カルツァ・クラインの計算とクラインのゲージ理論

中嶋 慧

October 20, 2020

Abstract

このノートでは、まず、クラインの 1938 年の SU(2)「ゲージ理論」を紹介し、そのラグランジアン密度を求める。次に、パウリの 1953 年の SO(3) ゲージ理論を紹介する。最後に、カルツァ・クライン理論の非可換ゲージ場版 (キリングベクトルを使う定式化と使わない定式化の両方) のラグランジアン密度を求める。

Contents

1　クラインの1938年の理論

この章の参考文献は、[1] である。

以下、ギリシャ文字の添え字は 0, 1, 2, 3 を表し、ラテン文字の添え字は 0, 1, 2, 3, 4 を表す。

カルツァ・クライン理論の 5 次元時空の計量は、

$$\gamma_{44} = \alpha, \quad \gamma_{4\mu} = A_\mu, \quad \gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{1}{\alpha} A_{(\mu} A_{\nu)} \tag{1.1}$$

であり、逆行列は、

$$\gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{4\mu} = -\frac{1}{\alpha} A^\mu, \quad \gamma^{44} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} A_\mu A^\mu \tag{1.2}$$

である。α は定数である。$g^{\alpha\beta}$ は、$g_{\alpha\beta}$ の逆で、ギリシャ文字は $g^{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}$ で上げ下げする。クラインの 1938 年の理論では、A_μ は行列で、x^4 に依存する。通常のカルツァ・クライン理論では、A_μ は電磁場と同定される。

クラインは、メソン場と核子場の相互作用を考えた。その際、5 番目の次元 x^4 を考え、場は $e^{-iqx^4/\beta}$ の x^4 依存性を持つと仮定した。ここで、q は電荷である。β は定数である。

$A_\mu = \beta\chi_\mu$ と置く。また、以下では $\alpha = 1$ とする。

クラインは χ_μ を、核子のアイソスピン 2 重項

$$\psi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_p \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

(ψ_n, ψ_p はディラック場で、それぞれ中性子, 陽子を表す) に作用する 2 次行列

$$\chi_\mu = \begin{pmatrix} A_\mu & \tilde{B}_\mu \\ B_\mu & A_\mu \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

とした。A_μ(上述のとは別物) は x^4 に依らないが、$\tilde{B}_\mu$, B_μ は、

$$\beta\partial_4 \tilde{B}_\mu = -ie\tilde{B}_\mu, \tag{1.5}$$

$$\beta\partial_4 B_\mu = ieB_\mu \tag{1.6}$$

に従うものと仮定する。e は電気素量である。A_μ は電磁場と同定され、$\tilde{B}_\mu$, B_μ は正および負のメソンと同定される。$\bar{\psi} \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{\psi}_n, \bar{\psi}_p)$ とし、$\bar{\psi}_A (A = n, p)$ は $\bar{\psi}_A = \psi^\dagger i\varepsilon^0$ によって定義される。ε^a の定義は後述の (1.13) である。x^4 依存性は、

$$\beta\partial_4\psi = ie\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_p \end{pmatrix} = ie\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\psi, \tag{1.7}$$

$$\beta\partial_4\bar{\psi} = -ie(0, \bar{\psi}_p) \tag{1.8}$$

を仮定する。

ψ のラグランジアン密度の候補は、

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\bar{\psi}(\gamma^a\partial_a + m)\psi \\ &= -\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + \gamma^4\partial_4 + m)\psi \\ &= -\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + \gamma^4\frac{ie}{\beta}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + m)\psi \end{aligned} \tag{1.9}$$

である。ここで、γ^a は、

$$\frac{1}{2}(\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a) = \gamma^{ab} \tag{1.10}$$

で定義される。$\gamma_a \overset{\text{def}}{=} \gamma_{ab}\gamma^a$ とすると、

$$\frac{1}{2}(\gamma^a\gamma_b + \gamma_b\gamma^a) = \delta^a_b, \tag{1.11}$$
$$\frac{1}{2}(\gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_a) = \gamma_{ab} \tag{1.12}$$

である。今、

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_a\varepsilon_b + \varepsilon_b\varepsilon_a) = \eta_{ab} \quad (\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1,1)) \tag{1.13}$$

で ε_a を定義し、$\gamma_4 = \varepsilon_4$ と置く。$\gamma_4 = \gamma_{4a}\gamma^a = \gamma^4 + \beta\chi_\mu\gamma^\mu$ なので、

$$\gamma^4 = \varepsilon_4 - \beta\gamma^\mu\chi_\mu \tag{1.14}$$

となる[1)]。この表式を (1.9) に代入し、ε_4 に比例する項を落として、

$$\mathcal{L}' = -\bar{\psi}(\gamma^\mu D_\mu + m)\psi, \tag{1.15}$$
$$D_\mu\psi \overset{\text{def}}{=} \left[\partial_\mu - ie\chi_\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\psi \tag{1.16}$$

を得る。

上の $D_\mu\psi$ の表式は、SU(2) ゲージ理論の共変微分と少し異なる。今、

$$A^1_\mu \overset{\text{def}}{=} \frac{\tilde{B}_\mu + B_\mu}{\sqrt{2}}, \quad A^2_\mu \overset{\text{def}}{=} i\frac{\tilde{B}_\mu - B_\mu}{\sqrt{2}}, \quad A^3_\mu \overset{\text{def}}{=} A_\mu \tag{1.17}$$

と置くと、

$$\chi_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 A^1_\mu + \sigma_2 A^2_\mu) + A^3_\mu \tag{1.18}$$

と書ける。ここで、

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

である。また、$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1-\sigma_3)/2$ なので、$D_\mu\psi$ は、

$$D_\mu\psi = \left[\partial_\mu - ie\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 A^1_\mu + \sigma_2 A^2_\mu) + A^3_\mu\right\}\frac{1-\sigma_3}{2}\right]\psi \tag{1.20}$$

[1)] χ_μ はアイソスピン 2 重項に作用する行列であり、γ^μ は ψ_n, ψ_p に作用する行列なので、χ_μ は γ^μ と可換である。

と書ける。これは、通常の共変微分

$$\left[\partial_\mu - \frac{ie}{2}\sum_{k=1}^{3} A_\mu^k \sigma_k\right]\psi \tag{1.21}$$

と異なる。

通常の 4 次元の理論では、重力場のラグランジアン密度は、$G/(2\kappa)$ である。ここで、

$$G = g^{\mu\nu}\left[\Gamma^\rho{}_{\gamma\nu}\Gamma^\gamma{}_{\mu\rho} - \Gamma^\rho{}_{\gamma\rho}\Gamma^\gamma{}_{\mu\nu}\right] \tag{1.22}$$

である。これの γ_{ab} に対する対応物を ${}^5G$ とする。$g_{\mu\nu}$ は x^4 に依らないとして、クラインは、

$${}^5G = G - \frac{\beta^2}{4}\chi_{\mu\nu}\chi^{\mu\nu} \tag{1.23}$$

を得た。ここで、

$$\chi_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_\mu\chi_\nu - \nabla_\nu\chi_\mu, \tag{1.24}$$

$$\nabla_\mu\chi_\nu \stackrel{\text{def}}{=} (\partial_\mu - \beta\chi_\mu\partial_4)\chi_\nu \tag{1.25}$$

である。これより、

$$\chi_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A_{\mu\nu} & \tilde{B}_{\mu\nu} \\ B_{\mu\nu} & A_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \tag{1.26}$$

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie(B_\mu\tilde{B}_\nu - \tilde{B}_\mu B_\nu), \tag{1.27}$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + ie(A_\mu B_\nu - B_\mu A_\nu), \tag{1.28}$$

$$\tilde{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{B}_\nu - \partial_\nu \tilde{B}_\mu - ie(A_\mu\tilde{B}_\nu - \tilde{B}_\mu A_\nu) \tag{1.29}$$

を得る。

これらは、共変微分 (1.21) に対応する SU(2) ゲージ場の強さ

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e\sum_{b,c=1}^{3}\varepsilon^a{}_{bc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (a = 1, 2, 3) \tag{1.30}$$

と対応する。ここで、$\varepsilon^a{}_{bc} = \varepsilon_{abc}$ はレビチビタの記号である。$\chi_{\mu\nu}$ は $F_{\mu\nu}^a$ を用いて、

$$\chi_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 F_{\mu\nu}^1 + \sigma_2 F_{\mu\nu}^2) + F_{\mu\nu}^3 \tag{1.31}$$

と書ける。これは、通常の表式

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} \propto \sum_{a=1}^{3}\sigma_a F_{\mu\nu}^a \tag{1.32}$$

とは異なる。$\propto$ は定数倍を除いて等しいという意味である。

クラインは、(1.23) を、

$${}^5G = G - \frac{\beta^2}{4}\mathrm{Tr}(\chi_{\mu\nu}\chi^{\mu\nu}) \tag{1.33}$$

と解釈した。また、全系の作用として、

$$S = \int d^4x \ \sqrt{-g}\mathcal{L}_{\text{tot}}, \tag{1.34}$$

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} = \mathcal{L}' + \frac{1}{2\kappa}{}^5G - \frac{\mu^2 c^2}{2\hbar^2} g^{\mu\nu} B_\mu \tilde{B}_\nu \tag{1.35}$$

を採用した。ただし、$\beta^2 = 2\kappa$ とした。μ はメソンの質量であり、κ はアインシュタイン定数である。g は $g_{\mu\nu}$ の行列式である。

付録 (1.23) では、(1.23) の導出を試みるが、途中で諦めて $\partial_4 \chi_\mu = 0$ の場合、つまり、通常のカルツァ・クライン理論の場合に限って計算する。

次の上では、${}^5G$ に代わりに ${}^5\mathcal{N}$ を計算する。ここで、${}^5\mathcal{N}$ は 4 次元の $\mathcal{N}$ の対応物で、$\mathcal{N}$ はスカラー曲率 R や G と同じ役割を果たす量である。

2　クラインの「ゲージ理論」の ${}^5\mathcal{N}$

前章のクラインの「ゲージ理論」のラグランジアン密度を導出する。
(1.1) の計量は、

$$\gamma_{ab}dx^a dx^b = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \alpha(dx^4 + \frac{1}{\alpha}A_\mu dx^\mu)^2 \tag{2.1}$$

である。以下、$\alpha = 1$ とする。フレーム 1 形式を、

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \eta_{AB}\theta^A\theta^B, \tag{2.2}$$
$$\theta^4 \stackrel{\text{def}}{=} dx^4 + A_\mu dx^\mu \tag{2.3}$$

で導入する。η_{AB} はミンコフスキー計量である。A, B, C, D は 0 から 3 を表す。このとき、

$$\gamma_{ab}dx^a dx^b = \eta_{AB}\theta^A\theta^B + \theta^4\theta^4 \equiv \tilde{\eta}_{\mathcal{AB}}\theta^{\mathcal{A}}\theta^{\mathcal{B}} \tag{2.4}$$

となる。$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は 0 から 4 を表す。A, B の上げ下げは η_{AB} とその逆で、$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ の上げ下げは $\tilde{\eta}_{\mathcal{AB}}$ とその逆で行う。
この章の以下の計算は、[3] を参考にした。今、

$$d\theta^{\mathcal{A}} = -\tilde{\omega}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}} \wedge \theta^{\mathcal{B}}, \tag{2.5}$$
$$d\theta^A = -\omega^A{}_B \wedge \theta^B \tag{2.6}$$

によって、$\tilde{\omega}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}}, \omega^A{}_B$ を定める。また、

$$\tilde{\omega}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}} = \tilde{\omega}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{BC}}\theta^{\mathcal{C}} \tag{2.7}$$

と置くと、

$$\begin{aligned} -\tilde{\omega}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}} \wedge \theta^{\mathcal{B}} &= -\tilde{\omega}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{BC}}\theta^{\mathcal{C}} \wedge \theta^{\mathcal{B}} \\ &= -\tilde{\omega}^{\mathcal{A}}{}_{BC}\theta^C \wedge \theta^B - (\tilde{\omega}^{\mathcal{A}}{}_{4B} - \tilde{\omega}^{\mathcal{A}}{}_{B4})\theta^B \wedge \theta^4 - \tilde{\omega}^{\mathcal{A}}{}_{44}\theta^4 \wedge \theta^4 \end{aligned} \tag{2.8}$$

