重力のゲージ理論

中嶋 慧

December 4, 2021

Abstract

一般相対論以外の重力の見方, 捉え方を紹介し、特に重力のゲージ理論を解説する。

Contents

この記事では光速度は 1 とする。また、ディラック定数 $\hbar$[= プランク定数 /(2π)] も 1 とする。

本記事の構成

まず、§1 で重力場の 3 つの見方について説明する。そのうちの 1 つの、重力のゲージ理論について、この記事では詳しく解説する。§2 では、準備として通常のゲージ理論を解説する。§3 では、準備として、一般相対論について解説する。§4 では重力のゲージ理論を解説する。§5 では共変正準形式を解説し、§4 の重力のゲージ理論への応用についてコメントする。付録 A では、テンソルの共変微分とリーマン曲率テンソルについて解説する。付録 B では、遠隔平行重力について補足の解説をする。

前提知識

この記事では、微分形式についての基本的な知識は仮定した。また、電磁場のラグランジュ形式の知識もある方が望ましい。一般相対論については、一般相対性原理とアインシュタイン方程式を知っている方が望ましい。

1　重力場の見方, 捉え方

この節では、重力場の以下の 3 つの見方について説明する：

1. 一般相対論
2. 非幾何学的重力理論 (ファインマン重力 [1, 2], 平坦時空上の重力理論 [3–5], massless で spin 2 の場の理論 [6–9])
3. 重力のゲージ理論 [5, 10–22]

一般相対論 (スピノール場がない場合) [1] では、計量テンソル $g_{\mu\nu}$(または多脚場) が基本変数だと考える。$g_{\mu\nu}$ が重力のポテンシャルだと考える。重力場の運動方程式 (アインシュタイン方程式) は、ラグランジアン密度

$$\mathcal{L}_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{2\kappa}R \tag{1.1}$$

から導かれる (これをアインシュタイン・ヒルベルトのラグランジアンと呼ぶ)。ここで、R はリーマン接続に対するスカラー曲率 (付録 A) である。κ はアインシュタイン定数である。

非幾何学的重力理論では、平坦な時空の上の対称 2 階テンソル $h_{\mu\nu}$ が重力を表す。ミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ と $h_{\mu\nu}$ との和 $g_{\mu\nu} := \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ が、一般相対論の計量テンソルに対応する。スピノール場 (ディラック場) がない場合は、重力場のラグランジアン密度は $\mathcal{L}_{\mathrm{EH}}$ となる[2]。

[1] スピノール場がない場合は、一般相対論は一意だが、スピノール場がある場合は §3 に述べるように一意ではない。

[2] スピノール場がある場合は [9] のように任意性があるようである。

重力のゲージ理論には様々なものがある。重力をゲージ理論の視点で捉えたのは内山 [11] が最初である。彼はスピン接続 $\omega^a{}_b$(1 形式である。§2 を参照) がローレンツ群のゲージ場である事を指摘した。内山は、$\omega^a{}_b$ は独立変数でなく、多脚場 θ^a で表されるとした (計量テンソルは、

$$\overset{\circ}{g}_{ab}\theta^a \otimes \theta^b = g_{\mu\nu}dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad \overset{\circ}{g}_{ab} := \mathrm{diag}(-1, 1, 1 \cdots, 1) \tag{1.2}$$

と書ける。1 形式 θ^a が与えられたとき、この式によって計量テンソルを定義していると考えることもできる)。一方で、$\omega^a{}_b$ が独立な変数であると考えることも可能であり、その場合、ポアンカレゲージ理論 (§4.3, Poincaré gauge theory) のラグランジアンが自然だと思われる。中野 [12] は θ^a を並進群のゲージ場と捉えた ([20], [23] 第 11 章, [6] 第 5 章も参照[3)4)])。そして、重力場のラグランジアンは $d\theta^a$ の 2 次形式であると考えた。林と白藤 [13] はポアンカレ群のゲージ理論を考え、θ^a を並進 (群) のゲージ場, $\omega^a{}_b$ を回転 (ローレンツ群) のゲージ場と考え、θ^a, $\omega^a{}_b$ が両方独立変数だとした ([5] や [23] 第 11 章も参照)。内山から林, 白藤まで歴史は [14] が詳しい。ポアンカレ群のゲージ理論としては別のもの [15, 16] も考えられる。

本記事の以下では、重力のゲージ場を詳しく解説していく。

Teleparallel gravity

§3.3 で解説する一般相対論は、捩率 (§2.4) を手で 0 と置いたものである。一方、曲率 (§2.4) を手で 0 と置いたものが遠隔平行重力 (teleparallel gravity) [17] である (これは並進群のゲージ理論ともみなせる)。新一般相対論 (new general relativity) [18] はその特別な場合である。遠隔平行重力はアインシュタインは 1928 年の統一場理論に起源をもつ。

文献

拙著 [10] では電磁場, ゲージ場, 一般相対論, 内山の一般ゲージ理論 [11] を解説した。文献 [19] は重力のゲージ理論の、解説付きの論文集である。文献 [21] は非常に広いクラスの重力のゲージ理論のレビュー論文である。文献 [23] の第 11 章の General gauge theory は、この記事で紹介する内部対称性のゲージ理論 (§2) だけでなく、並進や超対称変換にも使える。

---

3) 次のことが言えると思う：

1. 多脚場は並進のゲージ場である。
2. 超対称変換は超空間の並進である。
3. 超重力では超対称変換を局所化する。
4. よって、超重力では超空間の多脚場の成分に gravitino が現れる。

Gravitino は超対称変換のゲージ場である ([23] 第 11 章, [6] 第 5 章)。

4) なぜ並進のゲージ場である多脚場が計量テンソルと関係するのか？多脚場 (や計量テンソル) と物質やゲージ場との結合の仕方は何で決まるのか？

2 ゲージ理論

この記事の以下では、拙著 [10] を参考にしている。
この節では、重力のゲージ理論を捉える準備として、通常のゲージ理論を概観する。

2.1 場のラグランジュ形式

まず、場のラグランジュ形式について復習する。
場の組 $\{\psi^A\}$ の作用は、

$$S = \int_V d^D x \ \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{L} := \sqrt{-g}\mathcal{L}(\psi^A(x), \partial_\mu \psi^A(x)) \tag{2.1}$$

と書ける。D は時空の次元であり、g は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の行列式である。(1.2) の θ^a を $\theta^a{}_\mu dx^\mu$ と書くと、$\sqrt{-g} = \det(\theta^a{}_\mu)$ とも書ける。

2.2 共変微分

この小節では、ゲージ理論の基本的概念である共変微分を解説する。
ラグランジアン密度 ($\mathfrak{L} = \sqrt{-g}\mathcal{L}$) が、ある場の量の組 ψ^A_Ξ の大域的変換[5)]

$$\psi'^A_\Xi(x) = \boldsymbol{T}^A_B(\varepsilon)\psi^B_\Xi(x) \tag{2.2}$$

で不変だと仮定する。Ξ は A 以外のラベルで、上の変換に関与しない添え字である。以下ではこれを省略する。$\boldsymbol{T}$ は[6)]ある線形リー群 G の表現である。ただし、$\varepsilon = \{\varepsilon^r\}_{r=1,\cdots,n}$ は実パラメーターの組で、すべての r に対して $\varepsilon^r = 0$ のときが恒等変換に対応する。微小変換は、

$$\delta\psi^A := \psi'^A - \psi^A = \varepsilon^r (\boldsymbol{G}_r)^A{}_B \psi^B \tag{2.3}$$

である。ただし、$\boldsymbol{G}_r$ は群 G のリー代数の基底の表現である。$\boldsymbol{G}_r$ の交換関係は、

$$[\boldsymbol{G}_r, \boldsymbol{G}_s] := \boldsymbol{G}_r \boldsymbol{G}_s - \boldsymbol{G}_s \boldsymbol{G}_r = f^t{}_{rs} \boldsymbol{G}_t \tag{2.4}$$

となる。$f^t{}_{rs} (= -f^t{}_{sr})$ は構造定数である。
(2.2) の局所的変換を考える。このとき、$\mathfrak{L}(\psi^A, \partial_\mu \psi^A)$ はもはや不変ではない。そこで、

$$(D_\mu \psi)^A := \partial_\mu \psi^A + (\boldsymbol{A}_\mu)^A{}_B \psi^B \tag{2.5}$$

という量を導入し、$\boldsymbol{A}_\mu$ を以下の変換則が成り立つように決める：

$$(D'_\mu \psi')^A := \partial_\mu \psi'^A + (\boldsymbol{A}'_\mu)^A{}_B \psi'^B = \boldsymbol{T}^A_B(\varepsilon(x))(D_\mu \psi)^B. \tag{2.6}$$

[5)]変換のパラメーターが時空点によらないとき大域的変換といい、時空点によるとき局所的変換という。
[6)]$\boldsymbol{T}$ は $\boldsymbol{T}^A_B$ を (A, B) 成分とする行列である。

ここで、$\psi'^A = \boldsymbol{T}^A_B(\varepsilon(x))\psi^B$ である。このとき、$\mathfrak{L}(\psi^A, (D_\mu\psi)^A)$ は局所変換で不変である。ここで、$\mathfrak{L}(\psi^A, (D_\mu\psi)^A)$ は、もとのラグランジアン密度 $\mathfrak{L}(\psi^A, \partial_\mu\psi^A)$ の第 2 引数を共変微分で置き換えたものである。(2.6) より、

$$\boldsymbol{A}'_\mu = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\mu\boldsymbol{T}^{-1} - \partial_\mu\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1} \tag{2.7}$$

