平坦時空での重力

中嶋 慧

October 20, 2021

Contents

1　はじめに

一般相対論は曲がった時空についての理論である。計量は $g_{\mu\nu}$ で表させる[1)]。計量から作られる曲率 (リーマン接続の曲率) を $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}[g]$ とすると、一般に $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}[g] \neq 0$ である。

一方、ファインマンの重力理論 [1–6] では時空は平坦だと考える。つまり、計量を $\eta_{\mu\nu}$ とするとき、$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}[\eta] = 0$ である。適当な座標系を選べば全領域で、$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ とできる。重力場は対称 2 階テンソル $h_{\mu\nu}$ で表させる。ファインマンの理論では、重力場 $h_{\mu\nu}$ は、結果的に、

$$g_{\mu\nu} := \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

の組み合わせでのみ現れる。この $g_{\mu\nu}$ が一般相対論での計量に対応する。

ファインマンは、量子電磁力学などの場の理論は知っているが、一般相対論は知らない金星人の立場になって、重力理論を作る事を考えた。この立場を以下、「金星人の」立場と呼ぶ。

§2 では、質点の運動方程式を議論する。質点の運動方程式から、質点のエネルギー・運動量テンソルが満たすべき式 (これを (A) と呼ぶ) が分かる (§3)。

次に、重力場 $h_{\mu\nu}$ の方程式を考える。金星人は、まずは $h_{\mu\nu}$ の 2 次のラグランジアン密度を探すだろう。しかし、ラグランジアン密度が 2 次のみだと (A) と矛盾する。よって、$h_{\mu\nu}$ の 3 次のラグランジアン密度を加える必要がある。それでもまだ (A) と矛盾するので、4 次, 5 次, ... の項を加える必要があり、結局無限次まで考える必要がある。この議論は §7 で行う。また、3 次のラグランジアン密度は §7.3 と §7.4 で決定する。これは大変な計算である。

この記事では金星人の計算をする前に、いきなり正しい結果を与える (§4)。金星人が追い求めた $h_{\mu\nu}$ の無限次のラグランジアン密度は、アインシュタインのそれであることが分かる。

§5 では、「物質場」(電磁場, ゲージ場を含む) と重力場との結合を見る。

§6 では、ファインマンの重力理論についてコメントする。

§7 では、金星人の計算をする。$h_{\mu\nu}$ の 2 次のラグランジアン密度 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)}$ を求める。また、n 次のラグランジアン密度を決定する方法を述べる。3 次のラグランジアン密度 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}$ は §7.3 と §7.4 で決定する。

ところで、2 次のラグランジアン密度 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)}$ では (例えば水星の) 近日点移動の大きさを上手く説明できない。近日点移動を正しく求めるには 3 次の効果 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}$ が必要である。

§8 では、アインシュタインのラグランジアン密度を $h_{\mu\nu}$ について展開する。

この記事では、§6 以外は、計量が $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ となる座標系を採用する。

2　質点の運動方程式

2.1　設定

ミンコフスキー時空について考える。つまり、計量テンソルは、

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1) \tag{2.1}$$

であるとする。

重力場は 2 階対称テンソル $h_{\mu\nu}$ であると考える[2)]。

[1)] 符号は $(-+++)$ とする。また、ギリシャ小文字の添え字は $0, 1, 2, 3$ を表す。

[2)] ファインマンの教科書 [1] には、なぜ 2 階対称テンソルなのかの解説もあるが、この記事では省略する。

質点系と重力場の合成系の作用は以下であると仮定する:

$$S = S_{\text{particle}} + S_{\text{int}} + S_{\text{Gravity}}, \tag{2.2}$$

$$S_{\text{particle}} = \sum_a \frac{m_a}{2} \int d\lambda_a \, \Big[e_a(\lambda_a) \eta_{\mu\nu} \frac{dz_a^\mu}{d\lambda_a} \frac{dz_a^\nu}{d\lambda_a} - \frac{c^2}{e(\lambda_a)} \Big], \tag{2.3}$$

$$S_{\text{int}} = \sum_a \frac{g_a}{2} \int d\lambda_a \; e_a(\lambda_a) h_{\mu\nu}(z_a) \frac{dz_a^\mu}{d\lambda_a} \frac{dz_a^\nu}{d\lambda_a}. \tag{2.4}$$