である。よって、

$$\tilde{\omega}^A{}_{BC} = \omega^A{}_{BC}, \tag{2.9}$$
$$\tilde{\omega}^A{}_{B4} = \tilde{\omega}^A{}_{4B}\big(= -\tilde{\omega}_4{}^A{}_B\big) \tag{2.10}$$

を得る。
ここで、

$$f_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{2.11}$$
$$c_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \partial_4 A_\mu \tag{2.12}$$

とし、

$$A \stackrel{\text{def}}{=} A_\mu dx^\mu \equiv A_A\theta^A, \tag{2.13}$$
$$c \stackrel{\text{def}}{=} c_\mu dx^\mu \equiv c_A\theta^A, \tag{2.14}$$
$$f_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu \equiv f_{AB}\theta^A \wedge \theta^B \tag{2.15}$$

と置く。
　さて、

$$\begin{aligned} d\theta^4 &= \partial_{[\mu}A_{\nu]}dx^\mu \wedge dx^\nu + \partial_4 A_\mu dx^4 \wedge dx^\mu \\ &= \frac{1}{2}f_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu + c_\mu dx^4 \wedge dx^\mu \\ &= \frac{1}{2}f_{AB}\theta^A \wedge \theta^B + c_B dx^4 \wedge \theta^B \\ &= \frac{1}{2}f_{AB}\theta^A \wedge \theta^B + c_B(\theta^4 - A_A\theta^A) \wedge \theta^B \\ &= (\frac{1}{2}f_{AB} - A_{[A}c_{B]})\theta^A \wedge \theta^B + c_B\theta^4 \wedge \theta^B \\ &= \frac{1}{2}F_{AB}\theta^A \wedge \theta^B + c_B\theta^4 \wedge \theta^B, \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$F_{AB} \overset{\mathrm{def}}{=} f_{AB} - A_A c_B + A_B c_A \tag{2.17}$$

である。これより、

$$\tilde{\omega}^4{}_B = -\frac{1}{2}F_{AB}\theta^A - c_B\theta^4, \tag{2.18}$$

$$\tilde{\omega}^4{}_{BA} = -\frac{1}{2}F_{AB} \tag{2.19}$$

となる。(2.10) より、

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^A{}_{B4} &= -\tilde{\omega}_4{}^A{}_B \\ &= -\frac{1}{2}F^A_B \end{aligned} \tag{2.20}$$

となり、

$$\tilde{\omega}^A_B = \omega^A_B - \frac{1}{2}F^A_B\theta^4 \tag{2.21}$$

となる。
　また、$\tilde{\omega}_{\mathcal{AB}} = -\tilde{\omega}_{\mathcal{BA}}$ のはずなので、

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^B{}_4 &= -\tilde{\omega}_4{}^B \\ &= \frac{1}{2}F_A{}^B\theta^A + c^B\theta^4 \end{aligned} \tag{2.22}$$

となる。
　曲率 2 形式は、

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} &= d\tilde{\omega}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} + \tilde{\omega}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}} \wedge \tilde{\omega}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \\ &\equiv \tilde{r}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} + \tilde{s}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \end{aligned} \tag{2.23}$$

である。特に、

$$\tilde{s}^A{}_B = \tilde{\omega}^A{}_C \wedge \tilde{\omega}^C{}_B + \tilde{\omega}^A{}_4 \wedge \tilde{\omega}^4{}_B, \tag{2.24}$$

$$\tilde{s}^4{}_B = \tilde{\omega}^4{}_C \wedge \tilde{\omega}^C{}_B \tag{2.25}$$

である。

また、$*$ をホッジ作用とし, $\tilde{R}$ を γ_{ab} に対するスカラー曲率とすると、

$$*\tilde{R} = \tilde{\Omega}^{\mathcal{A}}_{\ \mathcal{B}} \wedge e_{\mathcal{A}}^{\ \mathcal{B}}, \quad e^{\mathcal{A}\mathcal{B}} \overset{\text{def}}{=} *(\theta^{\mathcal{A}} \wedge \theta^{\mathcal{B}}) \tag{2.26}$$

である。また、

$$*\tilde{R} = \tilde{R}^{A}_{\ B} \wedge e_{A}^{\ B} + 2\tilde{R}^{4}_{\ B} \wedge e_{4}^{\ B} \tag{2.27}$$

である。

今、

$$\begin{aligned} -\tilde{N} &\overset{\text{def}}{=} \tilde{s}^{\mathcal{A}}_{\ \mathcal{B}} \wedge e_{\mathcal{A}}^{\ \mathcal{B}} \\ &= \tilde{s}^{A}_{\ B} \wedge e_{A}^{\ B} + 2\tilde{s}^{4}_{\ B} \wedge e_{4}^{\ B} \end{aligned} \tag{2.28}$$

とおく。$g_{\mu\nu}$ に対するこれを N と書く。$N = \mathcal{N} * 1$ とすると、

$$\frac{1}{2\kappa}\mathcal{N} \tag{2.29}$$

が、$g_{\mu\nu}$ に対するラグランジアン密度であった ($\mathcal{N}$ は、$g_{\mu\nu}$ に対するスカラー曲率 R と同等の役割を果たす)。

$$\begin{aligned} \tilde{s}^{A}_{\ B} &= \left[\omega^{A}_{\ C} - \frac{1}{2}F^{A}_{\ C}\theta^4\right] \wedge \left[\omega^{C}_{\ B} - \frac{1}{2}F^{C}_{\ B}\theta^4\right] + \left[\frac{1}{2}F_{C}^{\ A}\theta^C + c^A\theta^4\right] \wedge \left[-\frac{1}{2}F_{DB}\theta^D - c_B\theta^4\right] \\ &\approx \omega^{A}_{\ C} \wedge \omega^{C}_{\ B} - \frac{1}{4}F_{C}^{\ A}F_{DB}\theta^C \wedge \theta^D \end{aligned} \tag{2.30}$$

である。ここで、$\approx$ は、$\tilde{s}^{A}_{\ B} \wedge e_{A}^{\ B}$ の計算で落ちる項を落とした、という意味である。ただし、

$$\theta^{\mathcal{A}} \wedge \theta^{\mathcal{B}} \wedge e_{\mathcal{C}\mathcal{D}} = (\delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}}\delta^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}} - \delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{D}}\delta^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}) * 1 \tag{2.31}$$

を用いた。また、

$$\begin{aligned} \tilde{s}^{4}_{\ B} &= \left[-\frac{1}{2}F_{AC}\theta^A - c_C\theta^4\right] \wedge \left[\omega^{C}_{\ B} - \frac{1}{2}F^{C}_{\ B}\theta^4\right] \\ &\approx -\frac{1}{4}F_{AC}F^{C}_{\ B}\theta^4 \wedge \theta^A - c_C\theta^4 \wedge \omega^{C}_{\ B} \end{aligned} \tag{2.32}$$

となる。$\approx$ は、$\tilde{s}^{4}_{\ B} \wedge e_{4}^{\ B}$ の計算で落ちる項を落とした、という意味である。

上の計算より、

$$\begin{aligned} -\tilde{N} &= -N + \left[\frac{1}{4}F_{BA}F^{AB} - 2 \cdot \frac{1}{4}F_{AC}F^{CA} - 2c_A\omega^{AB}_{\ \ \ B}\right] * 1 \\ &= -N + \left[\frac{1}{4}F_{AB}F^{AB} - 2c_A\omega^{AB}_{\ \ \ B}\right] * 1 \end{aligned} \tag{2.33}$$

である。$\tilde{N} = {}^5\mathcal{N} * 1$ と置くと、

$${}^5\mathcal{N} = \mathcal{N} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2c_\mu\omega^{\mu\nu}_{\ \ \ \nu}, \tag{2.34}$$

$$F_{\mu\nu} \overset{\text{def}}{=} \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu, \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu A_\nu &\overset{\text{def}}{=} \partial_\mu A_\nu - A_\mu c_\nu \\ &= (\partial_\mu - A_\mu\partial_4)A_\nu \end{aligned} \tag{2.36}$$

となる。クラインの解釈では、

$$
{}^5\mathcal{N} = \mathcal{N} - \frac{\beta^2}{4}\mathrm{Tr}(\chi_{\mu\nu}\chi^{\mu\nu}) + 2\beta\mathrm{Tr}(\partial_4\chi_\mu)\omega^{\mu\nu}{}_\nu \tag{2.37}
$$

となる。x^4 依存性の仮定より、$\mathrm{Tr}(\partial_4\chi_\mu) = 0$ であり、上式の最後の項は落ちる。

3　パウリのSO(3) ゲージ理論 (1953年)

この章の参考文献は [1] である。パウリから A. Pais への手紙を解説する。

4 次元時空を M とし、S^2 を 2 次元球面とする。パウリは、$\tilde{M} \stackrel{\text{def}}{=} M \times S^2$ という 6 次元空間を考えた。カルツァ・クライン理論は、$M \times S^1$ の理論なので、その自然な拡張である。

M の座標を x^μ, S^2 の座標を $y^a(a = 1,2,3$ で $(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 = r^2, r$ は定数) とし、$z^A = (x^\mu, y^a)$ とする。この節では、ギリシャ文字の添え字は 0, 1, 2, 3 を表し、ラテン小文字の添え字は 1, 2, 3 を表すものとする。$\tilde{M}$ の計量を $g_{AB}(z)$ とすると、その変換則は、

$$g'_{AB}(z') = \frac{\partial z^I}{\partial z'^A}\frac{\partial z^J}{\partial z'^B} g_{IJ} \tag{3.1}$$

である。特に、座標変換

$$(x^\mu, y^a) \to (x^\mu, y'^a), \quad y^a = R^a{}_b(x) y'^b \tag{3.2}$$

を考える。$R^a{}_b(x)$ は SO(3) の元である。この時、

$$g'_{ab} = R^c{}_a R^d{}_b g_{cd} = R^c{}_a R^d{}_b \delta_{cd} = \delta_{ab}, \tag{3.3}$$

$$g'_{a\mu} = R^b{}_a \Big(g_{b\mu} + \frac{\partial R^c{}_d}{\partial x^\mu} y'^d g_{bc} \Big) \tag{3.4}$$

である。$g_{bc} = \delta_{bc}$ である。今、

$$g_{a\mu} = A_{ab\mu}(x) y^b \tag{3.5}$$

を仮定する。$A_{ab\mu}(x)$ は y^c に依らない。このとき、

$$g'_{a\mu} = A'_{ab\mu} y'^b \tag{3.6}$$

である。一方、(3.4) より、

$$g'_{a\mu} = R^c{}_a \Big(A_{cd\mu} R^d{}_b + \frac{\partial R^d{}_b}{\partial x^\mu} \delta_{cd} \Big) y'^b \tag{3.7}$$

なので、

$$A'_{ab\mu} = R^c{}_a A_{cd\mu} R^d{}_b + R^c{}_a \delta_{cd} \frac{\partial R^d{}_b}{\partial x^\mu} \tag{3.8}$$

を得る。これは、

$$\begin{aligned} A'^a{}_{b\mu} &= R_c{}^a A^c{}_{d\mu} R^d{}_b + R_c{}^a \frac{\partial R^c{}_b}{\partial x^\mu} \\ &= (R^{-1})^a{}_c A^c{}_{d\mu} R^d{}_b + (R^{-1})^a{}_c \frac{\partial R^c{}_b}{\partial x^\mu} \end{aligned} \tag{3.9}$$

とも書ける。添え字の上げ下げは δ_{ab}, δ^{ab} で行った。(3.2), (3.4) を書き直すと、

$$y'^a = S^a{}_b(x) y^b, \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{A}'_\mu = \boldsymbol{S}\boldsymbol{A}_\mu \boldsymbol{S}^{-1} - \partial_\mu \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S}^{-1} \tag{3.11}$$

となる。ただし、$\boldsymbol{S} = (S^a{}_b)$ のような行列を用いた。$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R}^{-1}$ である。(3.11) は SO(3) のゲージ場の変換則である。つまり、$A^a{}_{b\mu}$ は SO(3) のゲージ場である[2)]。