を得る。上式の右辺第 2 項は $\boldsymbol{G}_r$ の線形結合なので、$\boldsymbol{A}_\mu$ もそうであると仮定する：

$$\boldsymbol{A}_\mu = A^r{}_\mu\boldsymbol{G}_r. \tag{2.8}$$

このとき、

$$(D_\mu\psi)^A = \partial_\mu\psi^A + A^r{}_\mu(\boldsymbol{G}_r)^A{}_B\psi^B \tag{2.9}$$

となる。$A^r{}_\mu$ がゲージ場である (線形リー群 G のゲージ場とも呼ばれる)。

微分形式での共変微分は、

$$(D\psi)^A := d\psi^A + A^r(\boldsymbol{G}_r)^A{}_B \wedge \psi^B \tag{2.10}$$

である。ψ^A は (2.2) の $\psi^A{}_\Xi$ に対応する微分形式である。

2.3 ゲージ場の曲率

ゲージ場の曲率について解説する。これはゲージ場の強さとも呼ばれ、U(1) 群のゲージ場 (電磁ポテンシャル) の場合は、電場と磁場に相当する。

一般のゲージ場の曲率は、

$$F^r{}_{\mu\nu} := \partial_\mu A^r{}_\nu - \partial_\nu A^r{}_\mu + f^r{}_{st}A^s{}_\mu A^t{}_\nu \tag{2.11}$$

と定義される。行列

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} := F^r{}_{\mu\nu}\boldsymbol{G}_r = \partial_\mu\boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu\boldsymbol{A}_\mu + [\boldsymbol{A}_\mu, \boldsymbol{A}_\nu] \tag{2.12}$$

は、

$$\boldsymbol{F}'_{\mu\nu} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\boldsymbol{T}^{-1} \tag{2.13}$$

と変換される。微小変換では、

$$F'^r{}_{\mu\nu} = F^r{}_{\mu\nu} + \varepsilon^t f^r{}_{ts}F^s{}_{\mu\nu} \tag{2.14}$$

となる。

ゲージ場の 1 形式は、

$$A^r := A^r{}_\mu dx^\mu \tag{2.15}$$

である。ゲージ場の曲率の 2 形式は、

$$F^r := \frac{1}{2}F^r{}_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{2.16}$$

で定義され、

$$F^r = dA^r + \frac{1}{2}f^r{}_{st}A^s \wedge A^t \tag{2.17}$$

となる。

2.4　捩率と曲率

この小節では、重力を記述するために必要な捩率と曲率を解説する。

ローレンツ変換

$$\theta'^a = \Lambda^a{}_b\theta^b \tag{2.18}$$

で計量は不変である。ここで、$\Lambda^a{}_b$ は、

$$\Lambda^c{}_a\mathring{g}_{cd}\Lambda^d{}_b = \mathring{g}_{ab} \tag{2.19}$$

を満たす。微小変換 $\Lambda^a{}_b = \delta^a_b + \varepsilon^a{}_b$ では $\varepsilon^{ab} = -\varepsilon^{ba}$ となる。多脚場 θ^a の共変微分は、

$$\Theta^a := d\theta^a + \omega^a{}_b \wedge \theta^b \tag{2.20}$$

となる。ここで、$\omega^a{}_b$ はローレンツ群のゲージ場であり、$\omega_{ab} = -\omega_{ba}$ を満たす。$\omega^a{}_b$ はスピン接続とも呼ばれる (内山場と呼ぶべきかも知れない)。2 形式 Θ^a を捩率と呼ぶ。また、捩率が 0 になるような $\omega^a{}_b$ を $A^a{}_b$ と書き、レビ=チビタ接続と呼ぶ：

$$d\theta^a + A^a{}_b \wedge \theta^b = 0. \tag{2.21}$$

$\omega^a{}_b$ の曲率は、

$$\Omega^a{}_b := d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \tag{2.22}$$

であり、これは曲率形式と呼ばれる。以下では曲率とは $\Omega^a{}_b$ のことである。また、レビ=チビタ接続に対する曲率を、

$$\mathcal{R}^a{}_b := dA^a{}_b + A^a{}_c \wedge A^c{}_b \tag{2.23}$$

と書く。

捩率と曲率の変換則は、

$$\Theta'^a = \Lambda^a{}_b\Theta^b, \tag{2.24}$$

$$\Omega'^a{}_b = \Lambda^a{}_c(\Lambda^{-1})^d{}_b\Omega^c{}_d \tag{2.25}$$

である。後者は (2.13) から得られる。

捩率と曲率を、

$$\Theta^a = \frac{1}{2}T^a{}_{bc}\theta^b \wedge \theta^c, \tag{2.26}$$

$$\Omega^a{}_b = \frac{1}{2}F^a{}_{bcd}\theta^c \wedge \theta^d, \tag{2.27}$$

$$\mathcal{R}^a{}_b = \frac{1}{2}R^a{}_{bcd}\theta^c \wedge \theta^d \tag{2.28}$$

と展開し、

$$F_{ab} := F^c{}_{acb},\ F := F^a{}_a,\ R_{ab} := R^c{}_{acb},\ R := R^a{}_a,\ T_a := T^b{}_{ab} \tag{2.29}$$

と置く。一般にローレンツ添え字を3つ持つ0形式 X_{abc} に対して、$X_a := X^b{}_{ab}$ とする。なお、

$$d\theta^a = \frac{1}{2}\Delta^a{}_{bc}\theta^b \wedge \theta^c, \quad \omega_{ab} = \omega_{abc}\theta^c \tag{2.30}$$

と置くと、

$$\omega_{abc} \;=\; A_{abc} + K_{abc}, \tag{2.31}$$
$$A_{abc} \;:=\; \frac{1}{2}(\Delta_{cba} + \Delta_{abc} + \Delta_{bca}), \tag{2.32}$$
$$K_{abc} \;:=\; -\frac{1}{2}(T_{cba} + T_{abc} + T_{bca}) \tag{2.33}$$

となる [10]。

2.5　ゲージ場のラグランジアン形式

ゲージ場のラグランジアンについて解説する。

ラグランジアン形式

$$L := \mathcal{L}\eta \tag{2.34}$$

を導入すると、作用は、

$$S = \int_V L \tag{2.35}$$

である。$\eta(= *1)$ は体積形式である[7)] 。

SU(n) のゲージ場のラグランジアン形式は、

$$-\frac{1}{2k}\kappa_{rs}F^r \wedge *F^s \tag{2.36}$$

の形で、ゲージ不変なものである。例えば κ_{rs} としてはキリング形式 $\kappa_{rs} = -f^u{}_{rv}f^v{}_{su}$ が選べる。

ゲージ場 $\omega^a{}_b$ のラグランジアン形式としては、より多くのタイプのものがあり得る。一般相対論のように、$\omega^a{}_b$ が独立変数でない場合には、そのラグランジアンはないと言える。一方、$\omega^a{}_b$ が独立変数だとすると、そのラグランジアン形式は曲率の2次式であると考えるのが自然である。そのようなもとして、

$$\begin{aligned} L_F(\theta^a, \Omega^{ab}) = (&b_1 F_{abcd}F^{abcd} + b_2 F_{abcd}F^{cdab} + b_3 F_{abcd}F^{bcad} \\ &+ b_4 F_{ab}F^{ab} + b_5 F_{ab}F^{ba} + b_6 F^2)\eta \end{aligned} \tag{2.37}$$

が一般的である。b_i は定数である。

---

7) p 形式 $\omega = \omega_{\mu_1\cdots\mu_p}dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$ のホッジ双対は、

$$*\omega = \frac{1}{r!}E^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_{D-p}}\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_{D-p}}$$

である (テンソル添え字は $g_{\mu\nu}$ とその逆行列 $g^{\mu\nu}$ で上げ下げする。ミンコフスキー添え字 (θ^a の a や $\omega^a{}_b$ の a, b など) は $\mathring{g}_{ab}$ とその逆行列 $\mathring{g}^{ab}$ で上げ下げする)。ここで、$E_{\mu_1\cdots\mu_D}$ は完全反対称で、$E_{01\cdots d} = \sqrt{-g} = \det(\theta^a{}_\mu)$ である ($d = D - 1$)。

2.6 オイラー・ラグランジュ方程式

この小節では、共変微分で書かれた微分形式のオイラー・ラグランジュ方程式を導く。

微分形式の微分形式による微分

p 形式 β $(p = 0, 1, \cdots, D)$ が微分形式の組 $\{\alpha^i\}_{i=1,\cdots,k}$ で表されていると仮定する。もし変分 $\delta\alpha^i$ の下で β の変分が、

$$\delta\beta = \delta\alpha^i \wedge \omega_i \tag{2.38}$$

のように書けるとき、ω_i を β の α^i による微分といい、

$$\frac{\partial\beta}{\partial\alpha^i} := \omega_i \tag{2.39}$$

と書く。

オイラー・ラグランジュ方程式

微分形式で書かれたオイラー・ラグランジュ方程式を導く。

ラグランジアン形式 L は、微分形式の組 ψ とその外微分 $d\psi$ で表されるとする：

$$L = L(\psi, d\psi). \tag{2.40}$$

簡単のため、ψ は 1 つの p 形式とする。作用の変分は、

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_V [L(\psi + \delta\psi, d(\psi + \delta\psi)) - L(\psi, d\psi)] \\ &= \int_V (\delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial\psi} + d\delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\psi})\end{aligned} \tag{2.41}$$

