は，$|0\rangle$ に $\alpha^\dagger(\mu)$，$b^\dagger(\mu)$ をくり返し作用させて得られる基底ベクトルによって張られる，規格化可能なベクトルの集合である。

ここで，新たな演算子

$$a_\theta(\mu)\;=\;U[\theta]a(\mu)U^\dagger[\theta]\,,\quad b_\theta(\mu)=U[\theta]b(\mu)U^\dagger[\theta] \tag{5.27}$$

をユニタリー演算子

$$U[\theta]\;=\;\exp\Big(\int d\mu\,\theta(\mu)\big[b^\dagger(\mu)a^\dagger(\mu)-a(\mu)b(\mu)\big]\Big) \tag{5.28}$$

により導入する。ただし，$\theta(\mu)$ は任意の滑らかな実 c 数関数である。前節と同様の計算により

$$a_\theta(\mu)\;=\;a(\mu)\cosh\theta(\mu)-b^\dagger(\mu)\sinh\theta(\mu), \tag{5.29}$$

$$b_\theta(\mu)\;=\;b(\mu)\cosh\theta(\mu)-a^\dagger(\mu)\sinh\theta(\mu) \tag{5.30}$$

を得る。この変換は Bogoliubov 変換と呼ばれる。

(5.27) より得られる

$$a(\mu)\;=\;U^\dagger[\theta]a_\theta(\mu)U[\theta]\,,\quad b(\mu)=U^\dagger[\theta]b_\theta(\mu)U[\theta] \tag{5.31}$$

を (5.26) に代入すると，

$$U^\dagger[\theta]a_\theta(\mu)U[\theta]|0\rangle=0\,,\quad U^\dagger[\theta]b_\theta(\mu)U[\theta]|0\rangle=0 \tag{5.32}$$

となる。ここで，状態

$$|0[\theta]\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} U[\theta]|0\rangle \tag{5.33}$$

を定義すると，この式は，

$$a_\theta(\mu)|0[\theta]\rangle = 0\,,\quad b_\theta(\mu)|0[\theta]\rangle = 0 \tag{5.34}$$

となる。

(5.28) を (5.33) に代入して，

$$\begin{aligned}|0[\theta]\rangle &= \exp\Big(\int d\mu\ \tanh\theta(\mu)a^\dagger(\mu)b^\dagger(\mu)\Big)\\ &\qquad\times\exp\Big(-\int d\mu\ \ln\cosh\theta(\mu)[a(\mu)a^\dagger(\mu)+b^\dagger(\mu)b(\mu)]\Big)|0\rangle\\ &= \exp\Big(-\delta(\mu'=0)\int d\mu\ \ln\cosh\theta(\mu)\Big)\exp\Big(\int d\mu\ \tanh\theta(\mu)a^\dagger(\mu)b^\dagger(\mu)\Big)|0\rangle\end{aligned} \tag{5.35}$$

を得る。ただし，第 1 等号でを用い $U[\theta]$ を $a(\mu)$，$a^\dagger(\mu)$ および $b(\mu)$，$b^\dagger(\mu)$ の正規積に近い形に書き直し，(5.26) を用いた。第 2 等号では，正準交換関係 (5.25) を用いた。(5.35) の最後の式は，$|0[\theta]\rangle$ を $\mathcal{H}[a,b]$ の元で展開した表式であるが，

$$-\delta(\mu'=0)\int d\mu\ \ln\cosh\theta(\mu) = -\infty \tag{5.36}$$

より，その展開係数は 0 である。これは $|0[\theta]\rangle$ が $\mathcal{H}[a,b]$ には属していないことを意味する。したがって，$|0[\theta]\rangle$ は $|0\rangle$ とは異なる新たな真空である（$|0\rangle$ とはユニタリー非同値な真空である）。これは，真空が 1 個しかない量子力学の場合との本質的な違いである。滑らかな関数 $\theta(\mu)$ は非可算無限個存在するので，非可算無限種類の真空が存在する。

連続無限自由度を扱う時は、このような問題が生じる。つまり、温度の異なる真空 [14] は非同値である。

(5.35) の表式は係数が 0 となり，数学的には意味がない。数学的な解析は，数学的に意味のある Bogoliubov 変換 (5.29)，(5.30) や (5.34) を基礎に置くべきである。

有限自由度の場合は、Fock 空間は全て同値なので、Tr をどんな基底で計算してもよかった。非同値の真空が存在する場合、Tr をどの基底で計算するかが問題である。カノニカル集団は $e^{-\beta H}/\mathrm{Tr}[e^{-\beta H}]$ で記述されるが、場の量子論ではこれは well-defined でない（H のほとんどの固有値は $\pm\infty$ らしい）。量子系をはじめから自由度無限大にして扱う C^* 代数では、KMS 条件が出発点となる。第 2 章で、熱平均と TFD の真空期待値の同等性を証明したが、場の理論では証明はできない。むしろ、熱平均を TFD の真空期待値で定義する。なお、TFD を非平衡へ拡張するとき、以下に述べるダイナミカル・マップの扱いに注意しなくてはならない (観測粒子と、Fock 空間を構成する準粒子は同一でない。)