パウリは、

$$F^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu A^a{}_{b\nu} - \partial_\nu A^a{}_{b\mu} + A^a{}_{c\mu} A^c{}_{b\nu} - A^a{}_{c\nu} A^c{}_{b\mu} \tag{3.12}$$

を場の強さとした。実際、これは SO(3) のゲージ場の強さである。

[2)] $g_{a\mu}$ を $A_{ab\mu}(x) y^b$ と展開した時の係数が SO(3) ゲージ場となる。カクツァ・クライン理論では、$g_{4\mu}$ が電磁場 (U(1) ゲージ場) なのであった。

4　非可換カルツァ・クライン理論：藤井『超重力理論入門』

藤井『超重力理論入門』[2] の、カルツァ・クライン理論の非可換ゲージ場版を解説する。

4.1　設定

時空 M と内部空間 N の積 $\tilde{M} = M \times N$ を考える。M の座標 $x^{\tilde{\alpha}}$ とし、N の座標を y^{μ} とし、$z^{\Xi} = (x^{\tilde{\alpha}}, y^{\mu})$ とする。M の計量を

$$\eta_{ab}\theta^a\theta^b \tag{4.1}$$

とし、$\tilde{M}$ の計量を

$$\eta_{\mathcal{AB}}\theta^{\mathcal{A}}\theta^{\mathcal{B}} \quad (\mathcal{A} = (a, A)) \tag{4.2}$$

とする。また、

$$\theta^{\mathcal{A}} = \theta^{\mathcal{A}}_{\ \Xi} dz^{\Xi} \tag{4.3}$$

であり、

$$\begin{aligned} \theta^a{}_{\tilde{\alpha}} &= b^a{}_{\tilde{\alpha}}(x), && (4.4)\\ \theta^a{}_{\mu} &= 0, && (4.5)\\ \theta^A_{\ \mu} &= h^A_{\ \mu}(y), && (4.6)\\ \theta^A_{\ \tilde{\alpha}} &= K^A_{\ r}(y)A^r{}_{\tilde{\alpha}}(x) && (4.7) \end{aligned}$$

である [2]。r はゲージ場のラベルである。$K^A_{\ r}(y)$ はキリングベクトルで、

$$\begin{aligned} K^{\mu}{}_r\partial_{\mu}K^{\nu}{}_s - K^{\mu}{}_s\partial_{\mu}K^{\nu}{}_r &= -f^t{}_{rs}K^{\nu}{}_t, && (4.8)\\ K^{\mu}{}_r &= (h^{-1})^{\mu}{}_A K^A_{\ r} && (4.9) \end{aligned}$$

を満たす。この時、

$$K^A_{\ r} = h^A_{\ \nu}K^{\nu}{}_r \tag{4.10}$$

であり、

$$\partial_{\mu}K^A_{\ r} = \partial_{\mu}h^A_{\ \nu}K^{\nu}{}_r + h^A_{\ \nu}\partial_{\mu}K^{\nu}{}_r \tag{4.11}$$

となる。なお、

$$\theta^A = h^A_{\ \mu}dy^{\mu} + K^A_{\ r}A^r \tag{4.12}$$

である。ここで、

$$A^r \overset{\text{def}}{=} A^r{}_{\tilde{\alpha}}dx^{\tilde{\alpha}} = A^r{}_a\theta^a \tag{4.13}$$

とした。

以下、ラテン小文字の上げ下げは η_{ab} とその逆で行い、ラテン大文字の上げ下げは η^{AB} とその逆で行う。

4.2 $\tilde{\omega}^a{}_{\mathcal{BC}}$

この章の以下の計算は [3] を参考にした。
今、

$$d\theta^{\mathcal{A}} = -\tilde{\omega}^{\mathcal{A}}_{\ \mathcal{B}} \wedge \theta^{\mathcal{B}}, \tag{4.14}$$
$$d\theta^a = -\omega^a{}_b \wedge \theta^b \tag{4.15}$$

によって、$\tilde{\omega}^{\mathcal{A}}_{\ \mathcal{B}}, \omega^a{}_b$ を定める。また、

$$\tilde{\omega}^{\mathcal{A}}_{\ \mathcal{B}} = \tilde{\omega}^{\mathcal{A}}_{\ \mathcal{BC}}\theta^{\mathcal{C}}, \quad \omega^a{}_b = \omega^a{}_{bc}\theta^c \tag{4.16}$$

と置くと、

$$\begin{aligned} -\tilde{\omega}^{\mathcal{A}}_{\ \mathcal{B}} \wedge \theta^{\mathcal{B}} &= -\tilde{\omega}^{\mathcal{A}}_{\ \mathcal{BC}}\theta^{\mathcal{C}} \wedge \theta^{\mathcal{B}} \\ &= -\tilde{\omega}^{\mathcal{A}}_{\ bc}\theta^c \wedge \theta^b - (\tilde{\omega}^{\mathcal{A}}_{\ bC} - \tilde{\omega}^{\mathcal{A}}_{\ Cb})\theta^C \wedge \theta^b - \tilde{\omega}^{\mathcal{A}}{}_{BC}\theta^B \wedge \theta^C \end{aligned} \tag{4.17}$$

である。よって、

$$\tilde{\omega}^a{}_{bc} = \omega^a{}_{bc}, \tag{4.18}$$
$$\tilde{\omega}^a{}_{bC} = \tilde{\omega}^a{}_{Cb}, \tag{4.19}$$
$$\tilde{\omega}^a{}_{BC} = \tilde{\omega}^a{}_{CB} \tag{4.20}$$

を得る[3)]。

4.3 $\tilde{\omega}^A{}_{\mathcal{BC}}$

また、

$$d\theta^A = \partial_{[\mu}h^A{}_{\nu]}dy^\mu \wedge dy^\nu + \partial_\mu K^A_{\ r}dy^\mu \wedge A^r + K^A_{\ r}dA^r \tag{4.22}$$

である。ところで、

$$h^A{}_\mu dy^\mu = \theta^A - K^A_{\ r}A^r, \tag{4.23}$$
$$dy^\mu = (h^{-1})^\mu{}_A(\theta^A - K^A_{\ r}A^r) \tag{4.24}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \partial_\mu K^A_{\ r}dy^\mu &= (h^{-1})^\mu{}_B(\theta^B - K^B_{\ s}A^s)\partial_\mu K^A_{\ r} \\ &= (h^{-1})^\mu{}_B\partial_\mu K^A_{\ r}\theta^B - A^s(h^{-1})^\mu{}_B K^B_{\ s}\partial_\mu K^A_{\ r} \\ &\equiv \partial_B K^A_{\ r}\theta^B - A^s(h^{-1})^\mu{}_B K^B_{\ s}\partial_\mu K^A_{\ r} \\ &= \partial_B K^A_{\ r}\theta^B - A^s K^\mu{}_s\partial_\mu K^A_{\ r} \end{aligned} \tag{4.25}$$

[3)] 正確には、

$$\tilde{\omega}^a{}_{[bc]} = \omega^a{}_{[bc]} \tag{4.21}$$

しか言えない。$\tilde{\omega}^a{}_{bc} = \omega^a{}_{bc}$ は、$\tilde{\omega}^a{}_{bc}$ を多脚場の微分から計算して分かる。

となる。これより、

$$\begin{aligned}\partial_\mu K^A_{\ r} dy^\mu \wedge A^r &= \partial_B K^A_{\ r}\theta^B \wedge A^r - K^\mu_{\ [s}\partial_\mu K^A_{\ r]} A^s \wedge A^r \\ &= \partial_B K^A_{\ r}\theta^B \wedge A^r - K^\mu_{\ [s}\partial_\mu K^A_{\ r]} A^s \wedge A^r \end{aligned} \tag{4.26}$$

である。ここで、

$$K^\mu_{\ s}\partial_\mu K^A_{\ r} = K^\mu_{\ s}\partial_\mu h^A_{\ \nu} K^\nu_{\ r} + h^A_{\ \nu} K^\mu_{\ s}\partial_\mu K^\nu_{\ r} \tag{4.27}$$

なので、

$$\begin{aligned}K^\mu_{\ [s}\partial_\mu K^A_{\ r]} &= K^\mu_{\ s}\partial_{[\mu} h^A_{\ \nu]} K^\nu_{\ r} - h^A_{\ \nu}\frac{1}{2} f^t_{\ sr} K^\nu_{\ t} \\ &= K^\mu_{\ s}\partial_{[\mu} h^A_{\ \nu]} K^\nu_{\ r} - \frac{1}{2} f^t_{\ sr} K^A_{\ t}\end{aligned} \tag{4.28}$$

となる。よって、

$$\partial_\mu K^A_{\ r} dy^\mu \wedge A^r = \partial_B K^A_{\ r}\theta^B \wedge A^r - A^s \wedge A^r K^\mu_{\ s}\partial_{[\mu} h^A_{\ \nu]} K^\nu_{\ r} + \frac{1}{2} f^t_{\ sr} K^A_{\ t} A^s \wedge A^r \tag{4.29}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}\partial_{[\mu} h^A_{\ \nu]} dy^\mu \wedge dy^\nu &= \partial_{[\mu} h^A_{\ \nu]} (h^{-1})^\mu_{\ B}(\theta^B - K^B_{\ r} A^r) \wedge (h^{-1})^\nu_{\ C}(\theta^C - K^C_{\ s} A^s) \\ &= \partial_{[\mu} h^A_{\ \nu]} (h^{-1})^\mu_{\ B}(h^{-1})^\nu_{\ C}\theta^B \wedge \theta^C \\ &\quad -\partial_{[\mu} h^A_{\ \nu]} (h^{-1})^\nu_{\ C} K^\mu_{\ r} A^r \wedge \theta^C - \partial_{[\mu} h^A_{\ \nu]} (h^{-1})^\mu_{\ B} K^\nu_{\ s}\theta^B \wedge A^s \\ &\quad +\partial_{[\mu} h^A_{\ \nu]} K^\mu_{\ r} K^\nu_{\ s} A^r \wedge A^s\end{aligned} \tag{4.30}$$

である。今、

$$H^A_{\ \mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{[\mu} h^A_{\ \nu]}, \tag{4.31}$$

$$H^A_{\ BC} \stackrel{\text{def}}{=} H^A_{\ \mu\nu}(h^{-1})^\mu_{\ B}(h^{-1})^\nu_{\ C} \tag{4.32}$$

のように記号を定めると、

$$\begin{aligned}\partial_{[\mu} h^A_{\ \nu]} dy^\mu \wedge dy^\nu &= H^A_{\ BC}\theta^B \wedge \theta^C - H^A_{\ BC} K^B_{\ r} A^r \wedge \theta^C - H^A_{\ BC} K^C_{\ s}\theta^B \wedge A^s \\ &\quad +\partial_{[\mu} h^A_{\ \nu]} K^\mu_{\ r} K^\nu_{\ s} A^r \wedge A^s\end{aligned} \tag{4.33}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}d\theta^A &= H^A_{\ BC}\theta^B \wedge \theta^C - H^A_{\ BC} K^B_{\ r} A^r \wedge \theta^C - H^A_{\ BC} K^C_{\ s}\theta^B \wedge A^s \\ &\quad \partial_B K^A_{\ r}\theta^B \wedge A^r + \frac{1}{2} f^t_{\ sr} K^A_{\ t} A^s \wedge A^r + K^A_{\ r} dA^r \\ &= H^A_{\ [BC]}\theta^B \wedge \theta^C + \left[\partial_B K^A_{\ r}\theta^B + 2H^A_{\ [BC]} K^B_{\ r}\theta^C\right] \wedge A^r \\ &\quad + K^A_{\ r} F^r,\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$F^r \stackrel{\text{def}}{=} dA^r + \frac{1}{2} f^r_{\ st} A^s \wedge A^t \tag{4.35}$$

を得る。ところで、

$$\omega^A{}_{BC} \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^A{}_{BC} + 2\eta_{D(B}\partial_{[\beta}h^D{}_{\alpha]}(h^{-1})^{A\alpha}(h^{-1})^\beta{}_{C)} \tag{4.36}$$