である。右辺第 2 項は、

$$d\delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\psi} = d\Big(\delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\psi}\Big) - (-1)^p \delta\psi \wedge d\frac{\partial L}{\partial d\psi} \tag{2.42}$$

と書けるので、オイラー・ラグランジュ方程式は、

$$\frac{\partial L}{\partial\psi} - (-1)^p d\frac{\partial L}{\partial d\psi} = 0 \tag{2.43}$$

である。

以下では共変微分で書かれた微分形式のオイラー・ラグランジュ方程式を解説する。この小節の以下を飛ばしても、§4.3 までは読むことができる。

共役形式の共変微分

$\phi^{\mathcal{A}}$ を p 形式とする。p はラベル $\mathcal{A}$ に依存してもよい。今、場の変換 $\phi'^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{A}}(\phi^{\mathcal{B}})$ を考える。ただし、

$$J^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} := \frac{\partial f^{\mathcal{A}}}{\partial \phi^{\mathcal{B}}} \tag{2.44}$$

が存在し、0 でない成分は 0 形式と仮定する。つまり、変換後の p 形式の場が、変換前の p 形式の場だけで表されると仮定する。$J^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ は場に依存しても良いとする。更に、$J^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ の逆行列 $K^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ が存在し、外微分可能と仮定する。また、ラグランジアン形式 L は場の変換で不変だと仮定する。例えば、ゲージ変換はこの条件を満たす。このとき、$\phi^{\mathcal{A}}$ の共役形式

$$\pi_{\mathcal{A}} := \frac{\partial L}{\partial d\phi^{\mathcal{A}}} \tag{2.45}$$

は、

$$\pi'_{\mathcal{A}} = K^{\mathcal{B}}{}_{\mathcal{A}} \pi_{\mathcal{B}} \tag{2.46}$$

と変換する ([10] の (C.1.11))。

よって、ψ^A の共役形式 π_A の共変微分は、

$$D\pi_A = d\pi_A - A^r (G_r)^B{}_A \wedge \pi_B \tag{2.47}$$

である[8]。ゲージ場は微小ゲージ変換で、

$$\delta A^r = \varepsilon^s f^r{}_{st} A^t - d\varepsilon^r \tag{2.48}$$

と変換するので、A^r の共役形式 π_r は、

$$\delta \pi_r = f^s{}_{rt} \varepsilon^t \pi_s \tag{2.49}$$

と変換する。よって、π_r の共変微分は、

$$D\pi_r = d\pi_r + f^s{}_{rt} A^t \wedge \pi_s \tag{2.50}$$

である。

共変微分で書かれたオイラー・ラグランジュ方程式

ψ^A の微分が共変微分 $D\psi^A$ の形でのみラグランジアン形式に含まれなら、

$$\pi_A = \frac{\partial L}{\partial D\psi^A} \tag{2.51}$$

となる。L は ψ^A とゲージ場を合わせた形のラグランジアン形式である。従って、オイラー・ラグランジュ方程式は、

$$\frac{\partial L}{\partial \psi^A} - (-1)^p D \frac{\partial L}{\partial D\psi^A} = 0 \tag{2.52}$$

[8] ψ^A がラグランジアンに含まれない場合でも、(2.3) と変換する量の共変微分は (2.10) で定義される。

となることを示すことができる。同様に、もしもゲージ場のラグランジアン形式が A^r を含まず、dA^r は F^r の形でのみ含まれるとき、ゲージ場のオイラー・ラグランジュ方程式は、

$$\frac{\partial L}{\partial A^r} + D\frac{\partial L}{\partial F^r} = 0 \tag{2.53}$$

となることを示すことができる。

2.7 統一場理論とゲージ理論

この節ではゲージ理論の歴史について述べる [10, 24]。この節は読み飛ばすこともできる。

1915 年に、アインシュタインの一般相対論が完成した。これは、計量や接続 (平行移動) や曲率テンソルといった、幾何学的な言葉で定式化された。一方、当時、重力場以外に知られている場の理論は電磁場の理論のみであった。電磁場の定式化には計量, 接続, 曲率といった幾何学的な言葉は使われておらず、重力場とは異質に見えた[9)]。そこで、重力場と電磁場の両方を幾何学的な言葉で定式化できないだろうか？という疑問が生じた。この定式化を試みた理論を (またはそれらの理論の総称を) 統一場理論という。

最初の統一場理論として、ワイルのゲージ理論が現れた。これは平行移動の概念を拡張し、平行移動によってベクトルの大きさも変化するとしたものである。平行移動による大きさの変化を特徴づける量として、電磁場 (と同定されるもの) が現れる：アフィン接続は、

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda}(\varphi_\mu g_{\lambda\nu} + \varphi_\nu g_{\lambda\mu} - \varphi_\lambda g_{\mu\nu}) \tag{2.54}$$

となる。第 1 項はリーマン接続に対するアフィン接続で、クリストッフェル記号 (A.30) である。φ_μ が電磁場と同定される。

また、ワイルは、理論がゲージ変換 (gauge = 基準寸法 = 規格) と呼ばれる、計量の局所的変換に対して共変的だと仮定した。このゲージ変換が、電磁場の「ゲージ変換」や「ゲージ理論」の名前の由来である。

ワイルのゲージ理論には欠点があったが、ゲージ不変性や、理論に現れるスケール因子が、量子力学の研究を通して再解釈され、ゲージ原理という概念へと発展した。ゲージ原理は、物質場の位相の局所変換に対する共変性を要請することで、電磁場と物質場との相互作用の形が自動的に決まるというものである。

ところで、1921 年にカルツァ、1926 年に独立に O. クラインによって、カルツァ・クライン理論と呼ばれる 5 次元の統一場理論が発表された。また、フォックも独立に、クラインとほぼ同時に、同様の 5 次元理論を研究した。クラインとフォックの動機は量子力学の研究であり、ハミルトン・ヤコビ的な視点から 5 次元の統一場理論に達したようである。この理論では計量テンソル

$$\mathring{g}_{ab}\theta^a \otimes \theta^b + \theta^4 \otimes \theta^4, \quad \theta^4 = dx^4 + A \tag{2.55}$$

[9)] 完成したゲージ理論では、ゲージ場は数学では接続と呼ばれるようであり、ゲージ理論は幾何学的であると言える。
　また、本記事の以下では、電磁場と対応する U(1) 群のゲージ場を電磁場と呼ぶ (これはよく 4 元ポテンシャルや電磁ポテンシャルと呼ばれる)。

を考える。A は電磁場に対応する[10]。

カルツァ・クライン理論に続いて、5 次元をどうにか避ける試みがいくつもなされたが、それらはその後の発展にとって、あまり重要ではなかった。また、その外にも様々な統一場理論が考えられたが、その後の物理や数学の発展に重要だったのは、最初の 2 つの統一場理論であるワイルのゲージ理論とカルツァ・クライン理論であった。なお、1928 年のアインシュタインの遠隔平行性に基く統一場理論は、teleparallel gravity の起源である。

湯川秀樹の中間子論の後に、核力についての研究が盛んになった。この核力の研究の中で、初期のゲージ理論が生まれた。O. クラインの 1938 年の理論は、カルツァ・クライン理論を拡張した奇妙な理論であり、奇跡的に SU(2) ゲージ場の強さが現れた。この理論は長い間忘れられていて、その後のゲージ理論の発展には影響しなかった。

1953 年頃になると、ゲージ原理を核力の場合に、つまり、非可換ゲージ場の場合に拡張しようとする試みが同時に複数の研究者によってなされた：

- W. Pauli(SO(3), 1953 年, 未発表)
- C. N. Yang および R. Mills(SU(2), 1954 年)
- R. Shaw(SU(2), 1955 年)
- 内山龍雄 (一般の線形リー群, 重力場も含む, 発表は 1956 年) [11]。

パウリのゲージ理論は、核力についての研究が動機であるが、カルツァ・クライン理論の高次元 (6 次元) 版をもとにしていた。Shaw およびヤン・ミルズのものは、アイソスピン 2 重項に対する SU(2) ゲージ理論であった。Shaw の理論は SU(2) に特化していたが、ヤン・ミルズ (1954 年 10 月 1 日出版) のものは一般の線形リー群の場合に拡張可能な形であった。内山龍雄の 1954 年 1 月にはほぼ完成していた理論は、一般の線形リー群についてのゲージ理論であり、ローレンツ群に対するゲージ場として重力場をも含むものだった。内山は発表が遅れたため、ヤン・ミルズにプライオリティを取られてしまったが、内山の不変変分論の視点は非常に興味深く、教育的だと思われる。

統一場理論と、それからゲージ理論へ至る道については [24] が詳しい。

ここでいつくか (なんとなく) 思ったことを言いたい：

- ゲージ理論は統一場理論である。
- ゲージ理論は重力理論であり、重力理論はゲージ理論である。
- 重力のゲージ理論は、統一場理論の延長ともみなせる。
- 重力のゲージ理論こそが、重力理論の自然な発展の仕方である。

[10] 大雑把に言うと、ワイル理論ではスピン接続と電磁場が統合され、対等な量であるが、カルツァ・クライン理論では多脚場と電磁場が統合されている。

3　一般相対論

一般相対論について解説する。一般相対論では、変分の独立変数が θ^a のみの場合を 2 階形式といい、θ^a と $\omega^a{}_b$ が独立変数の場合を 1 階形式という。2 階形式について §3.3 の定式化と §3.4 の定式化がある (これらは等価ではないと思う)。1 階形式のオイラー・ラグランジュ方程式は §3.4 のそれと等価である。