5.2 ダイナミカル・マップ

5.2.1 波束の導入と Fock 空間の連続集合

$a^\dagger(\mu)|0\rangle$ という状態のノルムは発散する：

$$\begin{aligned}\|a^\dagger(\mu)|0\rangle\|^2 &= \langle 0|a(\mu)a^\dagger(\mu)|0\rangle\\ &= \langle 0|[a(\mu),a^\dagger(\mu)]|0\rangle\\ &= \delta(\mu=0)=\infty.\end{aligned} \tag{5.37}$$

[14] ユニタリー表現（$\alpha=1/2$）のケット真空である。$\alpha\neq 1/2$ の場合にもこの小節の議論を拡張できる。

これは交換関係が δ 関数を含んでいるために起こる。この交換関係は，2 乗可積分関数によってならさないと意味を持たない。つまり，$a(\mu)$ 上の Fock 空間 $\mathcal{H}[a]$ に作用するのは，$a(\mu)$ ではなく，

$$a_f = \int d\mu\, f(\mu)a(\mu) \tag{5.38}$$

である。ただし，$f(\mu)$ は 2 乗可積分な c 数関数

$$\int d\mu\, |f(\mu)|^2 < \infty \tag{5.39}$$

である。

$\{f_i(\mu)\}_{i=1}^{\infty}$ を，ある 2 乗可積分の規格直交完全系とする：

$$\langle f_i, f_j\rangle = \delta_{ij}\,, \quad \langle A, B\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int d\mu\, A^*(\mu)B(\mu). \tag{5.40}$$

このとき，任意の 2 乗可積分関数 $f(\mu)$ は $\{f_i(\mu)\}_{i=1}^{\infty}$ によって

$$f(\mu) = \sum_i c_i f_i(\mu)\,, \quad c_i = \langle f_i, f\rangle \tag{5.41}$$

と展開される。場の量子論で扱う自由度は，可算無限個なのである。(5.38) は，

$$\begin{aligned} a_f &= \int d^3k\, \sum_i c_i f_i(\mu)a(\mu) \\ &= \sum_i c_i a_i \end{aligned} \tag{5.42}$$

と書ける。ただし，

$$a_i \stackrel{\text{def}}{=} \int d\mu\, f_i(\mu)a(\mu) \tag{5.43}$$

である。a_i，$a_i^\dagger$ は，交換関係

$$\begin{aligned} [a_i, a_j^\dagger] &= \int d^3k d^3k'\, [a(\mu), a^\dagger(\mu')] f_i(\mu) f_j^*(\mu') \\ &= \int d^3k d^3k'\, \delta(\mu-\mu') f_i(\mu) f_j^*(\mu') \\ &= \int d^3k\, f_i(\mu) f_j^*(\mu) \\ &= \langle f_j, f_i\rangle \\ &= \delta_{ji} = \delta_{ij} \end{aligned} \tag{5.44}$$

を満たす。

$\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ の個数状態

$$|n_1, n_2, \cdots\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \Big[\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n_i!}} (a_i^\dagger)^{n_i}\Big]|0\rangle \tag{5.45}$$

を考える。ただし，$|0\rangle$ は

$$a_i|0\rangle = 0 \tag{5.46}$$

を満たす。ここで，個数状態の集合 $\{|n_1, n_2, \cdots\rangle\}$ のフェルミオン部分集合

$$\{|n_1, n_2, \cdots\rangle \,|\, n_i = 0, 1\} \tag{5.47}$$

を考える。この元は，

$$|n_1, n_2, \cdots\rangle \quad \longleftrightarrow \quad 0.n_1 n_2 \cdots \text{ (2 進数)} \tag{5.48}$$

のように 2 進数 $0.n_1 n_2 \cdots$ と 1 対 1 に対応する。よって，フェルミオン部分集合の濃度は，0 から 1 の間の実数全体の濃度に等しい。よって，フェルミオン部分集合は連続集合である（非可算無限個の状態を含む)。個数状態の全体 $\{|n_1, n_2, \cdots\rangle\}$ は，その部分集合が連続集合なので，連続集合である。