とすると、$\omega^A{}_{[BC]} = H^A{}_{BC}$ である。よって、

$$\begin{aligned} d\theta^A = \omega^A{}_{BC}\theta^B \wedge \theta^C + \Big[\partial_C K^A{}_r + 2\omega^A{}_{[BC]}K^B{}_r\Big]\theta^C \wedge A^r{}_b\theta^b \\ + K^A{}_r \frac{1}{2}F^r{}_{bc}\theta^b \wedge \theta^c \end{aligned} \tag{4.37}$$

となる。ここで、

$$F^r = \frac{1}{2}F^r{}_{bc}\theta^b \wedge \theta^c \tag{4.38}$$

と置いた。よって、

$$\tilde{\omega}^A{}_{BC} = \omega^A{}_{BC}, \tag{4.39}$$

$$\tilde{\omega}^A{}_{bc} = \frac{1}{2}K^A{}_r F^r{}_{bc}, \tag{4.40}$$

$$\tilde{\omega}^A{}_{Cb} - \tilde{\omega}^A{}_{bC} = \Big[\partial_C K^A{}_r + 2\omega^A{}_{[BC]}K^B{}_r\Big]A^r{}_b \tag{4.41}$$

を得る[4]。

4.4 $\tilde{\omega}_{\mathcal{AB}}$

(4.41) は、

$$\tilde{\omega}_{ACb} + \tilde{\omega}_{bAC} = \Big[\partial_C K_{Ar} + 2H_{ABC}K^B{}_r\Big]A^r{}_b \tag{4.43}$$

と書き直せる。(4.20) より、$\tilde{\omega}_{b[AC]} = 0$ なので、

$$\tilde{\omega}_{ACb} = \Big[\partial_{[C}K_{A]r} - 2H_{[AC]B}K^B{}_r\Big]A^r{}_b \tag{4.44}$$

を得る。よって、

$$\tilde{\omega}_{bAC} = \Big[\partial_{(C}K_{A)r} - 2H_{(AC)B}K^B{}_r\Big]A^r{}_b \tag{4.45}$$

となる。

[4] 正確には、

$$\tilde{\omega}^A{}_{[BC]} = \omega^A{}_{[BC]} \tag{4.42}$$

しか言えない。$\tilde{\omega}^A{}_{BC}\omega^A{}_{BC}$ は、$\tilde{\omega}^A{}_{BC}$ を多脚場の微分から計算して分かる。

$$
\begin{aligned}
\tilde{\omega}_{ab} &= \omega_{ab} + \tilde{\omega}_{abC}\theta^C \\
&= \omega_{ab} + \tilde{\omega}_{aCb}\theta^C \\
&= \omega_{ab} - \tilde{\omega}_{Cab}\theta^C \\
&= \omega_{ab} - \frac{1}{2}K_{Ar}F^r{}_{ab}\theta^A \\
&\equiv \omega_{ab} + A_{ab}
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\omega}_{AB} &= \omega_{AB} + \tilde{\omega}_{ABc}\theta^c \\
&= \omega_{AB} + \left[\partial_{[B}K_{A]r} - 2H_{[AB]C}K^C_{\ r}\right]A^r \\
&\equiv \omega_{AB} + A_{AB}
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\omega}_{Ab} &= \tilde{\omega}_{Aba}\theta^a + \tilde{\omega}_{AbC}\theta^C \\
&= \tilde{\omega}_{Aba}\theta^a - \tilde{\omega}_{bAC}\theta^C \\
&= \frac{1}{2}K_{Ar}F^r{}_{ba}\theta^a - \left[\partial_{(C}K_{A)r} - 2H_{(AC)B}K^B_{\ r}\right]A^r{}_b\theta^C \\
&\equiv \omega_{Ab} + A_{Ab}
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

4.5 $\tilde{N}$

$$
S_{\mathcal{AB}} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\omega}_{\mathcal{AC}} \wedge \tilde{\omega}^{\mathcal{C}}{}_{\mathcal{B}}, \tag{4.49}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{N} &\stackrel{\text{def}}{=} S_{\mathcal{AB}} \wedge e^{\mathcal{BA}} \\
&= S_{ab} \wedge e^{ba} + 2S_{aB} \wedge e^{Ba} + S_{AB} \wedge e^{BA} \\
&\equiv N_1 + 2N_2 + N_3
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

とする。ここで、

$$
e^{\mathcal{BA}} \stackrel{\text{def}}{=} *(\theta^{\mathcal{B}} \wedge \theta^{\mathcal{A}}) \tag{4.51}
$$

である。また、

$$
\Omega \stackrel{\text{def}}{=} *1 \tag{4.52}
$$

とし、$\tilde{N} = \tilde{\mathcal{N}}\Omega$ と置く。このとき、

$$
\theta^{\mathcal{A}'\mathcal{B}'} \wedge e^{\mathcal{AB}} = (\eta^{\mathcal{A}'\mathcal{A}}\eta^{\mathcal{B}'\mathcal{B}} - \eta^{\mathcal{A}'\mathcal{B}}\eta^{\mathcal{B}'\mathcal{A}})\Omega \tag{4.53}
$$

である。

4.5.1 N_1

$$
\begin{aligned}
S_{ab} &= \tilde{\omega}_{a\mathcal{C}} \wedge \tilde{\omega}^{\mathcal{C}}{}_{b} \\
&= \tilde{\omega}_{ac} \wedge \tilde{\omega}^{c}{}_{b} - \tilde{\omega}_{Ca} \wedge \tilde{\omega}^{C}_{\ b} \\
&= (\omega_{ac} + A_{ac}) \wedge (\omega^{c}{}_{b} + A^{c}{}_{b}) - (\omega_{Ca} + A_{Ca}) \wedge (\omega^{C}_{\ b} + A^{C}_{\ b}) \\
&\approx \omega_{ac} \wedge \omega^{c}{}_{b} - \omega_{Ca} \wedge \omega^{C}_{\ b}.
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

ここで、$\approx$ は N_1 の計算に不要な項を落とした、という意味である。よって、

$$
\begin{aligned}
N_1 &= N - \frac{1}{4} K_{Ar} F^{r}{}_{ad} K^{A}_{\ s} F^{s}{}_{be} (\eta^{db}\eta^{ea} - \eta^{da}\eta^{eb}) \Omega \\
&= N - \frac{1}{4} \kappa_{rs}(y) F^{r}{}_{ab} F^{s,ba} \Omega \\
&= N + \frac{1}{4} \kappa_{rs}(y) F^{r}{}_{ab} F^{s,ab} \Omega
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

となる。ここで、

$$
\kappa_{rs} \stackrel{\text{def}}{=} K_{Ar} K^{A}_{\ s}
\tag{4.56}
$$

であり、

$$
N \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{ac} \wedge \omega^{c}{}_{b} \wedge e^{ba} \equiv \mathcal{N} \Omega
\tag{4.57}
$$

とした。

4.5.2 N_2

$$
\begin{aligned}
S_{aB} &= \tilde{\omega}_{a\mathcal{C}} \wedge \tilde{\omega}^{\mathcal{C}}{}_{B} \\
&= \tilde{\omega}_{ac} \wedge \tilde{\omega}^{c}{}_{B} - \tilde{\omega}_{Ca} \wedge \tilde{\omega}^{C}{}_{B} \\
&= -(\omega_{ac} + A_{ac}) \wedge (\omega_{B}^{\ c} + A_{B}^{\ c}) - (\omega_{Ca} + A_{Ca}) \wedge (\omega^{C}{}_{B} + A^{C}{}_{B}) \\
&\approx -\omega_{ac} \wedge A_{B}^{\ c} - A_{ac} \wedge \omega_{B}^{\ c} - \omega_{Ca} \wedge \omega^{C}{}_{B} - A_{Ca} \wedge A^{C}{}_{B} \\
&= -A_{ac} \wedge \omega_{B}^{\ c} + A_{B}^{\ c} \wedge \omega_{ac} + \omega^{C}{}_{B} \wedge \omega_{Ca} - A_{Ca} \wedge A^{C}{}_{B}
\end{aligned}
\tag{4.58}
$$

$$
\begin{aligned}
N_2 &= S_{aB} \wedge e^{Ba} \\
&= (-A_{ac}{}^{B} \omega_{B}^{\ ca} + A_{B}^{\ cB} \omega_{ac}{}^{a} + \omega^{C}{}_{B}{}^{B} \omega_{Ca}{}^{a} - A_{Ca}{}^{B} A^{C}{}_{B}{}^{a}) \Omega \\
&= (-\frac{1}{4} \kappa_{rs}(y) F^{r}{}_{ab} F^{s,ab} + A_{B}^{\ cB} \omega_{ac}{}^{a} + \omega^{C}{}_{B}{}^{B} \omega_{Ca}{}^{a} - A_{CaB} A^{CBa}) \Omega \\
&= (-\frac{1}{4} \kappa_{rs}(y) F^{r}{}_{ab} F^{s,ab} + A_{B}^{\ cB} \omega_{ac}{}^{a}) \Omega.
\end{aligned}
\tag{4.59}
$$

ω_{Cab} は a, b について反対称なので、$\omega_{Ca}{}^{a} = 0$ であり、A_{CaB}, A^{CBa} は C, B についてそれぞれ対称, 反対称なので、$A_{CaB} A^{CBa} = 0$ である。

よって、

$$
N_1 + 2N_2 = N - \frac{1}{4} \kappa_{rs}(y) F^{r}{}_{ab} F^{s,ab} \Omega + 2 A_{B}^{\ cB} \omega_{ac}{}^{a} \Omega
\tag{4.60}
$$

4.5.3 N_3

$$
\begin{aligned}
S_{AB} &= \tilde{\omega}_{A\mathcal{C}} \wedge \tilde{\omega}^{\mathcal{C}}{}_{B} \\
&= \tilde{\omega}_{AC} \wedge \tilde{\omega}^{C}{}_{B} - \tilde{\omega}_{Ac} \wedge \tilde{\omega}_{B}^{c} \\
&= (\omega_{AC} + A_{AC}) \wedge (\omega^{C}{}_{B} + A^{C}{}_{B}) - (\omega_{Ac} + A_{Ac}) \wedge (\omega_{B}^{c} + A_{B}^{c}) \\
&\approx \omega_{AC} \wedge \omega^{C}{}_{B} - A_{Ac} \wedge A_{B}^{c}.
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

よって、

$$
N_3 \;=\; N' - A_{Ac} \wedge A_{B}^{c} \wedge e^{BA}, \tag{4.62}
$$

$$
N' \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{AC} \wedge \omega^{C}{}_{B} \wedge e^{BA} \equiv \mathcal{N}'(y)\Omega \tag{4.63}
$$

となる。

$$
\begin{aligned}
\tilde{N} &= N + N' - \frac{1}{4}\kappa_{rs}(y) F^{r}{}_{ab} F^{s,ab}\Omega + 2A_{B}^{cB}\omega_{ac}{}^{a}\Omega - A_{Ac} \wedge A_{B}^{c} \wedge e^{BA} \\
&\equiv (\mathcal{N} + \mathcal{N}'(y) - \frac{1}{4}\kappa_{rs}(y) F^{r}{}_{ab} F^{s,ab})\Omega + 2A_{B}^{cB}\omega_{ac}{}^{a}\Omega - A_{Ac} \wedge A_{B}^{c} \wedge e^{BA}
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

最後の 2 項が余分だが、実は以下に述べる理由で 0 となる。

4.5.4 キリング条件

付録 C で示すように、キリング条件

$$
\nabla_{(\mu} K_{\nu)r} = 0 \quad (K_{\nu r} = h^{A}_{\ \nu} K_{Ar}) \tag{4.65}
$$

と

$$
\partial_{(C} K_{A)r} - 2H_{(AC)B} K^{B}_{\ r} = 0 \tag{4.66}
$$

が等価なので、

$$
A_{Bc} = 0 \tag{4.67}
$$

であり、

$$
\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N} + \mathcal{N}'(y) - \frac{1}{4}\kappa_{rs}(y) F^{r}{}_{ab} F^{s,ab} \tag{4.68}
$$