m_a は質量で、g_a は結合定数である。e_a は補助場で、λ_a はパラメーターである[3)]。重力場の作用 S_{Gravity} は後で決定する。パラメーターの変換で e_a は 1 とできる。e_a が 1 となるパラメーターを τ_a とすると、

$$S_{\text{particle}} = \sum_a \frac{m_a}{2} \int d\tau_a \, \Big[\eta_{\mu\nu} \frac{dz_a^\mu}{d\tau_a} \frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} - c^2 \Big], \tag{2.5}$$

$$S_{\text{int}} = \sum_a \frac{g_a}{2} \int d\tau_a \; h_{\mu\nu}(z_a) \frac{dz_a^\mu}{d\tau_a} \frac{dz_a^\tau}{d\tau_a}. \tag{2.6}$$

を得る。S_{particle} の第 2 項は変分に効かないので、以下では落とし、それを $\tilde{S}_{\text{particle}}$ とする。

2.2 作用原理

質点についての作用は、

$$S_p := \tilde{S}_{\text{particle}} + S_{\text{int}} = \sum_a \frac{m_a}{2} \int d\tau_a \, \Big(\eta_{\mu\nu} + \frac{g_a}{m_a} h_{\mu\nu}(z_a) \Big) \frac{dz_a^\mu}{d\tau_a} \frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} \tag{2.7}$$

である。今、

$$g_{\mu\nu}^{(a)} := \eta_{\mu\nu} + \frac{g_a}{m_a} h_{\mu\nu} \tag{2.8}$$

とすると、

$$S_p = \sum_a \frac{m_a}{2} \int d\tau_a \; g_{\mu\nu}^{(a)}(z_a) \frac{dz_a^\mu}{d\tau_a} \frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} \tag{2.9}$$

であり、

$$\begin{aligned}
\delta S_p &= \sum_a \frac{m_a}{2} \int d\tau_a \, \Big(\delta g_{\mu\nu}^{(a)}(z_a) \frac{dz_a^\mu}{d\tau_a} \frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} + 2 g_{\mu\nu}^{(a)}(z_a) \frac{d\delta z_a^\mu}{d\tau_a} \frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} \Big) \\
&= \sum_a \frac{m_a}{2} \int d\tau_a \; \delta z_a^\lambda \Big(\partial_\lambda g_{\mu\nu}^{(a)}(z_a) \frac{dz_a^\mu}{d\tau_a} \frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} - \frac{d}{d\tau_a} \big[2 g_{\lambda\nu}^{(a)}(z_a) \frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} \big] \Big) \\
&= \sum_a \frac{m_a}{2} \int d\tau_a \; \delta z_a^\lambda \Big(\partial_\lambda g_{\mu\nu}^{(a)}(z_a) \frac{dz_a^\mu}{d\tau_a} \frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} - 2 \partial_\mu g_{\lambda\nu}^{(a)}(z_a) \frac{dz_a^\mu}{d\tau_a} \frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} - 2 g_{\lambda\nu}^{(a)}(z_a) \frac{d^2 z_a^\nu}{d\tau_a^2} \Big) \\
&= \sum_a \frac{m_a}{2} \int d\tau_a \; \delta z_a^\lambda \cdot (-2) \Big(\frac{1}{2} \big[-\partial_\lambda g_{\mu\nu}^{(a)} + \partial_\mu g_{\lambda\nu}^{(a)} + \partial_\nu g_{\lambda\mu}^{(a)} \big] \frac{dz_a^\mu}{d\tau_a} \frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} + g_{\lambda\nu}^{(a)}(z_a) \frac{d^2 z_a^\nu}{d\tau_a^2} \Big)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

3) $\lambda_a \to \lambda_a'$ で、$e_a \to e_a' = \frac{d\lambda_a'}{d\lambda_a} e_a$ である。

となる。よって、

$$g^{(a)}_{\lambda\nu}(z_a)\frac{d^2 z_a^\nu}{d\tau_a^2}+\frac{1}{2}\big[-\partial_\lambda g^{(a)}_{\mu\nu}+\partial_\mu g^{(a)}_{\lambda\nu}+\partial_\nu g^{(a)}_{\lambda\mu}\big]\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a}=0 \tag{2.11}$$