量子論では基底ベクトル $\{|i\rangle\}$ の重ね合わせの状態

$$|\rangle = \sum_i c_i |i\rangle \tag{5.49}$$

は，状態 $|i\rangle$ が確率 $|c_i|^2$ で観測される状態と解釈される。この確率解釈が可能なためには，あらゆる物理的状態空間は可算個の基底ベクトルで張られなくてはならない (分離可能性)。これは，個数状態の全体が，物理的状態空間の基底としては大きすぎることを意味している。そこで，0 集合と呼ばれる

$$\{|n_1, n_2, \cdots\rangle \,|\, \sum_i n_i < \infty\} \tag{5.50}$$

を考える。これは可算集合であり，真空 $|0\rangle$ を含んでいる。現実には有限個の粒子状態に興味があるので，0 集合上に構成された状態空間を考えればよい。この状態空間は Fock 空間と呼ばれる。

0 集合の選び方の自由度は，非可算無限個存在する。なぜなら，消滅演算子と真空の選び方が無数に存在するからである。真空の選択に非可算無限の自由度があるのは，個数状態の全体は連続集合なのに対して，Fock 空間の基底ベクトルは可算個であることに由来する。連続集合から可算部分集合を抽出する自由度は，非可算無限個ある。

5.2.2 準粒子とダイナミカルマップ

多数の異なる相の出現は，ハイゼンベルグ場の運動を，異なる Fock 空間で記述することに対応する。例えば，あるハミルトニアンで記述される同じ金属が，常伝導相と超伝導相を持つとする。金属の中での電子の運動は上向き, 下向きスピンを待つ電子の消滅演算子によって記述されるが，常伝導相でのそれ $a_\uparrow(\boldsymbol{k})$，$a_\downarrow(\boldsymbol{k})$ と超伝導相でのそれ $\alpha_\uparrow(\boldsymbol{k})$，$\alpha_\downarrow(\boldsymbol{k})$ とは異なる。常伝導状態は，$a_\uparrow(\boldsymbol{k})$，$a_\downarrow(\boldsymbol{k})$ で定義される真空 $|0\rangle$ の上に作られた Fock 空間で記述される。一方，超伝導状態は，$\alpha_\uparrow(\boldsymbol{k})$，$\alpha_\downarrow(\boldsymbol{k})$ で定義される真空 $|0\rangle\rangle$ の上に作られる Fock 空間で記述される。超伝導相の真空 $|0\rangle\rangle$ は，常伝導相の真空 $|0\rangle$ に Cooper 対が凝縮したものとして解釈される（(5.33) の $a(\mu)$，$b(\mu)$ を，フェルミオンの $a_\uparrow(\boldsymbol{k})$，$a_\downarrow(\boldsymbol{k})$ に置き換えた式から，この解釈が得られる)。

各 Fock 空間は，それぞれの真空への粒子凝縮の形によって区別され，異なる 0 集合を抽出している。Fock 空間が $a(\mu)$ に対する 0 集合上に作られているとき，$a^\dagger(\mu)$ により生成される粒子を準粒子と言う。ハイゼンベルグ場の漸近場 (無限遠で観測にかかる場) は準粒子として選ぶことができる。しかし，漸近場が存在しない場合にも準粒子の概念は有用である。

いかなる演算子も，ある準粒子の真空の上の Fock 空間への作用として定義される。そこで，ハイゼンベルグ場 $\psi(x)$ は，準粒子場 $\varphi(x)$ または，準粒子の生成・消滅演算子 $a(\mu), a^\dagger(\mu)$ によって，

$$\psi(x) = \psi[x|\varphi] \tag{5.51}$$

$$= \psi[x|a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k})] \tag{5.52}$$

のように表わされる。ここで，$\psi[x|\bullet]$ は $\psi(x)$ を準粒子場 $\bullet$ で展開した表式を表わし，$\bullet$ が異なれば関数形も異なる。このように，ハイゼンベルグ場を準粒子場で表わしたものをダイナミカルマップと言う。

A　不確定性関係

ユニタリー表現では、ケット真空 (2.16), ブラ真空 (2.17) は、

$$
\begin{aligned}
|0\rangle &= \rho^{1/2}|I\rangle, & \text{(A.1)}\\
\langle 1| &= \langle I|\rho^{1/2} = |0\rangle^\dagger & \text{(A.2)}
\end{aligned}
$$

となる。(2.20) より

$$\langle\cdots\rangle = \mathrm{Tr}(\rho\cdots) = \langle 1|\cdots|0\rangle \tag{A.3}$$

である。エルミート演算子 A, B に対して、

$$\breve{A} \stackrel{\text{def}}{=} A - \langle A\rangle, \quad \breve{B} \stackrel{\text{def}}{=} B - \langle B\rangle \tag{A.4}$$

を定義する。また、λ を実パラメーターとして、

$$|\lambda\rangle \stackrel{\text{def}}{=} (\breve{A} + \lambda\langle\breve{A}\breve{B}\rangle^*\breve{B})|0\rangle \tag{A.5}$$