3.1　公式集

この節では記号の導入と、公式の列挙をする。

記号

$$
\begin{aligned}
&\eta := *1 \ , \ \eta^a := *\theta^a , \ \ \eta^{ab} := *(\theta^a \wedge \theta^b) \ , \\
&\eta^{abc} := *(\theta^a \wedge \theta^b \wedge \theta^c) , \ \ \eta^{abcd} := *(\theta^a \wedge \theta^b \wedge \theta^c \wedge \theta^d)
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

を導入する。以下の公式が成り立つ [10,21]。まず、

$$\theta^a \wedge \eta_{bcd} = \delta^a_b \eta_{cd} - \delta^a_c \eta_{bd} + \delta^a_d \eta_{bc}, \tag{3.2}$$

$$\theta^a \wedge \eta_{bc} = -\delta^a_b \eta_c + \delta^a_c \eta_b, \tag{3.3}$$

$$\theta^a \wedge \eta_b = \delta^a_b \eta \tag{3.4}$$

であり、これらより、

$$\theta^a \wedge \theta^b \wedge \eta_{cd} = (\delta^a_c \delta^b_d - \delta^a_d \delta^b_c)\eta \tag{3.5}$$

および

$$\theta^a \wedge \theta^b \wedge \eta_{cde} = (\delta^a_d \delta^b_e - \delta^a_e \delta^b_d)\eta_c - (\delta^a_c \delta^b_e - \delta^a_e \delta^b_c)\eta_d + (\delta^a_c \delta^b_d - \delta^a_d \delta^b_c)\eta_e \tag{3.6}$$

を得る。また、

$$\delta\eta_{ab} = \delta\theta^c \wedge \eta_{abc}, \tag{3.7}$$

$$\delta\eta_a = \delta\theta^b \wedge \eta_{ab}, \tag{3.8}$$

$$\delta\eta = \delta\theta^a \wedge \eta_a \tag{3.9}$$

および、

$$d\eta_{ab} = \omega^c{}_a \wedge \eta_{cb} + \omega^c{}_b \wedge \eta_{ac} + \Theta^c \wedge \eta_{abc} \tag{3.10}$$

が成り立つ。

3.2　ディラック場

ローレンツ変換に対してスピン表現で変換するものをスピノール場という。スピノール場はローレンツ群のゲージ場 ($\omega^a{}_b$ または $A^a{}_b$) と結合する。スピノール場にはワイル・スピノールやディラック・スピノール, ラリタ・シュヴィンガー場がある。この小節では、ディラック場 (ディラック・スピノール) について解説する。

ガンマ行列 γ^a は、

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2\overset{\circ}{g}{}^{ab} \tag{3.11}$$

を満たす。ディラック場のラグランジアン形式は、

$$L = \frac{1}{2}\Big(- \bar{\psi}\gamma_c d\psi + d\bar{\psi}\gamma_c\psi\Big) \wedge \eta^c - m\bar{\psi}\psi\eta \tag{3.12}$$

である。ここで、$\bar{\psi} := i\psi^\dagger\gamma^0$ である。微分を (ローレンツ群についての) 共変微分に置き換えると、

$$L = \frac{1}{2}\Big(- \bar{\psi}\gamma_c\big(d\psi + \frac{1}{4}\omega^{ab}\gamma_{ab}\psi\big) + \big(d\bar{\psi} - \frac{1}{4}\omega^{ab}\bar{\psi}\gamma_{ab}\big)\gamma_c\psi\Big) \wedge \eta^c - m\bar{\psi}\psi\eta \tag{3.13}$$

である。ここで、

$$\gamma_{ab} := \gamma_{[a}\gamma_{b]} = \frac{1}{2}(\gamma_a\gamma_b - \gamma_b\gamma_a) \tag{3.14}$$

である。[ ] は反対称化記号である。(3.13) より、ディラック場のラグランジアン形式には捩率は $T^{[abc]}$ の形でのみ現れる。

物質場 (物質を表す場および重力以外のゲージ場) のラグランジアン形式を $L_{\mathrm{mat}}(\theta^a, \omega^{ab}; \psi^A)$ とする。ω^{ab} は共変微分を通してのみ現れる。スピノール場がないなら、L_{mat} は ω^{ab} に依らない。

3.3　2 階形式：捩率なし

まず、2 階形式で捩率なしの定式化を解説する。

θ^a のラグランジアン形式として、

$$L_N(\theta^a, d\theta^a) = \frac{1}{2\kappa}N, \quad N := \mathcal{R}^{ab} \wedge \eta_{ab} - d(A^{ab} \wedge \eta_{ab}) = A^a{}_c \wedge A^c{}_b \wedge \eta^b{}_a \tag{3.15}$$

を考える[11]。物質場のラグランジアン形式を $L_{\mathrm{mat}}(\theta, d\theta) := L_{\mathrm{mat}}(\theta^a, A^{ab}; \psi^A)$ とする。すなわち、共変微分に現れるスピン接続にレビ=チビタ接続を採用する。

全系のラグランジアン形式 L の変分は、

$$\begin{aligned}\delta L(\theta, d\theta) = \delta\theta^c \wedge \Big(&\frac{1}{2\kappa}[\mathcal{R}^{ab} \wedge \eta_{abc} - d(A^{ab} \wedge \eta_{abc})] + \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta, d\theta)}{\partial\theta^c}\Big)\\ &+\delta d\theta^c \wedge \Big[\frac{1}{2\kappa}A^{ab} \wedge \eta_{abc} + \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta, d\theta)}{\partial d\theta^c}\Big]\\ &+\delta A^{ab}(\theta, d\theta) \wedge \frac{1}{2\kappa}[d\eta_{ab} - A^c{}_a \wedge \eta_{cb} - A^c{}_b \wedge \eta_{ac}]\end{aligned} \tag{3.16}$$

[11] $\frac{1}{2\kappa}\mathcal{R}^{ab} \wedge \eta_{ab} = \frac{1}{2\kappa}R\eta$ はアインシュタイン・ヒルベルトのラグランジアン形式である。

となる。(3.10) より、最後の項は 0 である。よって、

$$\frac{\partial L}{\partial \theta^c} = \frac{1}{2\kappa}[\mathcal{R}^{ab} \wedge \eta_{abc} - d(A^{ab} \wedge \eta_{abc})] + \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta, d\theta)}{\partial \theta^c}, \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial L}{\partial d\theta^c} = \frac{1}{2\kappa} A^{ab} \wedge \eta_{abc} + \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta, d\theta)}{\partial d\theta^c} \tag{3.18}$$

を得る。オイラー・ラグランジュ方程式 $\partial L/\partial \theta^c + d(\partial L/\partial d\theta^c) = 0$ は、

$$-\frac{1}{2}\mathcal{R}^{ab} \wedge \eta_{abc} = \kappa \tilde{T}_c \tag{3.19}$$

となる。ただし、

$$\tilde{T}_c := \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta, d\theta)}{\partial \theta^c} + d\frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta, d\theta)}{\partial d\theta^c} \tag{3.20}$$

である。オイラー・ラグランジュ方程式は、アインシュタイン方程式

$$R^a{}_b - \frac{1}{2} R \delta^a_b = \kappa \tilde{T}_b{}^a \tag{3.21}$$

と等価である。ここで、$\tilde{T}_c = \tilde{T}_c{}^b \eta_b$ とした。

3.4　2 階形式：アインシュタイン・カルタン理論

2 階形式で捩率ありの定式化を解説する。これはアインシュタイン・カルタン理論と呼ばれる。全系のラグランジアン形式を

$$L = \frac{1}{2\kappa}\Big(\Omega^{ab} \wedge \eta_{ab} - d(\omega^{ab} \wedge \eta_{ab})\Big) + L_{\mathrm{mat}}(\theta^a, \omega^{ab}; \psi^A) \tag{3.22}$$

とする。L の変分は、

$$\begin{aligned} \delta L(\theta, d\theta) = {}& \delta\theta^c \wedge \left(\frac{1}{2\kappa}[\Omega^{ab} \wedge \eta_{abc} - d(\omega^{ab} \wedge \eta_{abc})] + \mathcal{T}_c\right) \\ & + \delta d\theta^c \wedge \frac{1}{2\kappa}\omega^{ab} \wedge \eta_{abc} \\ & + \delta\omega^{ab}(\theta, d\theta) \wedge \left(\frac{1}{2\kappa}[d\eta_{ab} - \omega^c{}_a \wedge \eta_{cb} - \omega^c{}_b \wedge \eta_{ac}] + \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial \omega^{ab}}\right) \end{aligned} \tag{3.23}$$

となる。ここで、

$$\mathcal{T}_c := \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta^a, \omega^{ab}, \psi^A)}{\partial \theta^c}\Big|_{\omega^{ab} = \omega^{ab}(\theta, d\theta)} \tag{3.24}$$

である。$\omega^{ab}(\theta, d\theta)$ は、

$$\frac{1}{2\kappa}[d\eta_{ab} - \omega^c{}_a \wedge \eta_{cb} - \omega^c{}_b \wedge \eta_{ac}] + \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial \omega^{ab}} = 0 \tag{3.25}$$