を得る。これは、

$$\Big(\eta_{\lambda\nu}+\frac{g_a}{m_a}h_{\lambda\nu}(z_a)\Big)\frac{d^2 z_a^\nu}{d\tau_a^2}+\frac{1}{2}\frac{g_a}{m_a}\big[-\partial_\lambda h_{\mu\nu}+\partial_\mu h_{\lambda\nu}+\partial_\nu h_{\lambda\mu}\big]\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a}=0 \tag{2.12}$$

である[4)] 。

ところで、等価原理より、

$$\frac{g_a}{m_a}=1 \tag{2.13}$$

である [3]。よって、

$$g_{\mu\nu}:=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu} \tag{2.14}$$

とすると、

$$g_{\lambda\nu}(z_a)\frac{d^2 z_a^\nu}{d\tau_a^2}+\frac{1}{2}\big[-\partial_\lambda g_{\mu\nu}+\partial_\mu g_{\lambda\nu}+\partial_\nu g_{\lambda\mu}\big]\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a}=0 \tag{2.15}$$

である。今、

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu}:=\frac{1}{2}\big[-\partial_\lambda g_{\mu\nu}+\partial_\mu g_{\lambda\nu}+\partial_\nu g_{\lambda\mu}\big] \tag{2.16}$$

と置くと、

$$g_{\lambda\nu}(z_a)\frac{d^2 z_a^\nu}{d\tau_a^2}+\Gamma_{\lambda\mu\nu}(z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a}=0 \tag{2.17}$$

である。

2.3 パラメーターの同定

ところで、

$$C(\tau):=g_{\mu\nu}\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau} \tag{2.18}$$

---

4) 重力場が弱いとし、$h_{\mu\nu}$ の 2 次より高次が無視できるなら、$\eta_{\lambda\nu}+\frac{g_a}{m_a}h_{\lambda\nu}(z_a)$ の逆行列は、

$$\eta^{\mu\nu}-\frac{g_a}{m_a}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}(z_a)$$

であり、(2.12) は、

$$\frac{d^2 z_a^\lambda}{d\tau_a^2}+\eta^{\lambda\sigma}\frac{1}{2}\frac{g_a}{m_a}\big[-\partial_\sigma h_{\mu\nu}+\partial_\mu h_{\sigma\nu}+\partial_\nu h_{\sigma\mu}\big]\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a}\approx 0$$

となる。

とすると、

$$\begin{aligned}\frac{dC}{d\tau} &= \partial_\lambda g_{\mu\nu}\frac{dz^\lambda}{d\tau}\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau} + 2g_{\mu\nu}\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{d^2z^\nu}{d\tau^2} \\ &= \partial_\lambda g_{\mu\nu}\frac{dz^\lambda}{d\tau}\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau} - 2\Gamma_{\mu\lambda\nu}(z_a)\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\lambda}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau} \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.19}$$

である。よって、C は定数である。τ は、

$$g_{\mu\nu}\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau} = -c^2 \tag{2.20}$$

を満たす。これは、$e(\tau)$ についてのオイラー・ラグランジュ方程式とも一致する。このとき、

$$S_{\text{particle}} + S_{\text{int}} = -\sum_a m_a c^2 \int d\tau_a \tag{2.21}$$

となる。

3　エネルギー・運動量テンソル

今、

$$\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})}(x) := \sum_a m_a \int d\tau_a\ \delta^4(x - z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} \tag{3.1}$$

とすると、

$$S_{\text{int}} = \int d^4x\ \frac{1}{2}h_{\mu\nu}(x)\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})}(x) \tag{3.2}$$

となる。$\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})}$ は質点系のエネルギー・運動量テンソルである。

ところで、

$$\begin{aligned}\partial_\nu \boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})} &= \sum_a m_a \int d\tau_a\ \partial_\nu\delta^4(x - z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} \\ &= \sum_a m_a \int d\tau_a\ (-1)\frac{d\delta^4(x - z_a)}{d\tau_a}\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a} \\ &= \sum_a m_a \int d\tau_a\ \delta^4(x - z_a)\frac{d^2z_a^\mu}{d\tau_a^2}\end{aligned} \tag{3.3}$$