とする。このとき、

$$
\begin{aligned}
\langle\lambda| &= |\lambda\rangle^\dagger \\
&= \langle 1|(\breve{A} + \lambda\breve{B}\langle\breve{A}\breve{B}\rangle) & \text{(A.6)}
\end{aligned}
$$

であり、(A.3) より

$$
\begin{aligned}
\langle\lambda|\lambda\rangle &= \langle\breve{A}^2\rangle + \lambda\langle\breve{A}\breve{B}\rangle^*\langle\breve{A}\breve{B}\rangle + \lambda\langle\breve{A}\breve{B}\rangle\langle\breve{A}\breve{B}\rangle^* + \lambda^2|\langle\breve{A}\breve{B}\rangle|^2\langle\breve{B}^2\rangle \\
&= \langle\breve{A}^2\rangle + 2\lambda|\langle\breve{A}\breve{B}\rangle|^2 + \lambda^2|\langle\breve{A}\breve{B}\rangle|^2\langle\breve{B}^2\rangle & \text{(A.7)}\\
&= \langle\breve{B}^2\rangle|\langle\breve{A}\breve{B}\rangle|^2\big(\lambda + \frac{1}{\langle\breve{B}^2\rangle}\big)^2 - \frac{|\langle\breve{A}\breve{B}\rangle|^2}{\langle\breve{B}^2\rangle} + \langle\breve{A}^2\rangle & \text{(A.8)}
\end{aligned}
$$

となる。$\langle\lambda|\lambda\rangle \geq 0$ であるから上式で $\lambda = -\langle\breve{B}^2\rangle^{-1}$ とすることで、

$$0 \leq -\frac{|\langle\breve{A}\breve{B}\rangle|^2}{\langle\breve{B}^2\rangle} + \langle\breve{A}^2\rangle$$

すなわち、

$$\langle\breve{A}^2\rangle\langle\breve{B}^2\rangle \geq |\langle\breve{A}\breve{B}\rangle|^2 \tag{A.9}$$

を得る。

今、

$$
\begin{aligned}
\Delta A &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2} = \sqrt{\langle\breve{A}^2\rangle}, & \text{(A.10)}\\
\Delta B &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle B^2\rangle - \langle B\rangle^2} = \sqrt{\langle\breve{B}^2\rangle}, & \text{(A.11)}\\
V_{AB} &\stackrel{\text{def}}{=} \langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle = \langle\breve{A}\breve{B}\rangle & \text{(A.12)}
\end{aligned}
$$

とすると、(A.9) は

$$\Delta A\Delta B \geq |V_{AB}| \tag{A.13}$$

となる。$V_{AB} = \langle \breve{A}\breve{B} \rangle$ を変形すると、

$$\begin{aligned} V_{AB} &= \frac{\langle \breve{A}\breve{B}\rangle + \langle \breve{B}\breve{A}\rangle}{2} + \frac{\langle [\breve{A}, \breve{B}]\rangle}{2} \\ &= \frac{\langle \breve{A}\breve{B}\rangle + \langle \breve{B}\breve{A}\rangle}{2} + \frac{\langle [A, B]\rangle}{2} \end{aligned} \tag{A.14}$$

となり、この式の † から

$$V_{AB}^* = \frac{\langle \breve{A}\breve{B}\rangle + \langle \breve{B}\breve{A}\rangle}{2} - \frac{\langle [A, B]\rangle}{2} \tag{A.15}$$

を得る。上 2 式より、

$$\mathrm{Re}V_{AB} = \frac{\langle \breve{A}\breve{B}\rangle + \langle \breve{B}\breve{A}\rangle}{2}, \quad \mathrm{Im} = \frac{\langle [A, B]\rangle}{2i} \tag{A.16}$$

がわかる。よって、

$$|V_{AB}| = \left[\left(\frac{\langle \breve{A}\breve{B}\rangle + \langle \breve{B}\breve{A}\rangle}{2}\right)^2 + \left(\frac{\langle [A, B]\rangle}{2i}\right)^2\right]^{1/2} \tag{A.17}$$

$$\geq \frac{1}{2}\left|\frac{\langle [A, B]\rangle}{i}\right| \tag{A.18}$$

となる。これを (A.13) に代入して、不確定性関係

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}\left|\frac{\langle [A, B]\rangle}{i}\right| \tag{A.19}$$

