伏見関数

中嶋 慧

September 26, 2021

Abstract

まず、ウィグナー関数, 伏見関数, P 関数を特別場合として含む、密度演算子の c 数表現を紹介する。次に、その表現を変形して、伏見の与えた関数を含むことを示す。

Contents

1 密度演算子の c 数表現

この節は [1, 2] を参考にした。
$a, a^\dagger$ をボソンの生成消滅演算子とする。今、

$$D(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a), \tag{1.1}$$

$$\Delta_s(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ \exp(\frac{1}{2}s|\alpha|^2)D(\alpha)\exp(-\alpha z^* + \alpha^* z) \tag{1.2}$$

とし、

$$\rho_s(z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Tr}[\rho\Delta_{-s}(z)] \tag{1.3}$$

$$= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} e^{-\frac{1}{2}s|\alpha|^2}\mathrm{Tr}[e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}\rho] \tag{1.4}$$

とおくと、これは $s = -1, 1, 0$ でそれぞれ P 関数, Q 関数 (伏見関数), Wigner 関数となる。これは ρ と同じ情報を持つ：

$$\rho = \int \frac{d^2 z}{\pi}\ \rho_s(z)\Delta_s(z). \tag{1.5}$$

これを証明するには、

$$A = \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ \mathrm{Tr}[AD^\dagger(\alpha)]D(\alpha) \tag{1.6}$$

を示せばよい。

$|0\rangle$ を真空 $(a|0\rangle = 0)$ とし、

$$|\alpha\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} D(\alpha)|0\rangle \tag{1.7}$$

とすると、これはコヒーレント状態である：

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \qquad (1.8)\\
a|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n} |n-1\rangle \\
&= \alpha e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\
&= \alpha|\alpha\rangle. \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

$\rho_s(z)$ で $s = 0$ とすると、

$$W(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \rho_0(z) = \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} \mathrm{Tr}[e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \rho] \tag{1.10}$$

となる。これはウィグナー関数である事を後で見る。また、

$$\Delta_{-1}(z) = |z\rangle\langle z| \tag{1.11}$$

なので[1]、$\rho_1(z)$ は、

$$Q(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \rho_1(z) = \langle z|\rho|z\rangle \tag{1.12}$$

となる。これは伏見関数 (Q 関数) である。また、

$$\rho = \int \frac{d^2 z}{\pi}\ P(z)|z\rangle\langle z|, \quad P(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \rho_{-1}(z) \tag{1.13}$$

である。

---

[1]

$$\begin{aligned}
\Delta_s(z) &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ e^{\frac{1+s}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger} \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ e^{\frac{1+s}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} e^{-\alpha^* a} \int \frac{d^2\beta}{\pi}\ |\beta\rangle\langle\beta| e^{\alpha a^\dagger} \\
&= \int \frac{d^2\beta}{\pi}\ |\beta\rangle\langle\beta| \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ e^{\frac{1+s}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha(z^* - \beta^*) + \alpha^*(z - \beta)}
\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
\Delta_{-1}(z) &= \int \frac{d^2\beta}{\pi}\ |\beta\rangle\langle\beta| \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ e^{-\alpha(z^* - \beta^*) + \alpha^*(z - \beta)} \\
&= \int \frac{d^2\beta}{\pi}\ |\beta\rangle\langle\beta| \pi\delta^2(z - \beta) \\
&= |z\rangle\langle z|.
\end{aligned}$$

2 位相空間表現：伏見関数

今、

$$q \overset{\mathrm{def}}{=} L\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad p \overset{\mathrm{def}}{=} -i\frac{a-a^\dagger}{L\sqrt{2}} \tag{2.1}$$

とすると、

$$[q,p] = i \tag{2.2}$$

である。L は長さの次元を持つ。また、

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{x}{L} + iLk), \tag{2.3}$$
$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{Q}{L} + iLP) \tag{2.4}$$