となる。

5 非可換カルツァ・クライン理論：内山『一般ゲージ場論序説』

内山『一般ゲージ場論序説』[4] の、カルツァ・クライン理論の非可換ゲージ場版を解説する。

5.1 設定

§ 4.1 の記号を使う。ただし、内部空間の次元はゲージ場の数と同じとする。$\tilde{M}$ の計量 $\gamma_{\Xi\Sigma}$ は、

$$\begin{aligned}
\gamma_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} &= g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} + \kappa_{\mu\nu} A^{\mu}{}_{\tilde{\alpha}} A^{\nu}{}_{\tilde{\beta}}, && (5.1)\\
\gamma_{\tilde{\alpha}\mu} &= A^{\nu}{}_{\tilde{\alpha}} M_{\nu\mu}(y), && (5.2)\\
\gamma_{\mu\nu} &= M^{\lambda}{}_{\mu} M_{\lambda\nu}, && (5.3)\\
M^{\mu}{}_{\nu} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} (L^{-1})^{\mu}{}_{\nu} && (5.4)
\end{aligned}$$

である。ギリシャ小文字の上げ下げは $\kappa_{\mu\nu}$ とその逆で行った。ただし、

$$\kappa_{\mu\nu} = -f^{\lambda}{}_{\mu\sigma} f^{\sigma}{}_{\nu\lambda} \tag{5.5}$$

であり、$f^{\lambda}{}_{\mu\sigma}$ は群の構造定数である。$f_{\lambda\mu\nu} = \kappa_{\lambda\delta} f^{\delta}{}_{\mu\nu}$ は完全反対称である。また、$L^{\mu}{}_{\nu}$ は、

$$\partial_{\alpha} L^{\lambda}{}_{\mu} L^{\alpha}{}_{\nu} - \partial_{\alpha} L^{\lambda}{}_{\nu} L^{\alpha}{}_{\mu} = f^{\sigma}{}_{\mu\nu} L^{\lambda}{}_{\sigma} \tag{5.6}$$

を満たす。

計量は、

$$\begin{aligned}
\gamma_{\Xi\Sigma} dz^{\Xi} dz^{\Sigma} &= g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} dx^{\tilde{\alpha}} dx^{\tilde{\beta}} + \gamma_{\mu\nu} dw^{\mu} dw^{\mu}, && (5.7)\\
dw^{\mu} &= dy^{\mu} + L^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}{}_{\tilde{\alpha}} dx^{\tilde{\alpha}} && (5.8)
\end{aligned}$$

となる。今、

$$\begin{aligned}
g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} &= \eta_{ab} \theta^{a}{}_{\tilde{\alpha}} \theta^{b}{}_{\tilde{\beta}}, && (5.9)\\
\gamma_{\mu\nu} &= \eta_{AB} \theta^{A}{}_{\mu} \theta^{B}{}_{\nu}, && (5.10)\\
\theta^{a} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \theta^{a}{}_{\tilde{\alpha}} dx^{\tilde{\alpha}}, && (5.11)\\
\theta^{A} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \theta^{A}{}_{\mu} dw^{\mu}\\
&= \theta^{A}{}_{\mu} (dy^{\mu} + L^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}), \quad A^{\nu} = A^{\nu}{}_{\tilde{\alpha}} dx^{\tilde{\alpha}} && (5.12)
\end{aligned}$$

とすると、

$$\gamma_{\Xi\Sigma} dz^{\Xi} dz^{\Sigma} = \eta_{\mathcal{A}\mathcal{B}} \theta^{\mathcal{A}} \theta^{\mathcal{B}} \tag{5.13}$$

となる。今、

$$\kappa_{\mu\nu} = \eta_{AB} U^{A}{}_{\mu} U^{B}{}_{\nu} \tag{5.14}$$

と展開すると、

$$\theta^A{}_\mu = U^A_\nu M^\nu{}_\mu \tag{5.15}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\theta^A &= U^A_\nu (M^\nu{}_\mu dy^\mu + M^\nu{}_\mu L^\mu{}_\lambda A^\lambda) \\ &= U^A_\nu (M^\nu{}_\mu dy^\mu + A^\nu)\end{aligned} \tag{5.16}$$

を得る。

以下、ラテン小文字の上げ下げは η_{ab} とその逆で行い、ラテン大文字の上げ下げは η^{AB} とその逆で行う。

5.2 $\tilde{\omega}^A{}_{\mathcal{B}}$

§ 4.2 と同様にして、

$$\tilde{\omega}^a{}_{bc} = \omega^a{}_{bc}, \tag{5.17}$$

$$\tilde{\omega}^a{}_{bC} = \tilde{\omega}^a{}_{Cb}, \tag{5.18}$$

$$\tilde{\omega}^a{}_{BC} = \tilde{\omega}^a{}_{CB} \tag{5.19}$$

を得る。

また、

$$d\theta^A = U^A_\nu (\partial_{[\lambda} M^\nu{}_{\mu]} dy^\lambda \wedge dy^\mu + dA^\nu) \tag{5.20}$$

である。ところで、

$$M^\nu{}_\mu L^\mu{}_\alpha = \delta^\nu_\alpha \tag{5.21}$$

を微分して、

$$\partial_\lambda M^\nu{}_\mu L^\mu{}_\alpha + M^\nu{}_\mu \partial_\lambda L^\mu{}_\alpha = 0, \tag{5.22}$$

$$\partial_\lambda L^\mu{}_\alpha = -L^\mu{}_\nu \partial_\lambda M^\nu{}_\beta L^\beta{}_\alpha \tag{5.23}$$

を得る。よって、(5.6), 即ち、

$$\partial_\alpha L^\lambda{}_{[\mu} L^\alpha{}_{\nu]} = \frac{1}{2} f^\sigma{}_{\mu\nu} L^\lambda{}_\sigma \tag{5.24}$$

は、

$$\begin{aligned}L^\lambda{}_\gamma \partial_\alpha M^\gamma{}_\beta L^\beta{}_{[\mu} L^\alpha{}_{\nu]} &= -\frac{1}{2} f^\sigma{}_{\mu\nu} L^\lambda{}_\sigma, \\ L^\lambda{}_\gamma \partial_{[\alpha} M^\gamma{}_{\beta]} L^\beta{}_\mu L^\alpha{}_\nu &= -\frac{1}{2} f^\sigma{}_{\mu\nu} L^\lambda{}_\sigma, \\ \partial_{[\alpha} M^\gamma{}_{\beta]} L^\beta{}_\mu L^\alpha{}_\nu &= -\frac{1}{2} f^\gamma{}_{\mu\nu}, \\ \partial_{[\alpha} M^\gamma{}_{\beta]} L^\alpha{}_\mu L^\beta{}_\nu &= \frac{1}{2} f^\gamma{}_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{5.25}$$

となる。一方、

$$
\begin{aligned}
U^A{}_\nu M^\nu{}_\mu dy^\mu &= \theta^A - U^A{}_\nu A^\nu \\
dy^\mu &= L^\mu{}_\nu [V^\nu{}_A \theta^A - A^\nu], \quad V^\nu{}_A \stackrel{\text{def}}{=} (U^{-1})^\nu{}_A
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
\partial_{[\lambda} M^\nu{}_{\mu]} dy^\lambda \wedge dy^\mu &= \partial_{[\lambda} M^\nu{}_{\mu]} L^\lambda{}_\alpha [V^\alpha_A \theta^A - A^\alpha] \wedge L^\mu{}_\beta [V^\beta_V \theta^B - A^\beta] \\
&= \frac{1}{2} f^\nu{}_{\alpha\beta} [V^\alpha_A \theta^A - A^\alpha] \wedge [V^\beta_B \theta^B - A^\beta] \\
&= \frac{1}{2} f^\nu{}_{\alpha\beta} V^\alpha_A V^\beta_B \theta^A \wedge \theta^B + \frac{1}{2} f^\nu{}_{\alpha\beta} A^\alpha \wedge A^\beta \\
&\quad - f^\nu{}_{\alpha\beta} V^{[\alpha}_A \theta^A \wedge A^{\beta]}
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

となる。したがって、

$$
\begin{aligned}
d\theta^A &= U^A_\nu \frac{1}{2} f^\nu{}_{\alpha\beta} (V^\alpha_B V^\beta_C \theta^B \wedge \theta^C - V^{[\alpha}_B \theta^B \wedge A^{\beta]}) + U^A_\nu F^\nu \\
&\equiv \frac{1}{2} f^A{}_{BC} \theta^B \wedge \theta^C - \frac{1}{2} f^A{}_{B\gamma} \theta^B \wedge A^\gamma + U^A_\nu F^\nu \\
&\equiv \frac{1}{2} f^A{}_{BC} \theta^B \wedge \theta^C - \frac{1}{2} f^A{}_{B\gamma} A^\gamma{}_c \theta^B \wedge \theta^c + \frac{1}{2} U^A_\nu F^\nu{}_{bc} \theta^b \wedge \theta^c
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

となる。ここで、

$$
F^\nu = dA^\nu + \frac{1}{2} f^\nu{}_{\alpha\beta} A^\alpha \wedge A^\beta \tag{5.29}
$$

である。これより、

$$
\tilde{\omega}^A{}_{BC} = \omega^A{}_{BC} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(f^A{}_{BC} + 2 f_{(BC)}{}^A), \tag{5.30}
$$

$$
\tilde{\omega}^A_{bc} = \frac{1}{2} U^A_\nu F^\nu{}_{bc}, \tag{5.31}
$$

$$
\tilde{\omega}^A{}_{cB} - \tilde{\omega}^A{}_{Bc} = \frac{1}{2} f^A{}_{B\gamma} A^\gamma{}_c \tag{5.32}
$$

となる[5)]。

よって、

$$
\begin{aligned}
\tilde{\omega}_{ab} &= \omega_{ab} - \frac{1}{2} U_{A\nu} F^\nu{}_{bc} \theta^A \\
&\equiv \omega_{ab} + A_{ab}.
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

また、(5.32) は

$$
\tilde{\omega}_{cAB} + \tilde{\omega}_{ABc} = -\frac{1}{2} f_{AB\gamma} A^\gamma{}_c \tag{5.35}
$$

[5)] 正確には、

$$
\tilde{\omega}^A{}_{[BC]} = \omega^A{}_{[BC]} = \frac{1}{2} f^A{}_{BC} \tag{5.33}
$$

までしか言えない。$\tilde{\omega}^A{}_{BC} = \omega^A{}_{BC}$ は多脚場の微分から計算して分かる。

となり、

$$\tilde{\omega}_{ABc} = -\frac{1}{2}f_{[AB]\gamma}A^{\gamma}{}_{c}, \tag{5.36}$$

$$\tilde{\omega}_{cAB} = -\frac{1}{2}f_{(AB)\gamma}A^{\gamma}{}_{c} \tag{5.37}$$

となる。

　よって、

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{AB} &= \frac{1}{2}f^{A}{}_{BC}\theta^{C} - \frac{1}{2}f_{[AB]\gamma}A^{\gamma}{}_{c}\theta^{c} \\ &\equiv \omega_{AB} + A_{AB}\end{aligned} \tag{5.38}$$

および、

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{Ab} &= \tilde{\omega}_{Abc}\theta^{c} - \tilde{\omega}_{bAB}\theta^{B} \\ &= \frac{1}{2}U^{A}_{\ \nu}F^{\nu}{}_{bc}\theta^{c} + \frac{1}{2}f_{(AB)\gamma}A^{\gamma}{}_{b}\theta^{B} \\ &\equiv \omega_{Ab} + A_{Ab}\end{aligned} \tag{5.39}$$

を得る。

5.3 $\tilde{N}$

　§ 4.5 と同様にして、

$$\begin{aligned}N_1 &= N + \frac{1}{4}U_{A\mu}U^{A}_{\ \nu}F^{\mu}{}_{ab}F^{\nu,ab}\Omega \\ &= N + \frac{1}{4}\kappa_{\mu\nu}F^{\mu}{}_{ab}F^{\nu,ab}\Omega\end{aligned} \tag{5.40}$$

や、

$$\tilde{N} = N - \frac{1}{4}\kappa_{\mu\nu}F^{\mu}{}_{ab}F^{\nu,ab}\Omega + N' + N'', \tag{5.41}$$

$$\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N} - \frac{1}{4}\kappa_{\mu\nu}F^{\mu}{}_{ab}F^{\nu,ab} + \mathcal{N}' + \mathcal{N}'' \tag{5.42}$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned}N' &= \omega_{AC}\wedge\omega^{C}{}_{B}\wedge e^{BA} \\ &= (\omega_{AC}{}^{B}\omega^{C}{}_{B}{}^{A} - \omega_{AC}{}^{A}\omega^{C}{}_{B}{}^{B})\Omega,\end{aligned} \tag{5.43}$$

$$\mathcal{N}' = \omega_{ACB}\omega^{CBA} - \omega_{AC}{}^{A}\omega^{C}{}_{B}{}^{B} = \text{const.} \tag{5.44}$$