を得る。特に、

$$[A, B] = i\hbar \tag{A.20}$$

のときは、

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{\hbar}{2} \tag{A.21}$$

となる。

B　Bogoliubov 変換

B.1　(5.6),(5.27) の導出

(5.6),(5.27) は

$$\alpha(\theta) = e^{iG(\theta)} \alpha e^{-iG(\theta)} \tag{B.1}$$

の形に書ける。ただし，

$$\begin{aligned} \alpha &= a_i, b_i\,,\ \ a(\mu), b(\mu), && \text{(B.2)} \\ \alpha(\theta) &= a_i(\theta), b_i(\theta)\,,\ \ a_\theta(\mu), b_\theta(\mu) && \text{(B.3)} \end{aligned}$$

であり，

$$iG(\theta) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i (b_i^\dagger a_i^\dagger - a_i b_i)\,,\ \ \int d\mu\, \theta(\mu)[b^\dagger(\mu)a^\dagger(\mu) - a(\mu)b(\mu)] \tag{B.4}$$

である。(B.1) の θ を $x\theta$ に置き換えたものを x で微分すると，

$$\frac{d}{dx}\alpha(x\theta) = e^{iG(x\theta)}[iG(\theta), \alpha] e^{-iG(x\theta)} \tag{B.5}$$

を得る。$\alpha = a_i$，b_i の場合，$[iG(\theta), \alpha]$ は

$$\begin{aligned} [\sum_{j=1}^{N} \theta_j (b_j^\dagger a_j^\dagger - a_j b_j), a_i] &= \sum_{j=1}^{N} \theta_j b_j^\dagger [a_j^\dagger, a_i] \\ &= \sum_{j=1}^{N} \theta_j b_j^\dagger (-\delta_{ij}) \\ &= -\theta_i b_i^\dagger, && \text{(B.6)} \\ [\sum_{j=1}^{N} \theta_j (b_j^\dagger a_j^\dagger - a_j b_j), b_i] &= \sum_{j=1}^{N} \theta_j b_j^\dagger [b_j^\dagger, b_i] a_j^\dagger \\ &= \sum_{j=1}^{N} \theta_j (-\delta_{ij}) a_j^\dagger \\ &= -\theta_i a_i^\dagger && \text{(B.7)} \end{aligned}$$

となる。ただし，正準交換関係 を用いた。この 2 式を (B.5) に代入して，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} a_i(x\theta) &= -\theta_i b_i^\dagger(x\theta), && \text{(B.8)} \\ \frac{d}{dx} b_i(x\theta) &= -\theta_i a_i^\dagger(x\theta) && \text{(B.9)} \end{aligned}$$

を得る。$\alpha = a(\mu)$，$b(\mu)$ の場合，$[iG(\theta), \alpha]$ は

$$
\begin{aligned}
\left[\int d\mu'\,\theta(\mu')[b^\dagger(\mu')a^\dagger(\mu') - a(\mu')b(\mu')], a(\mu)\right] &= \int d\mu'\,\theta(\mu')b^\dagger(\mu')[a^\dagger(\mu'), a(\mu)] \\
&= \int d\mu'\,\theta(\mu')b^\dagger(\mu')[-\delta(\mu-\mu')] \\
&= -\theta(\mu)b^\dagger(\mu), && \text{(B.10)} \\
\left[\int d\mu'\,\theta(\mu')[b^\dagger(\mu')a^\dagger(\mu') - a(\mu')b(\mu')], b(\mu)\right] &= \int d\mu'\,\theta(\mu')[b^\dagger(\mu'), b(\mu)]a^\dagger(\mu') \\
&= \int d\mu'\,\theta(\mu')[-\delta(\mu-\mu')]a^\dagger(\mu') \\
&= -\theta(\mu)a^\dagger(\mu) && \text{(B.11)}
\end{aligned}
$$

となる。ただし，交換関係 (5.25) を用いた。この 2 式を (B.5) に代入して，

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}a_{x\theta}(\mu) &= -\theta(\mu)b^\dagger_{x\theta}(\mu), && \text{(B.12)} \\
\frac{d}{dx}b_{x\theta}(\mu) &= -\theta(\mu)a^\dagger_{x\theta}(\mu) && \text{(B.13)}
\end{aligned}
$$

を得る。

今，

$$
a = a_i, a(\mu), \quad b = b_i, b(\mu), \tag{B.14}
$$

$$
a(\theta) = a_i(\theta), a_\theta(\mu), \quad b(\theta) = b_i(\theta), b_\theta(\mu), \tag{B.15}
$$

$$
\theta = \theta_i, \theta(\mu) \tag{B.16}
$$

とすると，(B.8)，(B.9) および (B.12)，(B.13) は，まとめて

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}a(x\theta) &= -\theta b^\dagger(x\theta), && \text{(B.17)} \\
\frac{d}{dx}b(x\theta) &= -\theta a^\dagger(x\theta) && \text{(B.18)}
\end{aligned}
$$