であるから、

$$\begin{aligned}g_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})} &= \sum_a m_a \int d\tau_a\ \delta^4(x - z_a)g_{\lambda\mu}(z_a)\frac{d^2z_a^\mu}{d\tau_a^2} \\ &= \sum_a m_a \int d\tau_a\ \delta^4(x - z_a)\Big[-\Gamma_{\lambda\mu\nu}(z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a}\Big] \\ &= -\Gamma_{\lambda\mu\nu}(x)\sum_a m_a \int d\tau_a\ \delta^4(x - z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} \\ &= -\Gamma_{\lambda\mu\nu}(x)\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})}(x)\end{aligned} \tag{3.4}$$

となる。質点の運動方程式 (2.17) を用いた。整理すると、

$$g_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})} = -\Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})} \tag{3.5}$$

である。

質点と重力場と、ゲージ場などのその他の場との合成系のラグランジアン密度を、

$$S_{\mathrm{tot}} = S_{\mathrm{particle}} + \int d^4x\ \frac{1}{2}h_{\mu\nu}(x)\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})}(x) + S_{\mathrm{Gravity}} + S_{\mathrm{matter}} \tag{3.6}$$

とする。S_{matter} の $h_{\mu\nu}$ についての変分を、

$$\delta S_{\mathrm{matter}} = \int d^4x\ \delta h_{\mu\nu}(x)\frac{1}{2}\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{m})} \tag{3.7}$$

で定義し、

$$\boldsymbol{T}^{\mu\nu} := \boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})} + \boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{m})} \tag{3.8}$$

と置く。$\boldsymbol{T}^{\mu\nu}$ も (3.5) を満たすと仮定する：

$$g_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{T}^{\mu\nu} = -\Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{T}^{\mu\nu}. \tag{3.9}$$

4　重力場の作用

4.1　重力場の運動方程式

今、S_{Gravity} の $h_{\mu\nu}$ についての変分を、

$$\delta S_{\mathrm{Gravity}} = -\int d^4x\ \delta h_{\mu\nu}(x)\frac{1}{2\kappa}\boldsymbol{G}^{\mu\nu} \tag{4.1}$$

とすると、重力場の運動方程式は、

$$\boldsymbol{G}^{\mu\nu} = \kappa\boldsymbol{T}^{\mu\nu} \tag{4.2}$$

となる。κ は定数 (アインシュタイン定数) である。

4.2　重力場の作用の不変性

(3.9), (4.2) より、

$$g_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{G}^{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{G}^{\mu\nu} = 0 \tag{4.3}$$

が従う。

上式に ε^λ をかけて積分すると、

$$\begin{aligned}
0 &= \int d^4x \ \Big[g_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{G}^{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{G}^{\mu\nu} \Big]\varepsilon^\lambda \\
&= \int d^4x \ \Big[-\partial_\nu (g_{\lambda\mu}\varepsilon^\lambda)\boldsymbol{G}^{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{G}^{\mu\nu}\varepsilon^\lambda \Big] \\
&= \int d^4x \ \boldsymbol{G}^{\mu\nu}\frac{1}{2}\Big[-\partial_\nu g_{\lambda\mu}\varepsilon^\lambda - \partial_\mu g_{\lambda\nu}\varepsilon^\lambda + 2\Gamma_{\lambda\mu\nu}\varepsilon^\lambda - g_{\lambda\mu}\partial_\nu\varepsilon^\lambda - g_{\lambda\nu}\partial_\mu\varepsilon^\lambda \Big] \\
&= \int d^4x \ \boldsymbol{G}^{\mu\nu}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big[\partial_\lambda g_{\mu\nu}\varepsilon^\lambda + g_{\lambda\mu}\partial_\nu\varepsilon^\lambda + g_{\lambda\nu}\partial_\mu\varepsilon^\lambda \Big] \\
&\equiv \int d^4x \ \boldsymbol{G}^{\mu\nu}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\delta^{(\varepsilon)}h_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

