

リー群の任意の元は $\exp(\text{リー代数の元})$ とかけるか？

中嶋 慧

April 8, 2025

Abstract

$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ の元 $g(t) = \mathrm{diag}(-e^t, -e^{-t})$ ($t \neq 0$) は e^X ($X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$) の形では書けないことを示す。さらに、ある $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ を用いて $g(t) = e^X$ と書けることを示す。また、

$$g_1 := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

が $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ を用いて $g_1 = e^X$ と書けないことを示す。

Contents

1	はじめに	1
2	準備：任意の 2 次行列の指数関数	2
3	$\mathrm{diag}(-e^t, -e^{-t})$ は $\exp[\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ の元] とは書けない	2
4	$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ から $\mathrm{SO}_+(3, 1)$ への 2 対 1 写像	3

1 はじめに

物理では、リー群 G の元 g は、

$$g = e^X, \quad X \in \mathfrak{g} \tag{1.1}$$

の形で書けると仮定されることが多い。 $\mathfrak{g}$ は G のリー代数である。実際、 G がコンパクトで連結なら上の仮定は正しい ($\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$ は連結なコンパクト群である)[1]。しかし、[1] によると、

$$g(t) = \mathrm{diag}(-e^t, -e^{-t}) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \quad (t \neq 0) \text{ は } e^X \quad (X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})) \text{ の形では書けない。} \tag{1.2}$$

§3 でこれ示す。§2 はそのための準備である。

2 準備：任意の2次行列の指数関数

いま、 X を任意の 2×2 行列とし、

$$x \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr}(X) \quad (2.1)$$

とする。このとき、

$$e^X = e^{x/2} \left[\cosh \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \det(X)} + \left(X - \frac{x}{2}I\right) \text{sinh} \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \det(X)} \right] \quad (2.2)$$

であることを示す。ここで、 $\text{sinh}(z) := (\sinh z)/z$ である。

まず、

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} X - \frac{x}{2}I \quad (2.3)$$

とする。ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$Y^2 = -\det(Y)I = -\left[\det(X) - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right]I \quad (2.4)$$

であるから、

$$e^Y = \cosh \sqrt{-\det(Y)}I + Y \text{sinh} \sqrt{-\det(Y)} \quad (2.5)$$

よって、

$$e^X = e^{x/2} [\cosh \sqrt{-\det(Y)}I + Y \text{sinh} \sqrt{-\det(Y)}] \quad (2.6)$$

であり、これは (2.2) である。

3 $\text{diag}(-e^t, -e^{-t})$ は $\exp[\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})]$ の元] とは書けない

$$g(t) = \begin{pmatrix} -e^t & 0 \\ 0 & -e^{-t} \end{pmatrix} = \exp X \quad (3.1)$$

と置くと、 $X \notin \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ であることを示す。まず、

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

と置くと、(2.2) より、 $b = 0 = c$ を得る。再び (2.2) より、

$$\exp \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & A-B \end{pmatrix} = e^A \begin{pmatrix} e^B & 0 \\ 0 & e^{-B} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

なので、

$$e^A = -1, \quad e^B = e^t \quad (3.4)$$

を得る。よって、

$$X = t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i\pi \begin{pmatrix} 2n+1 & 0 \\ 0 & 2m+1 \end{pmatrix} \quad (n, m \in \mathbb{Z}) \quad (3.5)$$

である。 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ の元は、

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}) \quad (3.6)$$

の形なので、 $X \notin \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ である。よって (1.2) が示された。

なお、 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の元は、

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\alpha_i \in \mathbb{C}) \quad (3.7)$$

の形なので、

$$X = (t + i[2n+1]\pi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \quad (3.8)$$

を用いて、 $g(t) = \exp(X)$ と書ける。

次に、

$$g_1 := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \quad (3.9)$$

が $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ を用いて $g_1 = e^X$ と書けないことを示す。いま、 $g_1 = e^X$ なる $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ が存在したと仮定する。 X が異なる 2 つの固有値を持つ場合は、 X および e^X は対角化可能だが、 g_1 は対角化できない。 X の固有値が縮退しているなら、 $\mathrm{Tr} X = 0$ より、固有値は 0 である。よって、 $Xv = 0$ なる非ゼロな固有ベクトルが存在し、 $e^X v = v$ である。従って、 e^X は固有値 1 を持つが、 g_1 の固有値は -1 である。これより、 g_1 は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の元の指数写像では書けない。

4 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ から $\mathrm{SO}_+(3, 1)$ への 2 対 1 写像

狭義ローレンツ群 $\mathrm{SO}_+(3, 1)$ は非コンパクトなので、 e^X ($X \in \mathfrak{so}(3, 1)$) の形では書けない元がありそうである¹⁾。 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ は $\mathrm{SO}_+(3, 1)$ の 2 重被覆群であり、 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ から $\mathrm{SO}_+(3, 1)$ への

¹⁾まず、

$$\mathrm{O}(p, q) := \{(\Lambda^a_b) \in \mathrm{M}(p+q, \mathbb{R}) \mid \Lambda^i_a \eta_{ij}^{(q,p)} \Lambda^j_b = \eta_{ab}^{(q,p)}\}$$

である。ただし、 $\eta_{ab}^{(q,p)}$ は $(q+p)$ 次の対角行列で、その最初の q 成分が -1 で、残りの p 成分が 1 である。 $d \geq 1$ に対して、 $\mathrm{O}(d, 1)$ をローレンツ群と呼ぶ。また、

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(p, q) &:= \{\Lambda \in \mathrm{O}(p, q) \mid \det(\Lambda) = 1\}, \\ \mathrm{SO}_+(d, 1) &:= \{(\Lambda^a_b) \in \mathrm{SO}(d, 1) \mid \Lambda^0_0 > 0\} \end{aligned}$$

である。

2 対 1 写像 ρ が存在する。

2 次のエルミート行列は、

$$X = \begin{pmatrix} x^0 + x^1 & x^2 - ix^3 \\ x^2 + ix^3 & x^0 - x^1 \end{pmatrix} =: (x^\mu) \quad (x^\mu \in \mathbb{R}) \quad (4.1)$$

と書け、 $P \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ に対して、

$$X' := PXP^\dagger \quad (4.2)$$

もエルミート行列である。また、

$$\det(X') = \det(X) = (x^0)^2 - [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2] \quad (4.3)$$

である。いま、

$$X' = (x'^\mu), \quad x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad \Lambda = (\Lambda^\mu_\nu) = \rho(P) \quad (4.4)$$

とすると、 $\Lambda \in \mathrm{SO}_+(3, 1)$ であり、 ρ は $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ から $\mathrm{SO}_+(3, 1)$ への 2 対 1 の全射準同型である。

この記事の初版を公開後に教えていただいた文献 [2] によると、 $\mathrm{SO}_+(3, 1)$ の任意の元は e^Y ($Y \in \mathfrak{so}(3, 1)$) と書ける。

References

- [1] 佐藤 光 『群と物理』 (丸善出版, 2016).
- [2] Jean Gallier, “Notes on Differential Geometry and Lie Groups”
<https://www.cis.upenn.edu/~cis610/diffgeom-n.pdf>