一般ハウスドルフ公式

中嶋 慧

December 7, 2021

Abstract

$[A, B] = c$ のとき、

$$e^{aA+bB} = e^{aA}e^{bB}e^{-abc/2} = e^{bB}e^{aA}e^{abc/2} \tag{0.1}$$

である。これを、

$$[A, B] = \alpha A + \beta B + \gamma \tag{0.2}$$

の場合へ拡張する。また、力 γx が働いているときの拡散方程式にそれを応用する。

1 概要

交換関係

$$[A, B] = \alpha A + \beta B + \gamma \tag{1.1}$$

を考える。一般性を失わず、$\beta = 0$ なら $\alpha = 0$ と出来る ($\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ の場合は A, B を入れ換える)。$\beta \neq 0$ の場合は、

$$\tilde{B} \stackrel{\mathrm{def}}{=} B + \frac{\alpha}{\beta}A \tag{1.2}$$

とすれば、

$$[A, \tilde{B}] = \beta\tilde{B} + \gamma \tag{1.3}$$

である。$\beta = 0$ の場合は簡単で、個別に考えればよい。さて、

$$e^{aA+bB} = e^{a'A+b\tilde{B}}, \quad a' = \begin{cases} a - b\alpha/\beta & (\beta \neq 0) \\ a & (\beta = 0) \end{cases} \tag{1.4}$$

である ($\beta = 0$ のとき、$\tilde{B} = B$ とする)。以下、$a' = 0$ の場合は自明なので、$a' \neq 0$ とする。このとき、

$$e^{aA+bB} = e^{a'A}e^{bf} = e^{bg}e^{a'A} \tag{1.5}$$

と書け、f, g は以下のように表される：

$$f=\begin{cases}\frac{1}{a'\beta}(1-e^{-a'\beta})\tilde{B}+\frac{\gamma}{a'\beta^2}(1-e^{-a'\beta})-\frac{\gamma}{\beta} & (\beta\neq 0)\\ B-\frac{1}{2}a\gamma & (\beta=0)\end{cases}, \tag{1.6}$$

$$g=\begin{cases}\frac{1}{a'\beta}(e^{a'\beta}-1)\tilde{B}+\frac{\gamma}{a'\beta^2}(e^{a'\beta}-1)-\frac{\gamma}{\beta} & (\beta\neq 0)\\ B+\frac{1}{2}a\gamma & (\beta=0)\end{cases}. \tag{1.7}$$

これは§2で示す。

ところで、

$$e^{x(aA+bB)}=e^{\xi(x)A}F(x)=G(x)e^{\eta(x)A} \tag{1.8}$$

と書くことができる。ここで、$F(x), G(x)$ は A を含まず B だけで表される (§2)。この公式で、$a\to a'$, $B\to\tilde{B}$, $x=1$ とすることで (1.5) が得られる。

2　導出

(1.8) を x で微分して、

$$(aA+bB)e^{\xi(x)A}F(x)=\xi'(x)Ae^{\xi(x)A}F(x)+e^{\xi(x)A}F'(x), \tag{2.1}$$

$$G(x)e^{\eta(x)A}(aA+bB)=G(x)e^{\eta(x)A}\eta'(x)A+G'(x)e^{\eta(x)A} \tag{2.2}$$

を得る。これより、

$$F'(x) = [a-\xi'(x)]AF(x)+bB(-\xi(x))F(x), \tag{2.3}$$

$$G'(x) = G(x)[a-\eta'(x)]A+bG(x)B(\eta(x)), \tag{2.4}$$

$$B(t) := e^{tA}Be^{-tA} \tag{2.5}$$

を得る。まず $B(t)$ を求め、次に $F(x), G(x)$ が A を含まないという条件から $\xi(x), \eta(x)$ の微分方程式を求める。さて、

$$\frac{d}{dt}B(t)=\alpha A+\beta B(t)+\gamma \tag{2.6}$$

である。$\beta=0(=\alpha)$ なら、

$$B(t)=B+\gamma t \tag{2.7}$$

である。$\beta\neq 0$ の時は、

$$\bar{B}(t)\overset{\text{def}}{=}B(t)+\frac{\gamma}{\beta} \tag{2.8}$$

とすると、

$$\frac{d}{dt}\bar{B}=\alpha A+\beta\bar{B} \tag{2.9}$$

となる。さらに、

$$\hat{B}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bar{B}(t) + \frac{\alpha}{\beta} A \tag{2.10}$$