を得る。ε^μ は無限遠で 0 になるとした。ここで、

$$\delta^{(\varepsilon)}h_{\mu\nu} := \partial_\lambda g_{\mu\nu}\varepsilon^\lambda + g_{\lambda\mu}\partial_\nu\varepsilon^\lambda + g_{\lambda\nu}\partial_\mu\varepsilon^\lambda \tag{4.5}$$

である。(4.4) は、

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \delta^{(\varepsilon)}h_{\mu\nu} \tag{4.6}$$

で S_{Gravity} が不変であることを意味する。以下では、特に、ε^μ が無限小として、上の変換で不変な作用を探す。

4.3 $h_{\mu\nu}$ の微分を含まない作用

今、

$$g := \det(g_{\mu\nu}) \tag{4.7}$$

とすると、

$$\delta g = g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{4.8}$$

である。ここで、$g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の逆行列である。よって、

$$\begin{aligned}
\delta(-g)^\alpha &= \alpha(-g)^{\alpha-1}(-g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) \\
&= \alpha(-g)^\alpha g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

である。$\delta g_{\mu\nu} = \delta^{(\varepsilon)}g_{\mu\nu} = \delta^{(\varepsilon)}h_{\mu\nu}$ として、

$$\begin{aligned}
\delta^{(\varepsilon)}(-g)^\alpha &= \alpha(-g)^\alpha g^{\mu\nu}(\partial_\lambda g_{\mu\nu}\varepsilon^\lambda + g_{\lambda\mu}\partial_\nu\varepsilon^\lambda + g_{\lambda\nu}\partial_\mu\varepsilon^\lambda) \\
&= \alpha(-g)^\alpha(g^{-1}\partial_\lambda g\varepsilon^\lambda + 2\partial_\mu\varepsilon^\mu) \\
&= \varepsilon^\mu\partial_\mu(-g)^\alpha + 2\alpha(-g)^\alpha\partial_\mu\varepsilon^\mu
\end{aligned} \tag{4.10}$$

を得る。よって、$\alpha = 1/2$ の時は、

$$\delta^{(\varepsilon)}\sqrt{-g} = \partial_\mu(\varepsilon^\mu\sqrt{-g}) \tag{4.11}$$

となる。従って、

$$S_\Lambda := -\frac{\Lambda}{\kappa}\int d^4x \ \sqrt{-g} \tag{4.12}$$

は作用の候補である。Λ は宇宙定数である。

4.4　$h_{\mu\nu}$ の 1 階微分の 2 次式からなる作用

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} &:= g^{\lambda\sigma}\Gamma_{\sigma\mu\nu}, &(4.13)\\
B^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta} &:= \partial_\alpha \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\alpha}, &(4.14)\\
A^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta} &:= \Gamma^{\mu}{}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\alpha}, &(4.15)\\
R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta} &:= A^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta} + B^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta}, &(4.16)\\
C_{\mu\nu} &:= C^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \quad (C = A, B, R), &(4.17)\\
C &:= g^{\mu\nu}C_{\mu\nu} \quad (C = A, B, R) &(4.18)
\end{aligned}
$$

と置く[5] と、

$$
\delta^{(\varepsilon)} R = \varepsilon^\mu \partial_\mu R \tag{4.19}
$$

となる [1,2](以下で示す)。よって、

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-g}R &\to \sqrt{-g}R + \partial_\mu(\varepsilon^\mu\sqrt{-g})R + \varepsilon^\mu\sqrt{-g}\partial_\mu R\\
&= \sqrt{-g}R + \partial_\mu(\varepsilon^\mu\sqrt{-g}R)
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

となる。また、

$$
\sqrt{-g}R \overset{\mathrm{w}}{=} -\sqrt{-g}A \tag{4.21}
$$

である ([7] など)。ここで、$\overset{\mathrm{w}}{=}$ は全微分項を無視する近似である。これより、

$$
S_{\mathrm{E}} := \int d^4x\, \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{E}}, \quad \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{E}} := -\frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}A \tag{4.22}
$$

は作用の候補である。これをアインシュタイン作用と言い、$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{E}}$ をアインシュタインのラグランジアン密度と言う[6]。