で決定する。この式は、1 階形式のスピン接続のオイラー・ラグランジュ方程式 (3.34) と同じである。仮定 (3.25) の下で、(3.23) より、

$$\frac{\partial L}{\partial \theta^c} = \frac{1}{2\kappa}[\Omega^{ab} \wedge \eta_{abc} - d(\omega^{ab} \wedge \eta_{abc})] + \mathcal{T}_c, \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial L}{\partial d\theta^c} = \frac{1}{2\kappa}\omega^{ab} \wedge \eta_{abc} \tag{3.27}$$

を得る。オイラー・ラグランジュ方程式は、

$$-\frac{1}{2}\Omega^{ab} \wedge \eta_{abc} = \kappa \mathcal{T}_c \tag{3.28}$$

となる。

3.5 1 階形式

1 階形式では、

$$L = \frac{1}{2\kappa}\Omega^{ab} \wedge \eta_{ab} + L_{\mathrm{mat}}(\theta^a, \omega^{ab}; \psi^A) \tag{3.29}$$

である。このとき、

$$\frac{\partial L}{\partial \theta^c} = \frac{1}{2\kappa}\Omega^{ab} \wedge \eta_{abc} + \mathcal{T}_c, \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial L}{\partial d\theta^c} = 0, \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega^{ab}} = \frac{1}{2\kappa}(-\omega^c{}_a \wedge \eta_{cb} - \omega^c{}_b \wedge \eta_{ac}) + \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial \omega^{ab}}, \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial L}{\partial d\omega^{ab}} = \frac{1}{2\kappa}\eta_{ab} \tag{3.33}$$

を得る。ここで、$\mathcal{T}_c = \partial L_{\mathrm{mat}}/\partial \theta^c$ である。ω^{ab} のオイラー・ラグランジュ方程式は、

$$\frac{1}{2\kappa}[d\eta_{ab} - \omega^c{}_a \wedge \eta_{cb} - \omega^c{}_b \wedge \eta_{ac}] + \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial \omega^{ab}} = 0 \tag{3.34}$$

となる。

4　重力のゲージ理論

この節では重力のゲージ理論を解説する。まず、§4.1 では中野の理論と (3.15) のラグランジアン形式について解説する。§4.2 では捩率の 2 次のラグランジアン形式と遠隔平行重力について解説する。§4.3 ではポアンカレゲージ理論を解説する。§4.4 では、それらとは別の理論を紹介する。

4.1　中野のラグランジアン形式

多脚場のラグランジアン形式 L_N は、多脚場の微分の 2 次式であると考えると、

$$L_\Delta(\theta^a, d\theta^a) = (c_1\Delta_{abc}\Delta^{abc} + c_2\Delta_{abc}\Delta^{bca} + c_3\Delta_a\Delta^a)\eta \tag{4.1}$$

が一般的である ($\Delta_a = \Delta^b{}_{ab}$ であった)。c_i は定数である。これは、

$$\begin{aligned} L_\Delta = \Big[&(2c_1 - c_2 + c_3)d\theta^a \wedge *d\theta_a + c_2 d\theta^a \wedge \theta_a \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_b) \\ &-c_3 d\theta^a \wedge \theta_b \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_a)\Big] \end{aligned} \tag{4.2}$$

と書ける ([25] を参考にした)。さらに、微小の局所ローレンツ変換で、ラグランジアン形式が全微分項しか変化しないことを要請すると、

$$L_N = \frac{1}{2\kappa}\Big[\frac{1}{2}d\theta^a \wedge \theta_a \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_b) - d\theta^a \wedge \theta_b \wedge *(d\theta^b \wedge \theta_a)\Big] \tag{4.3}$$

の形に限られる [20,25]。κ がアインシュタイン定数なら、これは一般相対論の (3.15) と一致する。これは、

$$(c_1, c_2, c_3) = \frac{1}{2\kappa}\Big(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\Big) =: (c_1^*, c_2^*, c_3^*) \tag{4.4}$$

の場合である。

中野 [12] の採用したラグランジアンは、

$$L = L_\Delta(\theta^a, d\theta^a) + L_{\mathrm{mat}}(\theta^a, A^{ab}; \psi^A) \tag{4.5}$$

である。

4.2　捩率の 2 次のラグランジアン形式

捩率の 2 次のラグランジアン形式は、

$$L_T(\theta^a, \Theta^a) = (a_1 T_{abc}T^{abc} + a_2 T_{abc}T^{bca} + a_3 T_a T^a)\eta \tag{4.6}$$

が一般的である ($T_a = T^b{}_{ab}$ であった)。これは局所ローレンツ不変である。L_T は、

$$\begin{aligned} L_T = \Big[&(2a_1 - a_2 + a_3)\Theta^a \wedge *\Theta_a + a_2\Theta^a \wedge \theta_a \wedge *(\Theta^b \wedge \theta_b) \\ &-a_3\Theta^a \wedge \theta_b \wedge *(\Theta^b \wedge \theta_a)\Big] \end{aligned} \tag{4.7}$$

とも書ける。
　遠隔平行重力では、

$$L = L_T(\theta^a, \Theta^a) + L_{\rm mat}(\theta^a, \omega^{ab}; \psi^A), \quad \Omega^a{}_b = 0 \tag{4.8}$$

である。特に、スピノール場がなく、

$$(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{2\kappa}\Big(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\Big) = (c_1^*, c_2^*, c_3^*) \tag{4.9}$$

の場合は、遠隔平行重力は一般相対論と等価である[12)] [17]。このことは、以下のようにして分かる。まず、

$$\Omega^{ab} \wedge \eta_{ab} = N + K^a{}_c \wedge K^{cb} \wedge \eta_{ab} + d(\omega^{ab} \wedge \eta_{ab}) \tag{4.10}$$

である。ここで、$N = A^a{}_c \wedge A^{cb} \wedge \eta_{ba}$ である。$\Omega^a{}_b = 0$ より、

$$L_N = L_T^* - \frac{1}{2\kappa} d(\omega^{ab} \wedge \eta_{ab}), \quad L_T^* := \frac{1}{2\kappa} K^a{}_c \wedge K^{cb} \wedge \eta_{ba} \tag{4.11}$$

である。L_T^* は L_N で Δ_{abc} を T_{abc} に置き換えたものなので、$L_T^* = L_T|_{a_i = c_i^*}$ である。

4.3　ポアンカレゲージ理論

　ポアンカレゲージ理論では、

$$L = L_T(\theta^a, \Theta^a) + L_F(\theta^a, \Omega^{ab}) + \lambda \Omega^{ab} \wedge \eta_{ab} + L_{\rm mat}(\theta^a, \omega^{ab}; \psi^A) \tag{4.12}$$

である。ここで、L_F は (2.37) のものである。ポアンカレゲージ理論はポアンカレ群のゲージ理論であるが、ローレンツ群のゲージ理論でもこのラグランジアン形式は自然である。いずれの場合も、$\lambda = 0$ が自然だと思う。
　(4.12) に対するオイラー・ラグランジュ方程式は、(2.52), (2.53) より、

$$\frac{\partial L}{\partial \theta^a} + D\frac{\partial L}{\partial \Theta^a} = 0, \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega^{ab}} + D\frac{\partial L}{\partial \Omega^{ab}} = 0 \tag{4.14}$$

である。今、

$$\pi_a := \frac{\partial L_T}{\partial \Theta^a}, \tag{4.15}$$

$$\pi_{ab} := \frac{\partial L_F}{\partial \Omega^{ab}} + \lambda \eta_{ab}, \tag{4.16}$$

$$\mathcal{T}_a := \frac{\partial L_{\rm mat}}{\partial \theta^a}, \tag{4.17}$$

$$U_a := \frac{\partial L_F}{\partial \theta^a}, \tag{4.18}$$

$$J_{ab} := \frac{\partial L_{\rm mat}}{\partial \omega^{ab}}, \tag{4.19}$$

$$I_{ab} := \frac{\partial L_T}{\partial \omega^{ab}} \tag{4.20}$$

[12)] スピノール場がある場合は、§3.3, §3.4 のいずれとも等価ではないと思う。

とすると、

$$\frac{\partial L_T}{\partial \theta^a} + D\pi_a = -(\mathcal{T}_a + U_a), \tag{4.21}$$

$$D\pi_{ab} = -(J_{ab} + I_{ab}) \tag{4.22}$$

を得る。ここで、

$$D\pi_a = d\pi_a + \omega_a{}^b \wedge \pi_b, \tag{4.23}$$

$$D\pi_{ab} = d\pi_{ab} + \omega_a{}^c \wedge \pi_{cb} + \omega_b{}^c \wedge \pi_{ac} \tag{4.24}$$

である。

いま、$b_i = \tilde{b}_i/g$ と書き、π_{ab} で b_i を $\tilde{b}_i$ に、λ を $g\lambda$ に置き換えたものを $\tilde{\pi}_{ab}$ とすると、

$$D\tilde{\pi}_{ab} = -g(J_{ab} + I_{ab}) \tag{4.25}$$

である。$g \to 0$ では λ の項の影響は無視できる。また、$g \to 0$ では $\tilde{\pi}_{ab} = 0$ が解の 1 つである。$\tilde{\pi}_{ab}$ で $g\lambda = 0$ としたものを $\tilde{\pi}_{ab}^{(0)}$ とする。Ω^{ab} が $\tilde{\pi}_{ab}^{(0)}$ で表すことが出来るときは、$\tilde{\pi}_{ab}^{(0)} = 0$ は $\Omega^{ab} = 0$ を意味する。この意味で、遠隔平行重力は、ポアンカレ群のゲージ理論で $g \to 0$ の場合に対応する。