と書ける。この 2 式の $\dagger$ より

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}a^\dagger(x\theta) &= -\theta b(x\theta), && \text{(B.19)} \\
\frac{d}{dx}b^\dagger(x\theta) &= -\theta a(x\theta) && \text{(B.20)}
\end{aligned}
$$

を得る。これらを初期条件

$$
a^\dagger(0) = a^\dagger, \quad b^\dagger(0) = b^\dagger, \quad a(0) = a, \quad b(0) = b \tag{B.21}
$$

の下で解く。(B.17)，(B.20) は，

$$
\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a(x\theta) \\ b^\dagger(x\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x\theta) \\ b^\dagger(x\theta) \end{pmatrix} \tag{B.22}
$$

と書ける。(B.18)，(B.19) はこの式の † に対応する。この式を $x=0$ から $x=1$ まで積分し，初期条件 (B.21) を用いると，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a(\theta) \\ b^\dagger(\theta)\end{pmatrix} &= \exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ -\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b^\dagger\end{pmatrix} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a \\ b^\dagger\end{pmatrix} \\ &= \cosh\theta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b^\dagger\end{pmatrix} - \sinh\theta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b^\dagger\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\cosh\theta - b^\dagger\sinh\theta \\ b^\dagger\cosh\theta - a\sinh\theta\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{B.23}$$

を得る。この第 1 成分が (5.2) または (5.29) であり，第 2 成分の † が (5.4) または (5.30) である。

B.2 (2.130), (5.12) の導出

今，

$$U(x) \overset{\mathrm{def}}{=} e^{x(b^\dagger a^\dagger - ab)} = e^{x(S_+ - S_-)} \tag{B.24}$$

を導入する。§ 4.4 の議論が、$\tilde{a} \to b$ の読み返でそのまま成り立つ。(4.134) すなわち、

$$e^{x(A_zS_z + A_-S_- + A_+S_+)} = e^{f_+(x)S_+}e^{f_z(x)S_z}e^{f_-(x)S_-} \tag{B.25}$$

$$f_+(x) = \frac{A_+}{\phi}\frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)}, \tag{B.26}$$

$$f_z(x) = -2\ln[\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)], \tag{B.27}$$

$$f_-(x) = \frac{A_-}{\phi}\frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) - \frac{A_z}{2\phi}\sinh(\phi x)}, \tag{B.28}$$

$$\phi = \sqrt{A_z^2/4 - A_-A_+} \tag{B.29}$$

で、

$$A_z = 0\,, \quad A_+ = 1\,, \quad A_- = -1 \tag{B.30}$$

として、

$$e^{x(S_+ - S_-)} = e^{S_+\tanh x}e^{-2S_z\ln\cosh x}e^{-S_-\tanh x} \tag{B.31}$$

を得る。この式は、

$$U(z) = e^{\theta(b^\dagger a^\dagger - ab)} = e^{a^\dagger b^\dagger\tanh\theta}e^{-(aa^\dagger + b^\dagger b)\ln\cosh\theta}e^{-ab\tanh\theta} \tag{B.32}$$

を意味する。

ユニタリー演算子 (5.7) は、(B.32) と $[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij}$ より，

$$e^{\sum_i\theta_i(b_i^\dagger a_i^\dagger - a_ib_i)} = e^{\sum_i a_i^\dagger b_i^\dagger\tanh\theta_i}e^{-\sum_i(a_ia_i^\dagger + b_i^\dagger b_i)\ln\cosh\theta_i}e^{-\sum_i a_ib_i\tanh\theta_i} \tag{B.33}$$

となる。また，ユニタリー演算子 (5.28) については，(B.33) とのアナロジーから

$$
\begin{aligned}
&\exp\Bigl(\int d\mu\,\theta(\mu)[b^\dagger(\mu)a^\dagger(\mu)-a(\mu)b(\mu)]\Bigr)\\
=\ &\exp\Bigl(\int d\mu\,a^\dagger(\mu)b^\dagger(\mu)\tanh\theta(\mu)\Bigr)\exp\Bigl(-\int d\mu\,[a(\mu)a^\dagger(\mu)+b^\dagger(\mu)b(\mu)]\ln\cosh\theta(\mu)\Bigr)\\
\times\ &\exp\Bigl(-\int d\mu\,a(\mu)b(\mu)\tanh\theta(\mu)\Bigr)
\end{aligned}
\tag{B.34}
$$