$\delta^{(\varepsilon)} R = \varepsilon^\mu \partial_\mu R$ の証明

さて、

$$
\begin{aligned}
\delta^{(\varepsilon)}\partial_\sigma g_{\mu\nu} = {}& \partial_\sigma g_{\mu\lambda}\partial_\nu\varepsilon^\lambda + \partial_\sigma g_{\lambda\nu}\partial_\mu\varepsilon^\lambda + g_{\mu\lambda}\partial_\sigma\partial_\nu\varepsilon^\lambda + g_{\lambda\nu}\partial_\sigma\partial_\mu\varepsilon^\lambda + \partial_\sigma\varepsilon^\lambda\partial_\lambda g_{\mu\nu}\\
&+\varepsilon^\lambda\partial_\lambda\partial_\sigma g_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

より、

$$
\delta^{(\varepsilon)}\Gamma_{\sigma\mu\nu} = \Gamma_{\sigma\mu\lambda}\partial_\nu\varepsilon^\lambda + \Gamma_{\sigma\lambda\nu}\partial_\mu\varepsilon^\lambda + \Gamma_{\lambda\mu\nu}\partial_\sigma\varepsilon^\lambda + \varepsilon^\lambda\partial_\lambda\Gamma_{\sigma\mu\nu} + g_{\sigma\lambda}\partial_\mu\partial_\nu\varepsilon^\lambda \tag{4.24}
$$

[5] $\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\big[-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu}\big]$ であった。
[6] A は一般相対論では (一般座標変換に対して) スカラーではないが、特殊相対論 (平坦時空での重力理論) では (ローレンツ変換に対して) スカラーである。

である。また、

$$\delta^{(\varepsilon)} g^{\alpha\beta} = -\partial_\nu \varepsilon^\alpha g^{\nu\beta} - \partial_\nu \varepsilon^\beta g^{\alpha\nu} - \varepsilon^\lambda g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \partial_\lambda g_{\mu\nu} \tag{4.25}$$

なので、

$$\delta^{(\varepsilon)} \Gamma^\tau{}_{\mu\nu} = \Gamma^\tau{}_{\mu\lambda} \partial_\nu \varepsilon^\lambda + \Gamma^\tau{}_{\lambda\nu} \partial_\mu \varepsilon^\lambda - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \partial_\lambda \varepsilon^\tau + \varepsilon^\lambda \partial_\lambda \Gamma^\tau{}_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu \varepsilon^\tau \tag{4.26}$$

である。
　よって、

$$\begin{aligned}
-\delta^{(\varepsilon)} B^\tau{}_{\mu\nu\rho} &= \partial_\rho \Gamma^\tau{}_{\mu\lambda} \partial_\nu \varepsilon^\lambda + \partial_\rho \Gamma^\tau{}_{\lambda\nu} \partial_\mu \varepsilon^\lambda + \varepsilon^\lambda \partial_\rho \partial_\lambda \Gamma^\tau{}_{\mu\nu} + \partial_\lambda \Gamma^\tau{}_{\mu\nu} \partial_\rho \varepsilon^\lambda \\
&\quad -\partial_\rho \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \partial_\lambda \varepsilon^\tau + \Gamma^\tau{}_{\lambda\nu} \partial_\rho \partial_\mu \varepsilon^\lambda - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda \varepsilon^\tau \\
&\quad -(\rho \longleftrightarrow \nu) \\
&= -B^\tau{}_{\mu\lambda\rho} \partial_\nu \varepsilon^\lambda - B^\tau{}_{\lambda\nu\rho} \partial_\mu \varepsilon^\lambda + B^\lambda{}_{\mu\nu\rho} \partial_\lambda \varepsilon^\tau - B^\tau{}_{\mu\nu\lambda} \partial_\rho \varepsilon^\lambda - \varepsilon^\lambda \partial_\lambda B^\tau{}_{\mu\nu\rho} \\
&\quad +[\Gamma^\tau{}_{\lambda\nu} \partial_\rho \partial_\mu \varepsilon^\lambda - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda \varepsilon^\tau - (\rho \longleftrightarrow \nu)]
\end{aligned} \tag{4.27}$$