4.4 別の可能性

また、ローレンツ群のゲージ理論では、

$$L = L_N(\theta^a, d\theta^a) + L_F(\theta^a, \Omega^{ab}) + L_{\mathrm{mat}}(\theta^a, \omega^{ab}; \psi^A) \tag{4.26}$$

もあり得る。オイラー・ラグランジュ方程式は、アインシュタイン方程式

$$-\frac{1}{2}\mathcal{R}^{ab} \wedge \eta_{abc} = \kappa(\mathcal{T}_a + U_a) \tag{4.27}$$

とヤン・ミルズ・内山方程式

$$D\pi_{ab} = -J_{ab} \tag{4.28}$$

である。

5 共変正準形式

この節では共変正準形式を解説し、§4 の重力のゲージ理論への応用についてコメントする。共変正準形式は、微分形式を基本変数とし、時間と空間を平等に扱う。この形式では、一般相対論 (§3.3, §3.4 の系) も非拘束系として扱うことができる [10,28]。

一般論

共変正準形式 [10,27,28] を解説する。

ψ を p 形式とし、ラグランジアン形式は $L(\psi, d\psi)$ とする。ψ の共役形式 π を

$$\pi := \frac{\partial L}{\partial d\psi}. \tag{5.1}$$

で定義する。これは $q(:= D-p-1)$ 形式である。Hamilton form を、

$$H(\psi,\pi) := d\psi \wedge \pi - L \tag{5.2}$$

で定義する。H の変分は、

$$\delta H = (-1)^{(p+1)q} \delta\pi \wedge d\psi - \delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial \psi} \tag{5.3}$$

なので、

$$\frac{\partial H}{\partial \psi} = -\frac{\partial L}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial H}{\partial \pi} = (-1)^{(p+1)q} d\psi \tag{5.4}$$

を得る。オイラー・ラグランジュ方程式 (2.43) を代入して、正準方程式

$$d\psi = (-1)^{(p+1)q} \frac{\partial H}{\partial \pi}, \quad d\pi = -(-1)^p \frac{\partial H}{\partial \psi} \tag{5.5}$$

を得る。

ポアソン括弧 [26] は、

$$\{F, G\} = (-1)^{p(f+D+1)} \frac{\partial F}{\partial \psi} \wedge \frac{\partial G}{\partial \pi} - (-1)^{(D+p-1)(f+1)} \frac{\partial F}{\partial \pi} \wedge \frac{\partial G}{\partial \psi} \tag{5.6}$$

である。F は f 形式である。正準方程式は、

$$d\psi = -\{H, \psi\}, \quad d\pi = -\{H, \pi\} \tag{5.7}$$

と書ける。F が時空点に陽に依存しないなら、

$$\begin{aligned} dF &= d\psi \wedge \frac{\partial F}{\partial \psi} + d\pi \wedge \frac{\partial F}{\partial \pi} \\ &= (-1)^{(p+1)q} \frac{\partial H}{\partial \pi} \wedge \frac{\partial F}{\partial \psi} - (-1)^p \frac{\partial H}{\partial \psi} \wedge \frac{\partial F}{\partial \pi} \\ &= -\{H, F\} \end{aligned} \tag{5.8}$$

となる。

§3.3, §3.4 の系では共変正準形式が使える [10,28](重力場なのに非拘束系である！) が、§3.5 の系は拘束系となり、ディラック括弧が必要となる [27]。共変正準形式の生成子については、論文 [27,28] がある。

二重共変形式

[27] で提案された 2 重共変正準形式を解説する。Hamilton form を今度は、

$$H(\phi, \pi) := D\phi^{\mathcal{A}} \wedge \pi_{\mathcal{A}} - L(\phi, D\phi) \tag{5.9}$$

で定義する。ただし、ϕ^A はゲージ場 A^r も含む。$DA^r := F^r$ とした。H の変分は、

$$\begin{aligned} \delta H &= \delta D\phi^{\mathcal{A}} \wedge \pi_{\mathcal{A}} + D\phi^{\mathcal{A}} \wedge \delta\pi_{\mathcal{A}} - \delta\phi^{\mathcal{A}} \wedge \frac{\partial L}{\partial \phi^{\mathcal{A}}} - \delta D\phi^{\mathcal{A}} \wedge \frac{\partial L}{\partial D\phi^{\mathcal{A}}} \\ &= (-1)^{(p+1)q} \delta\pi_{\mathcal{A}} \wedge D\phi^{\mathcal{A}} - \delta\phi^{\mathcal{A}} \wedge \frac{\partial L}{\partial \phi^{\mathcal{A}}} \end{aligned} \tag{5.10}$$

となる。よって、

$$\frac{\partial H}{\partial \phi^{\mathcal{A}}} = -\frac{\partial L}{\partial \phi^{\mathcal{A}}}, \quad \frac{\partial H}{\partial \pi_{\mathcal{A}}} = (-1)^{(p+1)q} D\phi^{\mathcal{A}} \tag{5.11}$$

を得る。(2.52), (2.53) を (5.11) に代入して、

$$D\phi^{\mathcal{A}} = (-1)^{(p+1)q} \frac{\partial H}{\partial \pi_{\mathcal{A}}}, \tag{5.12}$$

$$D\pi_{\mathcal{A}} = -(-1)^p \frac{\partial H}{\partial \phi^{\mathcal{A}}} \tag{5.13}$$

を得る。

ポアンカレゲージ理論

(4.12) で $\lambda = 0$ とすると、

$$L = L_T(\theta^a, \Theta^a) + L_F(\theta^a, \Omega^{ab}) + L_{\mathrm{mat}}(\theta^a, \omega^{ab}; \psi^A) \tag{5.14}$$

であり、

$$H = H_T + H_F - L_{\mathrm{mat}}(\theta^a, \omega^{ab}; \psi^A), \tag{5.15}$$

$$H_T(\theta^a, \pi_a) := \Theta^a \wedge \pi_a - L_T, \tag{5.16}$$

$$H_F(\omega^{ab}, \pi_{ab}) := \Omega^{ab} \wedge \pi_{ab} - L_F \tag{5.17}$$

である。以下で解説する条件が満たされるなら、Θ^a, Ω^{ab} は π_a, π_{ab} で表すことができ、正準形式が使える。また、

$$H_T = L_T, \quad H_F = L_F \tag{5.18}$$

となる [25]。

θ^a について

2 形式 $W^a = \frac{1}{2} w^a{}_{bc} \theta^b \wedge \theta^c$ は 3 つの既約成分を持つ [21, 22]：

$$
\begin{aligned}
W^a &= \sum_{i=1}^{3} {}^{(i)}W^a, && (5.19)\\
{}^{(i)}W^a &= \frac{1}{2} {}^{(i)}w^a{}_{bc} \theta^b \wedge \theta^c, && (5.20)\\
{}^{(2)}w_{abc} &:= \frac{2\mathring{g}_{a[c} w_{b]}}{D-1}, && (5.21)\\
{}^{(3)}w_{abc} &:= w_{[abc]}, && (5.22)\\
{}^{(1)}w_{abc} &:= w_{abc} - {}^{(2)}w_{abc} - {}^{(3)}w_{abc} && (5.23)
\end{aligned}
$$

である。D は次元であり、$w_a = w^b{}_{ab}$ である。このとき、

$$
{}^{(k)}({}^{(i)}W^a) = \delta_{ik} {}^{(i)}W^a \tag{5.24}
$$

である。また、

$$
{}^{(i)}w_{abc} = {}^{(i)}P_{abcdef} w^{def}. \tag{5.25}
$$

と書く。今、

$$
X_a = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i * {}^{(i)}W_a \tag{5.26}
$$

とすると、$\gamma_i \neq 0$ なら、

$$
W_a = -\sum_i \frac{1}{\alpha_i}{}^{(i)} * X_a \tag{5.27}
$$

となる。

振率の 2 次のラグランジアン形式は、

$$
L_T = \frac{1}{2} T^{abc} P_{abcdef} T^{def} \eta \tag{5.28}
$$

で、P_{abcdef} は $\mathring{g}_{ij}$ だけで書け、

$$
P_{abcdef} = -P_{acbdef} = -P_{abcdfe} = P_{defabc} \tag{5.29}
$$

を満たす。一般的なものは、

$$
P_{abcdef} = \sum_i \alpha_i \cdot {}^{(i)}P_{abcdef} \tag{5.30}
$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
L_T &= \frac{1}{2} \Theta^a \wedge * \sum_i \alpha_i \cdot {}^{(i)}\Theta_a && (5.31)\\
&= \frac{1}{2} \sum_i \alpha_i {}^{(i)}\Theta^a \wedge *{}^{(i)}\Theta_a && (5.32)
\end{aligned}
$$

であり、

$$\pi_a = *\sum_i \alpha_i \cdot {}^{(i)}\Theta_a \tag{5.33}$$

である。よって、$\alpha_i \neq 0$ なら、

$$\Theta_a = -\sum_i \frac{1}{\alpha_i} {}^{(i)}(*\pi_a) \tag{5.34}$$

であり、

$$\begin{aligned} H_T &= \frac{1}{2}\sum_i \frac{1}{\alpha_i} {}^{(i)}(*\pi_a) \wedge *^{(i)}(*\pi^a) \\ &= \frac{1}{2}\sum_i \frac{1}{\alpha_i} {}^{(i)}(*\pi_a) \wedge *(*\pi^a) \\ &= -\frac{1}{2}\pi_a \wedge \sum_i \frac{1}{\alpha_i} {}^{(i)}(*\pi_a) \end{aligned} \tag{5.35}$$

