

ラグランジアン of 引数の独立性

中嶋 慧

2026 年 7 月 9 日

概要

解析力学において、 q と $\dot{q}$ との独立性が高頻度で議論的になる。このノートはそれに関するメモである。

1 ラグランジアン

教科書に以下の文章が書いてあったとする：

—— ラグランジアン of 導入 ——

作用と呼ばれる汎関数

$$S[q(\bullet)] := \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dq(t)}{dt} \right)^2 - V(q(t)) \right] \quad (1.1)$$

が極値を取るような軌道 $q(t)$ が実現する。いま、 x, v を独立変数とする 2 変数関数

$$L(x, v) := \frac{m}{2} v^2 - V(x) \quad (1.2)$$

を導入すると、作用は、

$$S[q(\bullet)] = \int_{t_0}^{t_1} dt L\left(q(t), \frac{dq(t)}{dt}\right) \quad (1.3)$$

と書ける。2 変数関数 $L(x, v)$ において x, v は独立であるが、 $q(t)$ と $\frac{dq(t)}{dt}$ とは独立ではない。この $L(x, v)$ をラグランジアンと呼ぶ。

このとき、 q と $\dot{q}$ とは独立なのか？という疑問はそもそも発生しないのではないか。なぜ 2 変数関数 $L(x, v)$ を考えるのかは不思議かもしれないが、これを導入した方が便利であることは (すぐに) 分かると思う。

2 プログラミングで考える

離散的な時刻の列 $\{t_n\}$ において、 $q(t_n)$ が与えられているとき、作用をプログラミングで数値的に求めることを考える。この場合は、ラグランジアン $L(x, v)$ を定義し、それに $q(t_n)$ とその数値微分を代入するのが便利である。このとき、ラグランジアン $L(x, v)$ を導入するのは極めて自然な行為であり、ラグランジアン of 2 つの引数が独立かどうか疑問を持たない (定義より独立である)。

3 オイラー・ラグランジュ方程式

オイラー・ラグランジュ方程式は、よく

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (3.1)$$

と書かれるが、これは、

$$\left. \frac{\partial L(x, v)}{\partial x} \right|_{x=q(t), v=dq(t)/dt} - \frac{d}{dt} \left[\left. \frac{\partial L(x, v)}{\partial v} \right|_{x=q(t), v=dq(t)/dt} \right] = 0 \quad (3.2)$$

のことである。