である。
　また、

$$\begin{aligned}
\delta^{(\varepsilon)} A^\tau{}_{\mu\nu\rho} &= \delta^{(\varepsilon)} \Gamma^\tau{}_{\alpha\nu} \cdot \Gamma^\alpha{}_{\mu\rho} + \Gamma^\tau{}_{\alpha\nu} \delta^{(\varepsilon)} \Gamma^\alpha{}_{\mu\rho} - (\rho \longleftrightarrow \nu) \\
&= [\Gamma^\tau{}_{\alpha\lambda} \partial_\nu \varepsilon^\lambda + \Gamma^\tau{}_{\lambda\nu} \partial_\alpha \varepsilon^\lambda - \Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu} \partial_\lambda \varepsilon^\tau + \varepsilon^\lambda \partial_\lambda \Gamma^\tau{}_{\alpha\nu} + \partial_\alpha \partial_\nu \varepsilon^\tau] \Gamma^\alpha{}_{\mu\rho} \\
&\quad +\Gamma^\tau{}_{\alpha\nu} [\Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda} \partial_\rho \varepsilon^\lambda + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\rho} \partial_\mu \varepsilon^\lambda - \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho} \partial_\lambda \varepsilon^\alpha + \varepsilon^\lambda \partial_\lambda \Gamma^\alpha{}_{\mu\rho} + \partial_\mu \partial_\rho \varepsilon^\alpha] \\
&\quad -(\rho \longleftrightarrow \nu) \\
&= A^\tau{}_{\mu\lambda\rho} \partial_\nu \varepsilon^\lambda + A^\tau{}_{\lambda\nu\rho} \partial_\mu \varepsilon^\lambda - A^\lambda{}_{\mu\nu\rho} \partial_\lambda \varepsilon^\tau + A^\tau{}_{\mu\nu\lambda} \partial_\rho \varepsilon^\lambda + \varepsilon^\lambda \partial_\lambda A^\tau{}_{\mu\nu\rho} \\
&\quad +[\Gamma^\tau{}_{\lambda\nu} \partial_\rho \partial_\mu \varepsilon^\lambda - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda \varepsilon^\tau - (\rho \longleftrightarrow \nu)]
\end{aligned} \tag{4.28}$$

である。よって、

$$\delta^{(\varepsilon)} R^\tau{}_{\mu\nu\rho} = R^\tau{}_{\mu\lambda\rho} \partial_\nu \varepsilon^\lambda + R^\tau{}_{\lambda\nu\rho} \partial_\mu \varepsilon^\lambda - R^\lambda{}_{\mu\nu\rho} \partial_\lambda \varepsilon^\tau + R^\tau{}_{\mu\nu\lambda} \partial_\rho \varepsilon^\lambda + \varepsilon^\lambda \partial_\lambda R^\tau{}_{\mu\nu\rho} \tag{4.29}$$

を得る。
　これより、

$$\delta^{(\varepsilon)} R_{\mu\rho} = \varepsilon^\lambda \partial_\lambda R_{\mu\rho} + \partial_\nu \varepsilon^\lambda R_{\mu\lambda} + \partial_\mu \varepsilon^\lambda R_{\nu\lambda} \tag{4.30}$$

となる。よって、

$$\delta^{(\varepsilon)} R = \varepsilon^\mu \partial_\mu R \tag{4.31}$$

を得る。

4.5　アインシュタイン方程式

作用

$$
\begin{aligned}
S_{\text{Gravity}} &= S_{\text{E}} + S_{\Lambda} \\
&= \int d^4x\ \frac{1}{\kappa}\sqrt{-g}\Big(-\frac{1}{2}A - \Lambda\Big)
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

に対する $\boldsymbol{G}^{\mu\nu}$ は、

$$
\boldsymbol{G}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\Big(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu}\Big) \tag{4.33}
$$

となる ([8] または §6.2)。よって、重力場の運動方程式 (4.2) は、

$$
R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu} = \kappa\frac{\boldsymbol{T}^{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} \tag{4.34}
$$

となる。これはアインシュタイン方程式である。

5　「物質場」の作用

重力場と結合していないスカラー場 ϕ の作用は、

$$
S_{\text{Scalar,Free}} = \int d^4x\ \mathcal{L}_{\text{Scalar,Free}}, \tag{5.1}
$$

$$
\mathcal{L}_{\text{Scalar,Free}} = -\frac{1}{2}\Big(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + m^2\phi^2\Big) \tag{5.2}
$$