となることが分かる。

C　§ 4.4 の続き：状態の時間発展

この計算があっているかどうかは分からない。

初期状態として、

$$|0\rangle = \sum_{n,m=0}^{\infty} p_{nm}|n,m\rangle \tag{C.1}$$

を考える。ここで、$|n,m\rangle$ は $|n\rangle$ を個数状態として

$$|n,m\rangle = |n\rangle \otimes |m\rangle^{\sim} \tag{C.2}$$

で与えられる。(4.77) より、

$$e^{-i\hat{H}t}|0\rangle = e^{-i\omega S_0 t}e^{\hat{\Pi}t}|0\rangle = e^{-i\omega S_0 t}e^{\kappa t}e^{f_+(t)S_+}e^{f_z(t)S_z}e^{f_-(t)S_-}|0\rangle \tag{C.3}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} e^{f_-(t)S_-}|n,m\rangle &= \sum_{n,m=0}^{\infty} p_{nm}e^{f_-(t)a\tilde{a}}|n,m\rangle \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} p_{nm}\sum_{l=0}^{\min(n,m)}\frac{f_-^l(t)}{l!}\sqrt{\frac{n!m!}{(n-l)!(m-l)!}}|n-l,m-l\rangle, \end{aligned} \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned} e^{f_z(t)S_z}e^{f_-(t)S_-}|n,m\rangle &= \sum_{l=0}^{\min(n,m)}\frac{f_-^l(t)}{l!}\sqrt{\frac{n!m!}{(n-l)!(m-l)!}}e^{f_z(t)\frac{aa^\dagger+\tilde{a}^\dagger\tilde{a}}{2}}|n-l,m-l\rangle \\ &= \sum_{l=0}^{\min(n,m)}\frac{f_-^l(t)}{l!}\sqrt{\frac{n!m!}{(n-l)!(m-l)!}}e^{f_z(t)\frac{n-l+m-l+1}{2}}|n-l,m-l\rangle \end{aligned} \tag{C.5}$$

であり、従って、

$$\begin{aligned} &e^{f_+(t)S_+}e^{f_z(t)S_z}e^{f_-(t)S_-}|n,m\rangle \\ &= e^{\frac{1}{2}f_z(t)}\sum_{l=0}^{\min(n,m)}\frac{f_-^l(t)}{l!}\sqrt{\frac{n!m!}{(n-l)!(m-l)!}}e^{f_z(t)[\frac{n+m}{2}-l]}e^{f_+(t)a^\dagger\tilde{a}^\dagger}|n-l,m-l\rangle \\ &= e^{\frac{1}{2}f_z(t)}\sum_{l=0}^{\min(n,m)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_-^l(t)f_+^k(t)}{l!k!}\frac{\sqrt{n!m!(n-l+k)!(m-l+k)!}}{(n-l)!(m-l)!}e^{f_z(t)[\frac{n+m}{2}-l]}|n-l+k,m-l+k\rangle \end{aligned} \tag{C.6}$$

となるので、

$$\begin{aligned} e^{\hat{\Pi}t}|0\rangle &= e^{\kappa t}e^{\frac{1}{2}f_z(t)}\sum_{n,m=0}^{\infty}p_{nm}\sum_{l=0}^{\min(n,m)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_-^l(t)f_+^k(t)}{l!k!} \\ &\quad\times\frac{\sqrt{n!m!(n-l+k)!(m-l+k)!}}{(n-l)!(m-l)!}e^{f_z(t)[\frac{n+m}{2}-l]}|n-l+k,m-l+k\rangle \end{aligned} \tag{C.7}$$

となる。

今、

$$p_{mn}(t) = \langle 1||n\rangle\langle m||0(t)\rangle \tag{C.8}$$

とする。(4.97),(C.7) より、

$$p_{mn}(t) = \langle 1|e^{i\hat{H}_S t}|n\rangle\langle m|e^{-i\hat{H}_S t}|0^{(1)}(t)\rangle, \tag{C.9}$$

$$|0^{(1)}(t)\rangle = e^{\kappa t} e^{\frac{1}{2}f_z(t)} \sum_{s,u=0}^{\infty} p_{su} \sum_{l=0}^{\min(s,u)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_-^l(t) f_+^k(t)}{l!k!} \times \frac{\sqrt{s!u!(s-l+k)!(u-l+k)!}}{(s-l)!(u-l)!} e^{f_z(t)[\frac{s+u}{2}-l]}|s-l+k, u-l+k\rangle \tag{C.10}$$

であり、

$$e^{i\hat{H}_S t}|n\rangle\langle m|e^{-i\hat{H}_S t} = e^{i\omega n t}|n\rangle\langle m|e^{-i\omega m t}, \tag{C.11}$$

$$\begin{aligned}\langle 1||n\rangle\langle m||s-l+k, u-l+k\rangle &= \langle m|n-l+k\rangle \cdot \langle u-l+k|n\rangle \\ &= \delta_{m,s-l+k}\delta_{u-l+k,n}\end{aligned} \tag{C.12}$$