であり、

$$\begin{aligned}N'' &= 2A_{B}^{\ cB}\omega_{ac}{}^{a}\Omega - A_{Ac}\wedge A_{B}^{\ c}\wedge e^{BA} \\ &= 2A_{B}^{\ cB}\omega_{ac}{}^{a}\Omega + (-A_{Ac}{}^{B}A_{B}^{\ cA} + A_{Ac}{}^{A}A_{B}^{\ cB})\Omega,\end{aligned} \tag{5.45}$$

$$\mathcal{N}'' = 2A_{B}^{\ cB}\omega_{ac}{}^{a} - A_{AcB}A^{BcA} + A_{Ac}{}^{A}A_{B}^{\ cB} \tag{5.46}$$

である。$f_{\alpha\beta\gamma} = \kappa_{\alpha\delta} f^{\delta}{}_{\beta\gamma}$ の完全反対称性から、

$$\begin{aligned} A_{Bc}{}^{B} &= \frac{1}{2} f^{B}{}_{B\gamma} A^{\gamma}{}_{c} \\ &= \frac{1}{2} f^{\alpha}{}_{\alpha\gamma} A^{\gamma}{}_{c} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.47}$$

であり、

$$\begin{aligned} A_{AcB} A^{BcA} &= \frac{1}{4} f_{(AB)\gamma} f^{(AB)}{}_{\delta} A^{\gamma}{}_{c} A^{\delta,c} \\ &= \frac{1}{4} f_{(\alpha\beta)\gamma} f^{(\alpha\beta)}{}_{\delta} A^{\gamma}{}_{c} A^{\delta,c} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.48}$$

となる。よって、

$$\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N} - \frac{1}{4} \kappa_{\mu\nu} F^{\mu}{}_{ab} F^{\nu,ab} + \mathcal{N}', \tag{5.49}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}' &= \omega_{ABC} \omega^{BCA} - \omega_{AC}{}^{A} \omega^{C}{}_{B}{}^{B} \\ &= \frac{1}{4} f_{\alpha\beta\gamma} f^{\beta\gamma\alpha} \\ &= \frac{1}{4} f_{\alpha\beta\gamma} f^{\alpha\beta\gamma} = \text{const.} \end{aligned} \tag{5.50}$$

となる。

A　^5G の計算

A.1　記号

第1章の設定で考える。

クリストッフェル記号は、

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \equiv g^{\sigma\lambda}\Gamma_{\lambda\mu\nu} \tag{A.1}$$

である。γ_{ab} に対する $\Gamma_{\lambda\mu\nu}, \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ を $^5\Gamma_{cab}, {}^5\Gamma^{c}{}_{ab}$ と書く。特に $^5\Gamma_{\lambda\mu\nu}$ は、

$$^5\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \Gamma_{\lambda\mu\nu} + \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} \tag{A.2}$$

である。ここで、$\Gamma_{\lambda\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ から計算され、$\tilde{\Gamma}_{\lambda\mu\nu}$ は $A_{(\mu}A_{\nu)}/\alpha$ から計算されたものである。

以下、

$$f_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{A.3}$$

$$S_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu, \tag{A.4}$$

$$c_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \partial_4 A_\mu \tag{A.5}$$

とする。

A.2　$^5\Gamma_{cab}$

まず、$^5\Gamma_{cab}$ を求める。

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{4\alpha}(\partial_\mu A_\lambda A_\nu + A_\lambda\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\lambda A_\mu + A_\lambda\partial_\nu A_\mu - \partial_\lambda A_\mu A_\nu - A_\mu\partial_\lambda A_\nu + \\
&\quad +\partial_\mu A_\nu A_\lambda + A_\nu\partial_\mu A_\lambda + \partial_\nu A_\mu A_\lambda + A_\mu\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu A_\mu - A_\nu\partial_\lambda A_\mu) \\
&= \frac{1}{4\alpha}(f_{\mu\lambda}A_\nu + A_\lambda S_{\mu\nu} + f_{\nu\lambda}A_\mu + S_{\mu\nu}A_\lambda + A_\nu f_{\mu\lambda} + A_\mu f_{\nu\lambda}) \\
&= \frac{1}{4\alpha}(\{f_{\mu\lambda}, A_\nu\} + \{f_{\nu\lambda}, A_\mu\} + \{S_{\mu\nu}, A_\lambda\}) \\
&\stackrel{\text{w}}{=} \frac{1}{2\alpha}(f_{\mu\lambda}A_\nu + f_{\nu\lambda}A_\mu + S_{\mu\nu}A_\lambda)
\end{aligned} \tag{A.6}$$

である。$\stackrel{\text{w}}{=}$ は A_μ を数とみなした場合の等号である。

また、

$$\begin{aligned}
\Gamma_{4\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{\alpha}\partial_4[A_{(\mu}A_{\nu)}]) \\
&= \frac{1}{2}S_{\mu\nu} - \frac{1}{4\alpha}(\{c_\mu, A_\nu\} + \{A_\mu, c_\nu\}) \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} \frac{1}{2}S_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(c_\mu A_\nu + A_\mu c_\nu), && \text{(A.7)} \\
\Gamma_{\lambda 4\nu} &= \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha}\partial_4[A_{(\lambda}A_{\nu)}] + \partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu) \\
&= \frac{1}{2}f_{\nu\lambda} + \frac{1}{4\alpha}(\{c_\lambda, A_\nu\} + \{A_\lambda, c_\nu\}) \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} \frac{1}{2}f_{\nu\lambda} + \frac{1}{2\alpha}(c_\lambda A_\nu + A_\lambda c_\nu), && \text{(A.8)} \\
\Gamma_{44\nu} &= \frac{1}{2}(\partial_4 A_\nu + \partial_\nu \gamma_{44} - \partial_4 A_\nu) = 0, && \text{(A.9)} \\
\Gamma_{\lambda 44} &= \frac{1}{2}(\partial_4 A_\lambda + \partial_4 A_\lambda - \partial_\lambda g_{44}) \\
&= c_\lambda, && \text{(A.10)} \\
\Gamma_{444} &= 0. && \text{(A.11)}
\end{aligned}$$

A.3 ${}^5\Gamma^c{}_{ab}$

${}^5\Gamma^c{}_{ab}$ を求める。
以下、行列のかけ算は可換だと考えて扱う。

$$\begin{aligned}
{}^5\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} &= g^{\sigma\lambda}(\Gamma_{\lambda\mu\nu} + \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu\nu}) + g^{4\sigma}\Gamma_{4\mu\nu} \\
&= \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha}(f_\mu{}^\sigma A_\nu + f_\nu{}^\sigma A_\mu + S_{\mu\nu}A^\sigma) \\
&\quad -\frac{1}{2\alpha}A^\sigma S_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha^2}A^\sigma(c_\mu A_\nu + A_\mu c_\nu) \\
&= \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha}(f_\mu{}^\sigma A_\nu + f_\nu{}^\sigma A_\mu) + \frac{1}{2\alpha^2}A^\sigma(c_\mu A_\nu + A_\mu c_\nu) \\
&= \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha}(e_\mu{}^\sigma A_\nu + e_\nu{}^\sigma A_\mu). && \text{(A.12)}
\end{aligned}$$

ここで、

$$e_{\mu\nu} \overset{\mathrm{def}}{=} f_{\mu\nu} + \frac{1}{\alpha}c_\mu A_\nu \qquad \text{(A.13)}$$

$$
\begin{aligned}
{}^5\Gamma^4{}_{\mu\nu} &= \gamma^{4\lambda}(\Gamma_{\lambda\mu\nu} + \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu\nu}) + \gamma^{44}\Gamma_{4\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{\alpha}A_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - A^\lambda \frac{1}{2\alpha^2}(f_{\mu\lambda}A_\nu + f_{\nu\lambda}A_\mu + S_{\mu\nu}A_\lambda) \\
&\quad +(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}A^\gamma A_\gamma)\Big[\frac{1}{2}S_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(c_\mu A_\nu + A_\mu c_\nu)\Big] \\
&= -\frac{1}{\alpha}A_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - A^\lambda \frac{1}{2\alpha^2}(f_{\mu\lambda}A_\nu + f_{\nu\lambda}A_\mu) + \frac{1}{2\alpha}S_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}A^\gamma A_\gamma)(c_\mu A_\nu + A_\mu c_\nu) \\
&= -\frac{1}{\alpha}A_\lambda {}^5\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha}S_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha^2}(c_\mu A_\nu + A_\mu c_\nu), \qquad \text{(A.14)} \\
{}^5\Gamma^\sigma{}_{4\nu} &= g^{\sigma\lambda}\Gamma_{\lambda 4\nu} + \gamma^{4\sigma}\Gamma_{44\nu} \\
&= \frac{1}{2}f_\nu{}^\sigma + \frac{1}{2\alpha}(c^\sigma A_\nu + A^\sigma c_\nu), \qquad \text{(A.15)} \\
{}^5\Gamma^\sigma{}_{44} &= g^{\sigma\lambda}\Gamma_{\lambda 44} + \gamma^{4\sigma}\Gamma_{444} \\
&= c^\sigma, \qquad \text{(A.16)} \\
{}^5\Gamma^4{}_{4\nu} &= \gamma^{4\lambda}\Gamma_{\lambda 4\nu} + \gamma^{44}\Gamma_{44\nu} \\
&= -\frac{1}{2\alpha}f_{\nu\lambda}A^\lambda - A^\lambda \frac{1}{2\alpha^2}(c_\lambda A_\nu + A_\lambda c_\nu), \qquad \text{(A.17)} \\
{}^5\Gamma^4{}_{44} &= \gamma^{4\lambda}\Gamma_{\lambda 44} + \gamma^{44}\Gamma_{444} = 0. \qquad \text{(A.18)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^5\Gamma_\mu &\stackrel{\text{def}}{=} {}^5\Gamma^a{}_{\mu a} \\
&= {}^5\Gamma^\nu{}_{\mu\nu} + {}^5\Gamma^4{}_{\mu 4} \\
&= \Gamma_\mu + \frac{1}{2\alpha}(e_\mu{}^\nu A_\nu + e_\nu{}^\nu A_\mu) - \frac{1}{2\alpha}f_{\mu\lambda}A^\lambda - A^\lambda \frac{1}{2\alpha^2}(c_\lambda A_\mu + A_\lambda c_\mu) \\
&= \Gamma_\mu + \frac{1}{2\alpha^2}(c_\mu A^\nu A_\nu + A^\nu c_\nu A_\mu) - A^\lambda \frac{1}{2\alpha^2}(c_\lambda A_\mu + A_\lambda c_\mu) \\
&= \Gamma_\mu. \qquad \text{(A.19)}
\end{aligned}
$$

ここで、$\Gamma_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma^\rho{}_{\mu\rho}$.

$$
\begin{aligned}
{}^5\Gamma_4 &\stackrel{\text{def}}{=} {}^5\Gamma^a{}_{4a} \\
&= {}^5\Gamma^\alpha{}_{4\alpha} \\
&= \frac{1}{2}f_\sigma{}^\sigma + \frac{1}{2\alpha}(c^\sigma A_\sigma + A^\sigma c_\sigma) \\
&= \frac{1}{\alpha}c^\sigma A_\sigma. \qquad \text{(A.20)}
\end{aligned}
$$

A.4 ^5G

重力場のラグランジアン密度は、$G/(2c\kappa)$ である。ここで、

$$
\begin{aligned}
G &= g^{\mu\nu}\Big[\Gamma^\rho{}_{\gamma\nu}\Gamma^\gamma{}_{\mu\rho} - \Gamma^\rho{}_{\gamma\rho}\Gamma^\gamma{}_{\mu\nu}\Big] \\
&= g^{\mu\nu}\Gamma^\rho{}_{\gamma\nu}\Gamma^\gamma{}_{\mu\rho} - g^{\mu\nu}\Gamma_\alpha\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} \qquad \text{(A.21)}
\end{aligned}
$$