と置くと、

$$\alpha a^\dagger - \alpha^* a = i(qk - px), \tag{2.5}$$
$$-\alpha z^* + \alpha^* z = i(xP - Qk) \tag{2.6}$$

である。よって、(1.4) より、

$$\rho_s(P,Q) \overset{\mathrm{def}}{=} \rho_s(z) = \int \frac{dxdk}{2\pi}\ e^{i(xP-Qk)} e^{-\frac{s}{4}\left(\frac{x^2}{L^2}+L^2k^2\right)} \mathrm{Tr}[e^{i(qk-px)}\rho] \tag{2.7}$$

となる。

今、$|y\rangle$ を q の固有状態 ($q|y\rangle = y|y\rangle$) とすると、

$$\mathrm{Tr}[e^{i(qk-px)}\rho] = \int dy\ \langle y|e^{i(qk-px)}\rho|y\rangle \tag{2.8}$$

であり、

$$e^{i(qk-px)} = e^{ikx/2}e^{iqk}e^{-ipx}, \tag{2.9}$$
$$\begin{aligned} \langle y|e^{i(qk-px)} &= e^{ikx/2}e^{iky}\langle y|e^{-ipx} \\ &= e^{ikx/2}e^{iky}\langle y-x| \end{aligned} \tag{2.10}$$

なので、

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[e^{i(qk-px)}\rho] &= \int dy\ e^{ikx/2}e^{iky}\langle y-x|\rho|y\rangle \\ &= \int e^{iky}\ \langle y-\frac{x}{2}|\rho|y+\frac{x}{2}\rangle \end{aligned} \tag{2.11}$$

である。よって、

$$\rho_s(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\int dx \int dk \int dy\ e^{i(xP-Qk)} e^{-\frac{s}{4}\left(\frac{x^2}{L^2}+L^2k^2\right)} e^{iky}\ \langle y-\frac{x}{2}|\rho|y+\frac{x}{2}\rangle \tag{2.12}$$

である。特に、$s=0$ とすると、

$$W(P,Q)=\int dx\ e^{ixP}\ \langle Q-\frac{x}{2}|\rho|Q+\frac{x}{2}\rangle \tag{2.13}$$

となる。これは確かにウィグナー関数である。

$s\neq 0$ とする。k の積分は、

$$\int dk\ e^{-\frac{s}{4}L^2k^2+ik(x-Q)}=\frac{2}{L}\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-\frac{1}{sL^2}(x-Q)^2} \tag{2.14}$$

なので、

$$\rho_s(P,Q)=\frac{1}{L}\sqrt{\frac{1}{\pi s}}\int dx\int dy\ \ \exp\Big[-\frac{s}{4}\frac{x^2}{L^2}-\frac{1}{sL^2}(x-Q)^2+iPx\Big]\langle y-\frac{x}{2}|\rho|y+\frac{x}{2}\rangle \tag{2.15}$$

を得る。

伏見の 1940 年の論文 [3] では、

$$\rho_{\rm cl}(P,Q)=\sqrt{\frac{\gamma}{\pi}}\int d\bar{q}\int dr\ \ \exp\Big[-\frac{\gamma}{4}r^2-\gamma(\bar{q}-Q)^2+iPr\Big]\langle\bar{q}-\frac{r}{2}|\rho|\bar{q}+\frac{r}{2}\rangle \tag{2.16}$$

が与えられた。これは、

$$\rho_{\rm cl}(P,Q)=\rho_1(P,Q)\Big|_{L^2=1/\gamma} \tag{2.17}$$

である。

References

[1] 中嶋慧「c 数空間へのマップ」
`http://physnakajima.html.xdomain.jp/c_representation.pdf`

[2] 柴田 文明, 有光 敏彦, 番 雅司, 北島 佐知子『量子と非平衡系の物理』(東京大学出版, 2009).

[3] Kodi Husimi, “Some Formal Properties of the Density Matrix”, Proc. Phys.-Math. Soc. Jpn. **22**, 264 (1940).