とすると、

$$\frac{d}{dt}\hat{B}(t) = \beta \hat{B}(t) \tag{2.11}$$

なので、

$$\hat{B}(t) = e^{\beta t}\hat{B}(0) \tag{2.12}$$

であり、

$$B(t) = e^{\beta t} B + (e^{\beta t} - 1)\Big(\frac{\alpha}{\beta} A + \frac{\gamma}{\beta}) \tag{2.13}$$

を得る。よって、$\beta \neq 0$ なら、

$$F'(x) = \Big[a - \xi'(x) + b\frac{\alpha}{\beta}(e^{-\beta\xi(x)} - 1)\Big] AF(x) + b\Big[e^{-\beta\xi(x)} B + \frac{\gamma}{\beta}(e^{-\beta\xi(x)} - 1)\Big] F(x), \tag{2.14}$$

$$G'(x) = G(x)\Big[a - \eta'(x) + b\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta\eta(x)} - 1)\Big] A + bG(x)\Big[e^{\beta\eta(x)} B + \frac{\gamma}{\beta}(e^{\beta\eta(x)} - 1)\Big] \tag{2.15}$$

を得る。よって、

$$a - \xi'(x) + b\frac{\alpha}{\beta}(e^{-\beta\xi(x)} - 1) = 0, \tag{2.16}$$

$$a - \eta'(x) + b\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta\eta(x)} - 1) = 0 \tag{2.17}$$

である。この解を用いて、

$$F'(x) = b\Big[e^{-\beta\xi(x)} B + (e^{-\beta\xi(x)} - 1)\frac{\gamma}{\beta}\Big] F(x), \tag{2.18}$$

$$G'(x) = bG(x)\Big[e^{\beta\eta(x)} B + (e^{\beta\eta(x)} - 1)\frac{\gamma}{\beta}\Big] \tag{2.19}$$

なので、

$$F(x) = \exp\Big(b\int_0^x dy\ \big[e^{-\beta\xi(y)} B + \frac{\gamma}{\beta}(e^{-\beta\xi(y)} - 1)\big]\Big), \tag{2.20}$$

$$G(x) = \exp\Big(b\int_0^x dy\ \big[e^{\beta\eta(y)} B + \frac{\gamma}{\beta}(e^{\beta\eta(y)} - 1)\big]\Big) \tag{2.21}$$

である。

ここで、$a \to a'$, $B \to \tilde{B}$ としたのちに、a', $\tilde{B}$ をそれぞれ a, B と書く。これは $\alpha = 0$ の場合を考えるのと同じである。すると、

$$\xi(x) = \eta(x) = ax \tag{2.22}$$

を得る。これを (2.20), (2.21) に代入して (1.5) を得る。

3 応用

文献 [1, 2] での応用例を示す。
$\alpha = 0 = \gamma$, $\beta \neq 0$ の場合、すなわち、

$$[A, B] = \beta B \tag{3.1}$$

のときは、

$$e^{aA+bB} = e^{aA} e^{s(a\beta)bB} = e^{s(-a\beta)bB} e^{aA}, \quad s(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - e^{-\beta}}{\beta} \tag{3.2}$$

である。ところで、

$$e^{aA+bB} = e^{(aA+b\lambda B)+(1-\lambda)bB} \tag{3.3}$$

なので、(3.2) より、

$$e^{aA+bB} = e^{s(-a\beta)\lambda bB} e^{aA} e^{s(a\beta)(1-\lambda)bB} \tag{3.4}$$

となる。
ところで、力 γx が働いているときの拡散方程式は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\partial(\gamma x \rho)}{\partial x} = (B + A)\rho, \tag{3.5}$$

$$B \bullet := D \frac{\partial^2 \bullet}{\partial x^2}, \tag{3.6}$$

$$A \bullet := -\frac{\partial(\gamma x \bullet)}{\partial x} \tag{3.7}$$

と書け、

$$[A, B] = \beta B, \quad \beta = 2\gamma \tag{3.8}$$

である [1, 2]。よって、

$$e^{t(A+B)} = e^{s(-\beta t)\lambda tB} e^{tA} e^{s(\beta t)(1-\lambda)tB} \tag{3.9}$$

を拡散方程式を解くのに使える。特に $\lambda = 0$ の場合を使うことがある [1, 2]。

References

[1] 鈴木 増雄『変分原理と物理学』(丸善出版, 2015).

[2] 鈴木 増雄『経路積分と量子解析』(サイエンス社, 2017).