である。このとき、

$$\Theta^a = \frac{\partial H_T}{\partial \pi_a} \tag{5.36}$$

となる。

ω^{ab} について

曲率 2 形式 $\Omega^{ab}(= -\Omega^{ba})$ は 6 つの既約成分を持つ [21]：

$$\Omega^{ab} = \sum_{i=1}^{6} {}^{(i)}\Omega^{ab}. \tag{5.37}$$

よって、

$$L_F = \frac{1}{2}\Omega^{ab} \wedge *\sum_{i=1}^{6} \beta_i {}^{(i)}\Omega^{ab} \tag{5.38}$$

が一般的な形である。$\beta_i \neq 0$ とすると、

$$\Omega_{ab} = -\sum_i \frac{1}{\beta_i} {}^{(i)}(*\pi_{ab}) \tag{5.39}$$

であり、

$$H_F = -\frac{1}{2}\pi_{ab} \wedge \sum_i \frac{1}{\beta_i} {}^{(i)}(*\pi_{ab}) \tag{5.40}$$

および、

$$\Omega^{ab} = \frac{\partial H_T}{\partial \pi_{ab}} \tag{5.41}$$

となる。

A 共変微分, 曲率

教科書 [10] の方法で共変微分と曲率テンソルを解説する。テンソルの共変微分のこの導入方法は、ゲージ理論のそれ (§2.2) と同じである。

テンソルの成分を ψ^A と書く。アフィン変換

$$dx'^\mu = a^\mu{}_\nu dx^\nu,\ a^\mu{}_\nu \in \mathrm{GL}(D, \mathbb{R}) \tag{A.1}$$

によって、ψ^A は、

$$\psi'^A = \boldsymbol{T}^A_B(a)\psi^B \tag{A.2}$$

と変換する。このとき、

$$\nabla_\mu\psi^A = \partial_\mu\psi^A + (\boldsymbol{\Gamma}_\mu)^A{}_B\psi^B \tag{A.3}$$

という量 (これを共変微分と呼ぶ) がテンソルの成分になるようにしたい。そのためには、

$$\partial'_\mu\psi'^A + (\boldsymbol{\Gamma}'_\mu)^A{}_B\psi'^B = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\boldsymbol{T}^A_B\nabla_\alpha\psi^B \tag{A.4}$$

であれば良い。よって、

$$(\boldsymbol{\Gamma}'_\mu)^A{}_B = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\Big[-\partial_\alpha\boldsymbol{T}^A_C\cdot(\boldsymbol{T}^{-1})^C{}_B + \boldsymbol{T}^A_D(\boldsymbol{\Gamma}_\alpha)^D{}_C(\boldsymbol{T}^{-1})^C{}_B\Big] \tag{A.5}$$

を得る。

微小アフィン変換は、

$$dx'^\mu = dx^\mu + \varepsilon^\mu{}_\nu(x)dx^\nu \tag{A.6}$$

であり[13] 、これに対してテンソル ψ^A は、

$$\delta\psi^A = \varepsilon^\lambda{}_\nu(x)(\boldsymbol{G}^\nu{}_\lambda)^A{}_B\psi^B \tag{A.7}$$

と変換する。$\boldsymbol{G}^\nu{}_\mu$ は、アフィン変換群の n^2 個の生成子である。これは、

$$[\boldsymbol{G}^\nu{}_\mu, \boldsymbol{G}^\beta{}_\alpha] = \delta^\nu_\alpha\boldsymbol{G}^\beta{}_\mu - \delta^\beta_\mu\boldsymbol{G}^\nu{}_\alpha \tag{A.8}$$

を満たす。(A.5) の右辺第 1 項の $\partial_\alpha\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}$ の項は、リー代数の基底の線形結合となる。よって、$(\boldsymbol{\Gamma}_\mu)^A{}_B$ は、$(\boldsymbol{G}^\nu{}_\lambda)^A{}_B$ の線形結合の項 $\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}(\boldsymbol{G}^\nu{}_\lambda)^A{}_B$ を含むべきである。それ以外の項は 0 と置いても良い：

$$(\boldsymbol{\Gamma}_\mu)^A{}_B = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}(\boldsymbol{G}^\nu{}_\lambda)^A{}_B. \tag{A.9}$$

このとき、$(\boldsymbol{\Gamma}'_\mu)^A{}_B = \Gamma'^\lambda{}_{\nu\mu}(\boldsymbol{G}^\nu{}_\lambda)^A{}_B$ となる。$\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}$ をアフィン接続と呼ぶ。

[13] この $\varepsilon^\mu{}_\nu(x)$ は、ある微小量 $\varepsilon^\mu(x)$ を用いて、$\varepsilon^\mu{}_\nu = \partial_\nu\varepsilon^\mu$ と書ける。(A.6) は座標変換 $x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$ に対応する。

特に、ψ^A をベクトル場とすると、(A.5), (A.9) と、

$$\boldsymbol{T}^\lambda_{\ \nu} = a^\lambda_{\ \nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} \tag{A.10}$$

より、

$$\Gamma'^\lambda_{\ \nu\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\Big[-\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\delta}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\Gamma^\delta_{\gamma\alpha}\Big] \tag{A.11}$$

を得る。これは、

$$\Gamma'^\lambda_{\ \nu\mu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\delta}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\Gamma^\delta_{\gamma\alpha} \tag{A.12}$$

とも書ける。

よって、(A.11) の変換則を持つ量 $\Gamma^\lambda_{\ \nu\mu}$ を用いて、共変微分

$$\nabla_\mu \psi^A = \partial_\mu \psi^A + \Gamma^\lambda_{\ \nu\mu}(\boldsymbol{G}^\nu_{\ \lambda})^A_{\ B}\psi^B \tag{A.13}$$

を定義すると、これはテンソルの成分である。なお、スカラー ϕ の共変微分は

$$\nabla_\mu \phi := \partial_\mu \phi \tag{A.14}$$

とすれば良い。この量は 1 形式の成分の変換則を満たす。また、スカラーに対しては上の議論で $\boldsymbol{T} = 1$ とすればよく、$\boldsymbol{G}^\nu_{\ \lambda} = 0$ となることからも明らかである。

いま、

$$T^\lambda_{\ \nu\mu} := -\Gamma^\lambda_{\ \nu\mu} + \Gamma^\lambda_{\ \mu\nu} \tag{A.15}$$

とすると、(A.12) より、これはテンソルの成分の変換則に従う。対応するテンソルが捩率である。

具体的に共変微分を求める。微小変換 $x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu$ に対して、これに対してテンソル ψ^A は、

$$\delta\psi^A = \frac{\partial \varepsilon^\lambda}{\partial x^\nu}(\boldsymbol{G}^\nu_{\ \lambda})^A_{\ B}\psi^B \tag{A.16}$$

と変換する。この時、共変微分は、

$$\nabla_\mu \psi^A = \partial_\mu \psi^A + \Gamma^\lambda_{\ \nu\mu}(\boldsymbol{G}^\nu_{\ \lambda})^A_{\ B}\psi^B$$

であった。例えば、

$$\delta A^\mu = \frac{\partial \varepsilon^\mu}{\partial x^\nu}A^\nu, \tag{A.17}$$

$$\delta A_\nu = -\frac{\partial \varepsilon^\mu}{\partial x^\nu}A_\mu \tag{A.18}$$

より、

$$\nabla_\rho A^\mu = \partial_\rho A^\mu + \Gamma^\mu_{\ \nu\rho}A^\nu, \tag{A.19}$$

$$\nabla_\rho A_\nu = \partial_\rho A_\nu - \Gamma^\mu_{\ \nu\rho}A_\mu \tag{A.20}$$

となる。一般に、

$$
\begin{aligned}
\nabla_\rho C_{\mu_1\cdots\mu_r}{}^{\nu_1\cdots\nu_s} = \partial_\rho C_{\mu_1\cdots\mu_r}{}^{\nu_1\cdots\nu_s} &- \sum_{i=1}^{r} \Gamma^\alpha{}_{\mu_i\rho} C_{\mu_1\cdots\mu_{i-1}\alpha\mu_{i+1}\cdots\mu_r}{}^{\nu_1\cdots\nu_s} \\
&+ \sum_{j=1}^{s} \Gamma^{\nu_j}{}_{\alpha\rho} C_{\mu_1\cdots\mu_r}{}^{\nu_1\cdots\nu_{j-1}\alpha\nu_{j+1}\cdots\nu_s}
\end{aligned} \tag{A.21}
$$

である。

ψ^A をテンソルの成分として、

$$
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi^A := \nabla_\mu(\nabla_\nu\psi^A) - \nabla_\nu(\nabla_\mu\psi^A) \tag{A.22}
$$

という量を考えると、

$$
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi^A = F^\alpha{}_{\beta\mu\nu}(\boldsymbol{G}^\beta{}_\alpha)^A{}_B\psi^B - T^\rho{}_{\mu\nu}\nabla_\rho\psi^A \tag{A.23}
$$

となる。ここで、

$$
F^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} := \partial_\alpha\Gamma^\mu{}_{\lambda\beta} - \partial_\beta\Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\rho\alpha}\Gamma^\rho{}_{\lambda\beta} - \Gamma^\mu{}_{\rho\beta}\Gamma^\rho{}_{\lambda\alpha} \tag{A.24}
$$