である。5 次元の対応物は、

$$
\begin{aligned}
{}^5G &= {}^5\Gamma^{d}{}_{cb}{}^5\Gamma^{c}{}_{ad}\gamma^{ab} - {}^5\Gamma_{c}{}^5\Gamma^{c}{}_{ab}\gamma^{ab} \\
&\equiv {}^5G_1 - {}^5G_2
\end{aligned}
\tag{A.22}
$$

である。

$$
\begin{aligned}
{}^5G_1 &= {}^5\Gamma^{d}{}_{c\beta}{}^5\Gamma^{c}{}_{\alpha d}g^{\alpha\beta} + {}^5\Gamma^{d}{}_{c\beta}{}^5\Gamma^{c}{}_{4d}\gamma^{4\beta} + {}^5\Gamma^{d}{}_{c4}{}^5\Gamma^{c}{}_{\alpha d}\gamma^{\alpha 4} + {}^5\Gamma^{d}{}_{c4}{}^5\Gamma^{c}{}_{4d}\gamma^{44} \\
&= {}^5\Gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\delta}g^{\alpha\beta} + {}^5\Gamma^{\delta}{}_{4\beta}{}^5\Gamma^{4}{}_{\alpha\delta}g^{\alpha\beta} + {}^5\Gamma^{4}{}_{\gamma\beta}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha 4}g^{\alpha\beta} + {}^5\Gamma^{4}{}_{4\beta}{}^5\Gamma^{4}{}_{\alpha 4}g^{\alpha\beta} \\
&\quad + {}^5\Gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{4\delta}\gamma^{4\beta} + {}^5\Gamma^{\delta}{}_{4\beta}{}^5\Gamma^{4}{}_{4\delta}\gamma^{4\beta} + {}^5\Gamma^{4}{}_{\gamma\beta}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{44}\gamma^{4\beta} + {}^5\Gamma^{4}{}_{4\beta}{}^5\Gamma^{4}{}_{44}\gamma^{4\beta} \\
&\quad + {}^5\Gamma^{\delta}{}_{\gamma 4}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\delta}\gamma^{\alpha 4} + {}^5\Gamma^{\delta}{}_{44}{}^5\Gamma^{4}{}_{\alpha\delta}\gamma^{\alpha 4} + {}^5\Gamma^{4}{}_{\gamma 4}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha 4}\gamma^{\alpha 4} + {}^5\Gamma^{4}{}_{44}{}^5\Gamma^{4}{}_{\alpha 4}\gamma^{\alpha 4} \\
&\quad + {}^5\Gamma^{\delta}{}_{\gamma 4}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{4\delta}\gamma^{44} + {}^5\Gamma^{\delta}{}_{44}{}^5\Gamma^{4}{}_{4\delta}\gamma^{44} + {}^5\Gamma^{4}{}_{\gamma 4}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{44}\gamma^{44} + {}^5\Gamma^{4}{}_{44}{}^5\Gamma^{4}{}_{44}\gamma^{44} \\
&= {}^5\Gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\delta}g^{\alpha\beta} + 2\cdot{}^5\Gamma^{\delta}{}_{4\beta}{}^5\Gamma^{4}{}_{\alpha\delta}g^{\alpha\beta} + {}^5\Gamma^{4}{}_{4\beta}{}^5\Gamma^{4}{}_{\alpha 4}g^{\alpha\beta} \\
&\quad + 2\cdot{}^5\Gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{4\delta}\gamma^{4\beta} + 2\cdot{}^5\Gamma^{\delta}{}_{4\beta}{}^5\Gamma^{4}{}_{4\delta}\gamma^{4\beta} + 2\cdot{}^5\Gamma^{4}{}_{\gamma\beta}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{44}\gamma^{4\beta} \\
&\quad + {}^5\Gamma^{\delta}{}_{\gamma 4}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{4\delta}\gamma^{44} + 2\cdot{}^5\Gamma^{\delta}{}_{44}{}^5\Gamma^{4}{}_{4\delta}\gamma^{44} \\
&= r_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + 2r_{4\beta}\gamma^{4\beta} + r_{44}\gamma^{44},
\end{aligned}
\tag{A.23}
$$

$$
r_{\alpha\beta} = {}^5\Gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\delta} + 2\cdot{}^5\Gamma^{\delta}{}_{4(\beta}{}^5\Gamma^{4}{}_{\alpha)\delta} + {}^5\Gamma^{4}{}_{4\beta}{}^5\Gamma^{4}{}_{\alpha 4}, \tag{A.24}
$$

$$
r_{4\beta} = {}^5\Gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{4\delta} + {}^5\Gamma^{\delta}{}_{4\beta}{}^5\Gamma^{4}{}_{4\delta} + {}^5\Gamma^{4}{}_{\gamma\beta}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{44}, \tag{A.25}
$$

$$
r_{44} = {}^5\Gamma^{\delta}{}_{\gamma 4}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{4\delta} + 2\cdot{}^5\Gamma^{\delta}{}_{44}{}^5\Gamma^{4}{}_{4\delta} \tag{A.26}
$$

$$
{}^5G_2 = s_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + 2s_{4\beta}\gamma^{4\beta} + s_{44}\gamma^{44}, \tag{A.27}
$$

$$
s_{\alpha\beta} = \Gamma_{\gamma}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} + {}^5\Gamma_{4}{}^5\Gamma^{4}{}_{\alpha\beta}, \tag{A.28}
$$

$$
s_{4\beta} = \Gamma_{\gamma}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{4\beta} + {}^5\Gamma_{4}{}^5\Gamma^{4}{}_{4\beta}, \tag{A.29}
$$

$$
s_{44} = \Gamma_{\gamma}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{44} \tag{A.30}
$$

A.4.1 $r_{\alpha\beta}$

まず、$r_{\alpha\beta}$ を求める。

$$
\begin{aligned}
{}^5\Gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\delta} &= \Gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\delta} + \tilde{\Gamma}^{\delta}{}_{\gamma\beta}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\delta} + \Gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta}\tilde{\Gamma}^{\gamma}{}_{\alpha\delta} + \tilde{\Gamma}^{\delta}{}_{\gamma\beta}\tilde{\Gamma}^{\gamma}{}_{\alpha\delta} \\
&= \Gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\delta} + \frac{1}{2\alpha}(e_{\gamma}{}^{\delta}A_{\beta} + e_{\beta}{}^{\delta}A_{\gamma})\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\delta} + \frac{1}{2\alpha}\Gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta}(e_{\alpha}{}^{\gamma}A_{\delta} + e_{\delta}{}^{\gamma}A_{\alpha}) \\
&\quad + \frac{1}{4\alpha^2}(e_{\gamma}{}^{\delta}A_{\beta} + e_{\beta}{}^{\delta}A_{\gamma})(e_{\alpha}{}^{\gamma}A_{\delta} + e_{\delta}{}^{\gamma}A_{\alpha}) \\
&= \Gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\delta} + \frac{1}{2\alpha}(e_{\gamma}{}^{\delta}A_{\beta} + e_{\beta}{}^{\delta}A_{\gamma})\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\delta} + \frac{1}{2\alpha}\Gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta}(e_{\alpha}{}^{\gamma}A_{\delta} + e_{\delta}{}^{\gamma}A_{\alpha}) \\
&\quad + \frac{1}{4\alpha^2}(e_{\gamma}{}^{\delta}e_{\alpha}{}^{\gamma}A_{\beta}A_{\delta} + e_{\gamma}{}^{\delta}e_{\delta}{}^{\gamma}A_{\beta}A_{\alpha} + e_{\beta}{}^{\delta}e_{\alpha}{}^{\gamma}A_{\gamma}A_{\delta} + e_{\beta}{}^{\delta}e_{\delta}{}^{\gamma}A_{\gamma}A_{\alpha})
\end{aligned}
\tag{A.31}
$$

$$2\cdot {}^5\Gamma^{\delta}{}_{4\beta}{}^5\Gamma^{4}{}_{\alpha\delta} = \frac{1}{2\alpha}\Big[-2A_\lambda {}^5\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\delta} + S_{\alpha\delta} - \frac{1}{\alpha}(c_\alpha A_\delta + A_\alpha c_\delta)\Big]\Big[f_\beta{}^\delta + \frac{1}{\alpha}(c^\delta A_\beta + A^\delta c_\beta)\Big] \tag{A.32}$$

ここまで来て、$c_\mu = 0$ と置く。つまり、クラインの 1938 年の計算から、1926 年の計算に移る。まず、しばらく局所慣性系で計算する。落とした項は後で計算する。
このとき、

$$^5G_2 = 0 \tag{A.33}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} {}^5\Gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\delta} &= \frac{1}{4\alpha^2}(f_\gamma{}^\delta f_\alpha{}^\gamma A_\beta A_\delta + f_\gamma{}^\delta f_\delta{}^\gamma A_\beta A_\alpha + f_\beta{}^\delta f_\alpha{}^\gamma A_\gamma A_\delta + f_\beta{}^\delta f_\delta{}^\gamma A_\gamma A_\alpha) \\ &= \frac{1}{4\alpha^2}(f_\gamma{}^\delta f_\delta{}^\gamma A_\beta A_\alpha + f_\beta{}^\delta f_\alpha{}^\gamma A_\gamma A_\delta + 2A_\lambda f_\delta{}^\lambda f_{(\alpha}{}^\delta A_{\beta)}). \end{aligned} \tag{A.34}$$

$$\begin{aligned} 2\cdot {}^5\Gamma^{\delta}{}_{4\beta}{}^5\Gamma^{4}{}_{\alpha\delta} &\approx -\frac{1}{2\alpha^2}A_\lambda(f_\alpha{}^\lambda A_\delta + f_\delta{}^\lambda A_\alpha) f_\beta{}^\delta \\ &= -\frac{1}{2\alpha^2}(f_\alpha{}^\lambda f_\beta{}^\delta A_\lambda A_\delta + A_\lambda f_\delta{}^\lambda f_\beta{}^\delta A_\alpha). \end{aligned} \tag{A.35}$$

ここで、$\approx$ は、$g^{\alpha\beta}$ と縮訳させたら落ちる項を落とした、という意味である。

$$^5\Gamma^{4}{}_{4\beta}{}^5\Gamma^{4}{}_{\alpha 4} = \frac{1}{4\alpha^2} f_{\beta\rho} f_{\alpha\sigma} A^\rho A^\sigma \tag{A.36}$$

よって、

$$r_{\alpha\beta} \approx \frac{1}{4\alpha^2} f_\gamma{}^\delta f_\delta{}^\gamma A_\beta A_\alpha \tag{A.37}$$

となる。

A.4.2 $r_{4\beta}$

$$r_{4\beta} = \tilde{\Gamma}^{\delta}{}_{\gamma\beta}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{4\delta} + {}^5\Gamma^{\delta}{}_{4\beta}{}^5\Gamma^{4}{}_{4\delta} \tag{A.38}$$

$$\tilde{\Gamma}^{\delta}{}_{\gamma\beta}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{4\delta} = \frac{1}{4\alpha}(f_\gamma{}^\delta f_\delta{}^\gamma A_\beta + f_\beta{}^\delta f_\delta{}^\gamma A_\gamma) \tag{A.39}$$

$$^5\Gamma^{\delta}{}_{4\beta}{}^5\Gamma^{4}{}_{4\delta} = -\frac{1}{4\alpha} f_\beta{}^\delta f_{\delta\lambda} A^\lambda \tag{A.40}$$

$$r_{4\beta} = \frac{1}{4\alpha} f_\gamma{}^\delta f_\delta{}^\gamma A_\beta \tag{A.41}$$

A.4.3 r_{44}

$$
\begin{aligned}
r_{44} &= {}^5\Gamma^{\delta}{}_{\gamma 4}{}^5\Gamma^{\gamma}{}_{4\delta} \\
&= \frac{1}{4} f_{\gamma}{}^{\delta} f_{\delta}{}^{\gamma}
\end{aligned} \tag{A.42}
$$