なので、

$$p_{mn}(t) = e^{i\omega(n-m)t} e^{\kappa t} e^{\frac{1}{2}f_z(t)} \sum_{s,u=0}^{\infty} p_{su} \sum_{l=0}^{\min(s,u)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_-^l(t) f_+^k(t)}{l!k!} \times \frac{\sqrt{s!u!m!n!}}{(s-l)!(u-l)!} e^{f_z(t)[\frac{s+u}{2}-l]} \delta_{m,s-l+k}\delta_{u-l+k,n} \tag{C.13}$$

となる。$\delta_{m,s-l+k}\delta_{u-l+k,n}$ より、

$$k-l = n-u = m-s \tag{C.14}$$

である。よって、

$$s = u+n-m, \quad u \geq n-m. \tag{C.15}$$

また、(C.14) より、

$$k = l+n-u \geq 0. \tag{C.16}$$

今、

$$\chi[A] = \begin{cases} 1 & A\text{ が真} \\ 0 & A\text{ が偽} \end{cases} \tag{C.17}$$

とすると、(C.13) は、

$$p_{mn}(t) = e^{i\omega(n-m)t} e^{\kappa t} e^{\frac{1}{2}f_z(t)} \sum_{u=\max(0,n-m)}^{\infty} p_{u+n-m,u} \sum_{l=0}^{\min(u+n-m,u)} \frac{f_-^l(t) f_+^{l+n-u}(t)}{l!(l+n-u)!} \chi[l+n-u \geq 0] \times \frac{\sqrt{(u+n-m)!u!m!n!}}{(u+n-m-l)!(u-l)!} e^{f_z(t)[\frac{n-m}{2}+u-l]} \tag{C.18}$$

となる。

今、$\kappa t \to \infty$ とする。(4.144) は、

$$f_+(t) \to \frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}, \quad f_-(t) \to 1, \quad f_z(t) \to -2\kappa t - 2\ln[1+\bar{n}] \quad (\kappa t \gg 1) \tag{C.19}$$

であった。よって、

$$e^{\kappa t}e^{\frac{1}{2}f_z(t)} \to \frac{1}{1+\bar{n}}, \quad e^{f_z(t)[\frac{n-m}{2}+u-l]} \to \delta_{\frac{n-m}{2}+u-l,0} \tag{C.20}$$

となる。$p_{mn}=p^*_{mn}$ より、$n \geq m$ として良い。このとき、

$$\max(0,n-m)=n-m, \quad \min(u+n-m,u)=u \tag{C.21}$$

となる。また、(C.20) の第 2 式より、

$$l=u+\frac{n-m}{2} \tag{C.22}$$

だが、これは、

$$n=m \tag{C.23}$$

でないと $l \leq \min(u+n-m,u)=u$ と両立しない。よって、

$$p_{mn}(\infty) = \delta_{mn}p_{nn}(\infty), \tag{C.24}$$

$$\begin{aligned}
p_{nn}(\infty) &= \frac{1}{1+\bar{n}}\sum_{u=0}^{\infty}p_{u,u}\frac{f_-^u(\infty)f_+^{u+n-u}(\infty)}{u!(u+n-u)!}\chi[u+n-u\geq 0]\frac{\sqrt{(u+0)!u!n!n!}}{(u+0-u)!(u-u)!} \\
&= \frac{1}{1+\bar{n}}\sum_{u=0}^{\infty}p_{u,u}\frac{1^u[\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}]^n}{u!n!}u!n! \\
&= \frac{1}{1+\bar{n}}\Big[\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\Big]^n\sum_{u=0}^{\infty}p_{u,u} \\
&= \frac{1}{1+\bar{n}}\Big[\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\Big]^n
\end{aligned} \tag{C.25}$$

を得る。最後の等号で、

$$\langle 1|0\rangle = \sum_{u=0}^{\infty}p_{u,u}=1 \tag{C.26}$$

を用いた。なお、

$$\begin{aligned}
\langle 1|0(t=\infty)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty}p_{nn}(\infty) \\
&= \frac{1}{1+\bar{n}}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\Big]^n \\
&= \frac{1}{1+\bar{n}}\frac{1}{1-\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{C.27}$$

である。ところで、

$$\bar{n}=\frac{1}{e^{\omega/T}-1}, \quad \frac{1}{1+\bar{n}} = \frac{e^{\omega/T}-1}{e^{\omega/T}}=1-e^{-\omega/T}, \quad \frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}=e^{-\omega/T} \tag{C.28}$$

であるから、(C.24),(C.25) は、

$$\rho(\infty) = \frac{e^{-H_S/T}}{\mathrm{Tr}[e^{-H_S/T}]} \quad (H_S=\omega a^\dagger a) \tag{C.29}$$

つまり、熱平衡状態を意味する。