は曲率テンソルである。例えば、

$$
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]C^\lambda = F^\lambda{}_{\rho\mu\nu}T^\rho - T^\rho{}_{\mu\nu}\nabla_\rho C^\lambda, \tag{A.25}
$$

$$
[\nabla_\mu, \nabla_\nu]S_\lambda = -F^\rho{}_{\lambda\mu\nu}S_\rho - T^\rho{}_{\mu\nu}\nabla_\rho S_\lambda \tag{A.26}
$$

となる。

なお、

$$
F_{\mu\nu} := F^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} \tag{A.27}
$$

を成分とするテンソルをリッチテンソルという。スカラー曲率は、

$$
F := g^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{A.28}
$$

である。

リーマン接続は、

$$
\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad T^\rho{}_{\mu\nu} = 0 \tag{A.29}
$$

を満たすアフィン接続であり、

$$
\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} := \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \tag{A.30}
$$

となる。リーマン接続に対する $F^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}$, $F_{\mu\nu}$, F を $R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}$, $R_{\mu\nu}$, R と書く。

本文の $T^a{}_{bc}$, $F^a{}_{bcd}$, F_{ab}, $R^a{}_{bcd}$, R_{ab} はこの付録の $T^\alpha{}_{\beta\gamma}$, $F^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$, $F_{\alpha\beta}$, $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$, $R_{\alpha\beta}$ のテンソル添え字を、多脚場とその逆行列でローレンツ添え字に変換したものである。

B　遠隔平行重力理論

遠隔平行重力での運動方程式を解説する。$\omega^a{}_b$ の方程式の導出が独特である。
遠隔平行重力理論の作用は、

$$S = S_T + S_{\rm mat}, \tag{B.1}$$

$$S_T = \int L_T(\theta^a, \Theta^a), \quad S_{\rm mat} = \int L_{\rm mat}(\theta^a, \omega^{ab}; \psi^A) \tag{B.2}$$

であり、$\Omega^{ab} = 0$ である。作用の変分を、

$$\delta S_T = \int (\delta\theta^a \wedge G_a + \delta\omega^{ab} \wedge Y_{ab}), \quad G_a = \frac{\partial L_T}{\partial \theta^a} + D\frac{\partial L_T}{\partial \Theta^a}, \tag{B.3}$$

$$\delta S_{\rm mat} = \int (\delta\theta^a \wedge \mathcal{T}_a + \delta\omega^{ab} \wedge Z_{ab} + \delta\psi^A \wedge \chi_A) \tag{B.4}$$

と書く。ここで、$\delta\omega^{ab}$ は $\Omega^{ab} = 0$ を保つ必要があり、

$$\delta\omega^{ab} = -(d\xi^{ab} + \omega^a{}_c \xi^{cb} + \omega^b{}_c \xi^{ac}) \tag{B.5}$$

が一般的である。$\xi^{ab}(= -\xi^{ba})$ は微小な 0 形式である。これは ω^{ab} の微小ゲージ理論と同じ形であるが、ω^{ab} 以外は変換されない。θ^a のオイラー・ラグランジュ方程式は、

$$G_a + \mathcal{T}_a = 0 \tag{B.6}$$

である。ξ^{ab} についての変分は、

$$\delta S = \int \xi^{ab}(dX_{ab} - \omega^c{}_a \wedge X_{cb} - \omega^c{}_b \wedge X_{ac}), \quad X_{ab} := Y_{ab} + Z_{ab} \tag{B.7}$$

であるから、ω^{ab} の方程式は、

$$W_{ab} := dX_{ab} - \omega^c{}_a \wedge X_{cb} - \omega^c{}_b \wedge X_{ac} = 0 \tag{B.8}$$

である。

以下ではスピノール場はないとする。このとき $Z_{ab} = 0$ である。また、微小の局所ローレンツ変換で、

$$\Delta S_{\rm mat} = \int (\varepsilon^{ab}\theta_b \wedge \mathcal{T}_a + \Delta\psi^A \wedge \chi_A) \tag{B.9}$$

である。Δ は変分ではなく変化分を表す。$\Delta S_{\rm mat} = 0$ を仮定すると、物質場のオイラー・ラグランジュ方程式 $\chi_A = 0$ が成り立つとき、

$$\theta_{[b} \wedge \mathcal{T}_{a]} = 0 \tag{B.10}$$

である。$\mathcal{T}_a = \mathcal{T}_{ab}\eta^b$ とすると、上式は、

$$\mathcal{T}_{[ab]} = 0 \tag{B.11}$$

を意味する。

今、$G_a = G_{ab}\eta^b$ と置くと、(B.6) は、

$$G_{ab} + \mathcal{T}_{ab} = 0 \tag{B.12}$$

であるから、$\chi_A = 0$ と連立されて、

$$G_{[ab]} = 0, \quad G_{(ab)} + \mathcal{T}_{(ab)} = 0 \tag{B.13}$$

を得る[14)] 。( ) は対称化記号である。

さて、

$$G_{[ab]} \equiv 0 \tag{B.14}$$

を満たすように a_i を決める。ここで $\equiv$ は運動方程式なしに成り立つ式 (恒等式) である。このとき、a_i は (4.9) に比例する必要がある [17]。よって、スピノール場がないなら、この場合の遠隔平行重力理論は一般相対論と等価である。

スピノール場がある場合は、スピノール場の共変微分に現れる ω^{ab} が一般相対論と遠隔平行重力理論とで異なる。(3.13) より、ディラック場のラグランジアン形式には捩率は $T^{[abc]}$ の形でのみ現れる。

14) また、W_{ab} は $G_{[ab]}$ に比例する ([17], $W_{ab} = -G_{[ab]}\eta$ か？)。よって、ω^{ab} の方程式は独立ではない。

References

[1] 和田 純夫 (訳)『ファインマン講義 重力の理論』(岩波書店, 1999 年).

[2] 中嶋 慧「ファインマンの重力理論」
`http://physnakajima.html.xdomain.jp/Feynman_Gravity.pdf`

[3] 中嶋 慧「平坦時空での重力」
`http://physnakajima.html.xdomain.jp/Feynman_Gravity_2.pdf`

[4] N. Straumann, “Reflections on Gravity”, arXiv:astro-ph/0006423

[5] M Blagojevic, “Gravitation and Gauge Symmetries”, Routledge (2001).

[6] T. Ortín, “Gravity and Strings”, Cambridge University Press (2015).

[7] G. Scharf, “Gauge Field Theories: Spin One and Spin Two”, Dover Publications (2016).

[8] N. Boulanger, et. al., “Inconsistency of interacting, multi-graviton theories”, Nucl.Phys. B. **597**, 127 (2001).

[9] T. Shirafuji, “Lorentz Invariant Theory of Gravitation –Gravitational Interaction of Spin-1/2 Particles–”, Prog. Theor. Phys. **62**, 802 (1979).

[10] 中嶋 慧, 松尾 衛『一般ゲージ理論と共変解析力学』(現代数学社, 2020).

[11] R. Utiyama, “Invariant theoretical interpretation of interaction”, Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).

[12] 中野 董夫ら『素粒子の本質』(岩波書店, 1963).

[13] K. Hayashi, T. Shirafuji, “Gravity from Poincaré Gauge Theory of the Fundamental Particles. I”, Prog. Theor. Phys. **64**, 866 (1980).

[14] 林 憲二「重力とゲージ原理」
`https://www.jstage.jst.go.jp/article/soken/84/6/84_KJ00004706305/_article/-char/ja/`

[15] T. Kawai, “A $\overline{\text{Poincaré}}$ Gauge Theory of Gravity”, General relativity and gravitation **18**, 995 (1986).

[16] 『ゲージ理論の発展：誕生から半世紀を越えて』(臨時別冊数理科学 2009 年 7 月号, サイエンス社).

[17] S. Bahamonde, et. al., “Teleparallel Gravity: From Theory to Cosmology”, arXiv: 2106.13793

[18] T. Shirafuji, “New general relativity”, Phys. Rev. D **19**, 3524 (1979).

[19] "Gauge Theories Of Gravitation: A Reader With Commentaries", Imperial College Press (2013).

[20] F. Gronwald and F.W. Hehl, "On the Gauge Aspects of Gravity", arXiv:gr-qc/9602013

[21] F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke and Y. Ne'eman, "Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance", Phys. Rep. **258**, 1 (1995).

[22] "One Hundred Years of Gauge Theory: Past, Present and Future Perspectives", Springer (2020).

[23] D. Z. Freedman and A. V. Proeyen, "Supergravity", Cambridge University Press (2012).

[24] 中嶋 慧「統一場理論からゲージ理論へ」
`http://physnakajima.html.xdomain.jp/unified_gauge.pdf`

[25] 中嶋 慧「重力のラグランジアン形式」
`http://physnakajima.html.xdomain.jp/gravity_Lagrangian.pdf`

[26] Y. Kaminaga, "Poisson Bracket and Symplectic Structure of Covariant Canonical Formalism of Fields", Electron. J. Theor. Phys. **14**, 55 (2018).

[27] L. Castellani and A. D'Adda, "Covariant Hamiltonian for gravity coupled to p-forms", Phys. Rev. D **101**, 025015 (2020).

[28] S. Nakajima,"Generators of local gauge transformations in the covariant canonical formalism of fields", arXiv:1909.06779