A.4.4 ${}^5G$：局所慣性系

$$
\begin{aligned}
{}^5G = {}^5G_1 &= \frac{1}{4\alpha^2} f_{\gamma}{}^{\delta} f_{\delta}{}^{\gamma} A_{\beta} A_{\alpha} g^{\alpha\beta} \\
&\quad - \frac{2}{\alpha} A^{\beta} \cdot \frac{1}{4\alpha} f_{\gamma}{}^{\delta} f_{\delta}{}^{\gamma} A_{\beta} \\
&\quad + (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} A^{\rho} A_{\rho}) \frac{1}{4} f_{\gamma}{}^{\delta} f_{\delta}{}^{\gamma} \\
&= -\frac{1}{4\alpha} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{A.43}
$$

A.4.5 上の計算で落とした項

上の計算で落とした項を計算する。
落とした項に $'$ を付けると、

$$
{}^5G'_2 = {}^5G_2. \tag{A.44}
$$

$$
\begin{aligned}
r'_{\alpha\beta} &\approx \Gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta} \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\delta} + \frac{1}{2\alpha} (f_{\gamma}{}^{\delta} A_{\beta} + f_{\beta}{}^{\delta} A_{\gamma}) \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\delta} + \frac{1}{2\alpha} \Gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta} (f_{\alpha}{}^{\gamma} A_{\delta} + f_{\delta}{}^{\gamma} A_{\alpha}) \\
&\quad - \frac{1}{2\alpha} (A_{\lambda} \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\delta} f_{\beta}{}^{\delta} + A_{\lambda} \Gamma^{\lambda}{}_{\beta\delta} f_{\alpha}{}^{\delta}),
\end{aligned} \tag{A.45}
$$

$$
\begin{aligned}
r'_{4\beta} &= \Gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta} {}^5\Gamma^{\gamma}{}_{4\delta} \\
&= \frac{1}{2} \Gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta} f_{\delta}{}^{\gamma},
\end{aligned} \tag{A.46}
$$

$$
r'_{44} = 0 \tag{A.47}
$$

$$
r'_{\alpha\beta} \approx \Gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta} \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\delta} + \frac{1}{2\alpha} f_{\gamma}{}^{\delta} A_{\beta} \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\delta} + \frac{1}{2\alpha} \Gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta} f_{\delta}{}^{\gamma} A_{\alpha} \tag{A.48}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^5G'_1 &= G_1 + \frac{1}{\alpha} f_{\gamma}{}^{\delta} A^{\alpha} \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\delta} \\
&\quad - \frac{1}{\alpha} A^{\beta} \Gamma^{\delta}{}_{\gamma\beta} f_{\delta}{}^{\gamma} \\
&= G_1.
\end{aligned} \tag{A.49}
$$

ここで、G_1 は $g_{\alpha\beta}$ に対するものである。G_2, G も同様とする。
　また、

$$s_{44} = 0. \tag{A.50}$$

$$s_{\alpha\beta} = \Gamma_\gamma \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2\alpha}\Gamma_\gamma (f_\alpha{}^\gamma A_\beta + f_\beta{}^\gamma A_\alpha) \tag{A.51}$$

$$\begin{aligned} s_{4\beta} &= \Gamma_\gamma {}^5\Gamma^\gamma{}_{4\beta} \\ &= \Gamma_\gamma \frac{1}{2} f_\beta{}^\gamma \end{aligned} \tag{A.52}$$

$$\begin{aligned} {}^5G'_2 &= {}^5G_2 \\ &= G_2 + \frac{1}{\alpha}\Gamma_\gamma f_\alpha{}^\gamma A^\alpha \\ &\quad - \frac{1}{\alpha}\Gamma_\gamma A^\beta f_\beta{}^\gamma \\ &= G_2 \end{aligned} \tag{A.53}$$

　よって、

$${}^5G' = G_1 - G_2 = G \tag{A.54}$$

A.4.6　${}^5G$

　以上より、

$${}^5G = G - \frac{1}{4\alpha} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} \tag{A.55}$$

が示された。

A.5　${}^5R$

　リーマン接続でのスカラー曲率は、

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu}\Big[\partial_\rho \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\rho} + \Gamma^\rho{}_{\gamma\rho}\Gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu}\Gamma^\gamma{}_{\mu\rho}\Big] \\ &= g^{\mu\nu}\Big[\partial_\rho \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\rho}\Big] - G \end{aligned} \tag{A.56}$$

である。γ_{ab} に対するスカラー曲率を ${}^5R$ とすると、

$${}^5R = R - \frac{1}{4\alpha} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} \tag{A.57}$$

となる。この計算は付録 B を参照。

B　スカラー場がある場合

カルツァ・クライン理論で、g_{44} がスカラー場の場合、

$$\gamma_{44} = \phi^2, \quad \gamma_{4\mu} = \phi^2 A_\mu, \quad \gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \phi^2 A_\mu A_\nu \tag{B.1}$$

となり (ギリシャ文字の添え字は 0 から 3 を表す)、計量は、

$$\eta_{ab}\theta^a\theta^b + \theta^4\theta^4 \tag{B.2}$$

となる。ただし、

$$\theta^4 = \phi dx^4 + \phi A \ \ (A = A_\mu dx^\mu) \tag{B.3}$$

である。A_μ も ϕ も x^4 には依存しないとする。ラテン小文字の添え字は 0, 1, 2, 3 を表し、その上げ下げはミンコフスキー計量 η_{ab} とその逆で行う。

B.1　$^5\mathcal{N}$

$$\begin{aligned} d\theta^4 &= d\phi \wedge dx^4 + d\phi \wedge A + \phi dA \\ &= d\phi \wedge \big(\frac{1}{\phi}\theta^4 - A\big) + d\phi \wedge A + \phi dA \\ &= \frac{1}{\phi} d\phi \wedge \theta^4 + \phi dA \\ &\equiv \frac{1}{\phi}\phi_a \theta^a \wedge \theta^4 + \frac{1}{2}\phi f_{ab}\theta^a \wedge \theta^b. \end{aligned} \tag{B.4}$$

これは、(2.16) で、$F \to \phi f$, $c_A \to -\phi_a/\phi$ としたものであるから、(2.34) より、

$$^5\mathcal{N} = \mathcal{N} - \frac{\phi^2}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - 2\frac{\partial_\mu \phi}{\phi}\omega^{\mu\nu}{}_\nu. \tag{B.5}$$

となる。

B.2　^5R

§ 2 と同様にして、

$$\tilde{\omega}_{ab} = \omega_{ab} - \frac{1}{2}\phi f_{ab}\theta^4, \tag{B.6}$$

$$\tilde{\omega}_{4b} = -\frac{1}{2}\phi f_{ab}\theta^a + \frac{1}{\phi}\phi_b \theta^4 \tag{B.7}$$

となる。よって、

$$
\begin{aligned}
d\tilde{\omega}_{ab} &= d\omega_{ab} - \frac{1}{2}\Big[f_{ab}d\phi\wedge\theta^4 + \phi df_{ab}\wedge\theta^4 + \phi f_{ab}d\theta^4\Big] \\
&= d\omega_{ab} - \frac{1}{2}\Big[f_{ab}d\phi\wedge\theta^4 + \phi df_{ab}\wedge\theta^4 - \phi f_{ab}\tilde{\omega}^4{}_c\wedge\theta^c\Big] \\
&\approx d\omega_{ab} + \frac{1}{2}\phi f_{ab}\tilde{\omega}^4{}_c\wedge\theta^c \\
&\approx d\omega_{ab} - \frac{1}{4}\phi^2 f_{ab}f_{cd}\theta^c\wedge\theta^d
\end{aligned}
\tag{B.8}
$$

となる。ここで、$\approx$ は $d\tilde{\omega}_{ab}\wedge e^{ab}$ の計算に不要な項を落とした、という意味である。よって、

$$
d\tilde{\omega}_{ab}\wedge e^{ab} = d\omega_{ab}\wedge e^{ab} - \frac{1}{2}\phi^2 f_{ab}f^{ab} * 1 \tag{B.9}
$$

となる。

　また、

$$
\begin{aligned}
d\tilde{\omega}_{4b} &= -\frac{1}{2}\Big[f_{ab}d\phi\wedge\theta^a + \phi df_{ab}\wedge\theta^a + \phi f_{ab}d\theta^a\Big] \\
&\quad -\frac{1}{\phi^2}\phi_b d\phi\wedge\theta^4 + \frac{1}{\phi}d\phi_b\wedge\theta^4 + \frac{1}{\phi}\phi_b d\theta^4 \\
&\approx -\frac{1}{\phi^2}\phi_b d\phi\wedge\theta^4 + \frac{1}{\phi}d\phi_b\wedge\theta^4 + \frac{1}{\phi}\phi_b\frac{1}{\phi}\phi_a\theta^a\wedge\theta^4 \\
&= \frac{1}{\phi}d\phi_b\wedge\theta^4 \\
&\equiv -\frac{1}{\phi}\partial_a\phi_b\theta^4\wedge\theta^a
\end{aligned}
\tag{B.10}
$$

である。よって、

$$
d\tilde{\omega}_{4b}\wedge e^{4b} = -\frac{1}{\phi}\eta^{ab}\partial_a\phi_b * 1. \tag{B.11}
$$

　以上より、

$$
\begin{aligned}
{}^5R &= R - \frac{\phi^2}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} + \frac{2}{\phi}\Big[-\eta^{ab}\partial_a\phi_b + \phi_b\omega^{ba}{}_a\Big] \\
&= R - \frac{\phi^2}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} - \frac{2}{\phi}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\partial_\nu\phi
\end{aligned}
\tag{B.12}
$$

となる。また、

$$
\sqrt{-\gamma} = \sqrt{-g}\phi \tag{B.13}
$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-\gamma}\cdot{}^5R &= \sqrt{-g}\Big[\phi R - \frac{\phi^3}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}\Big] - 2g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\nabla_\mu\partial_\nu\phi \\
&= \sqrt{-g}\Big[\phi R - \frac{\phi^3}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}\Big] - 2\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi).
\end{aligned}
\tag{B.14}
$$

C　キリング条件

キリング条件

$$\nabla_{(\mu}K_{\nu)r} = 0 \tag{C.1}$$

と

$$\partial_{(C}K_{A)r} - 2H_{(AC)B}K^B{}_r = 0 \tag{C.2}$$

の等価性を示す。ここで、$K_{\nu r} = h^A{}_\nu K_{Ar}$ であり、

$$\partial_C K_{Ar} = (h^{-1})^\mu{}_C \partial_\mu K_{Ar} \tag{C.3}$$

である。

(C.1) は、

$$\partial_\mu K_{\nu r} + \partial_\nu K_{\mu r} - 2\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}K_{\lambda r} = 0 \tag{C.4}$$

である。ところで、

$$\begin{aligned} \partial_\mu K_{\nu r} &= \partial_\mu (h^A{}_\nu K_{Ar}) \\ &= h^A{}_\nu \partial_\mu K_{Ar} + \partial_\mu h^A{}_\nu \cdot K_{Ar} \end{aligned} \tag{C.5}$$

なので、(C.4) は、

$$h^A{}_{(\nu}\partial_{\mu)}K_{Ar} + (\partial_{(\mu}h^A{}_{\nu)} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}h^A{}_\lambda)K_{Ar} = 0 \tag{C.6}$$

となる。また、

$$(h^{-1})^\mu{}_B (h^{-1})^\nu{}_C (\partial_{(\mu}h^A{}_{\nu)} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}h^A{}_\lambda) = -\omega^A{}_{(BC)} \tag{C.7}$$

なので、(C.6) より、

$$\partial_{(B}K_{C)r} - \omega_{A(BC)}K^A{}_r = 0 \tag{C.8}$$

を得る。ところで、

$$\omega_{ABC} = H_{ABC} + 2H_{(BC)A}, \tag{C.9}$$

$$\omega_{A(BC)} = 2H_{(BC)A} \tag{C.10}$$

なので、(C.8) は、

$$\partial_{(B}K_{C)r} - 2H_{(BC)A}K^A{}_r = 0 \tag{C.11}$$

となる。これは (C.2) である。

References

[1] Lochlainn O'Raifeartaigh, "The Dawning of Gauge Theory", Princeton University Press (1997).

[2] 藤井保憲『超重力理論入門』(産業図書, 2005 年).

[3] 佐藤 文隆, 小玉 英雄『一般相対性理論』(岩波書店, 1992 年).

[4] 内山龍雄『一般ゲージ場論序説』(岩波書店, 1987 年).