である。重力場としたスカラー場の作用は、

$$
S_{\text{Scalar}} = \int d^4x\ \sqrt{-g}\mathcal{L}_{\text{Scalar}}, \tag{5.3}
$$

$$
\mathcal{L}_{\text{Scalar}} = -\frac{1}{2}\Big(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + m^2\phi^2\Big) \tag{5.4}
$$

である。

$|h_{\mu\nu}| \ll 1$ とし、$h_{\mu\nu}$ の 1 次まで考えると、

$$
\sqrt{-g} \approx 1 + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}, \tag{5.5}
$$

$$
g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta} \tag{5.6}
$$

なので、

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\text{Scalar}} &\approx \mathcal{L}_{\text{Scalar,Free}} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}\mathcal{L}_{\text{Scalar,Free}} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \\
&= \mathcal{L}_{\text{Scalar,Free}} + \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\text{S})},
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

$$
\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\text{S})} = \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}_{\text{Scalar,Free}} + \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi \tag{5.8}
$$

となる。$\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{S})}$ は $\mathcal{L}_{\mathrm{Scalar,Free}}$ のエネルギー・運動量テンソルである。

重力場と結合していない電磁場 A_μ の作用は、

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{EM,Free}} &= \int d^4x \ \mathcal{L}_{\mathrm{EM,Free}}, && (5.9)\\
\mathcal{L}_{\mathrm{EM,Free}} &= -\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}, && (5.10)\\
F_{\mu\nu} &:= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu && (5.11)
\end{aligned}
$$

である。重力場としたスカラー場の作用は、

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{EM}} &= \int d^4x \ \sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathrm{EM}}, && (5.12)\\
\mathcal{L}_{\mathrm{EM}} &= -\frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} && (5.13)
\end{aligned}
$$

である。

6　コメント

6.1　光線の運動方程式

今はミンコフスキー時空を考えている。しかし、重力場がある場合は、光線はもはや直進しない。光線の運動方程式は、あるパラメーター Λ が存在し、

$$
\begin{aligned}
g_{\lambda\nu}(X)\frac{d^2X^\nu}{d\Lambda^2} + \Gamma_{\lambda\mu\nu}(X)\frac{dX^\mu}{d\Lambda}\frac{dX^\nu}{d\Lambda} &= 0, && (6.1)\\
g_{\mu\nu}(X)\frac{dX^\mu}{d\Lambda}\frac{dX^\nu}{d\Lambda} &= 0 && (6.2)
\end{aligned}
$$

となるべきである。

6.2　一般座標

一般座標では、$\eta_{\mu\nu}$ はもはや定数ではない。ただし、

$$
R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}[\eta] = 0 \tag{6.3}
$$

である。ここで、$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}[q]$ は $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ で $g_{\mu\nu}$ を $q_{\mu\nu}$ に置き換えたものである。領域 Ω で $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}[q] = 0$ であることと、Ω で $q_{\mu\nu}$ が定数となる座標系が存在することは同値である。

一般座標では、アインシュタインのラグランジアン密度において、

$$
\partial_\lambda g_{\mu\nu} \to \nabla^{(0)}_\lambda g_{\mu\nu} \tag{6.4}
$$

の置き換えをすれば良い。ここで、$\nabla^{(0)}_\lambda$ は共変微分で、その接続は $\eta_{\mu\nu}$ に対するリーマン接続である。上の置き換えで、

$$
\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \to C^\lambda{}_{\mu\nu} := \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \tag{6.5}
$$

となる。${\gamma^\lambda}_{\mu\nu}$ は $\eta_{\mu\nu}$ に対するリーマン接続である。すなわち、${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}$ を ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}[g]$ と書くと、

$$
{\gamma^\lambda}_{\mu\nu} = {\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}[\eta] \tag{6.6}
$$

である。

以下、

$$
h := \sqrt{-g}, \tag{6.7}
$$

$$
\boldsymbol{D} := hg^{\mu\nu}{C^\rho}_{\gamma\nu}{C^\gamma}_{\mu\rho}, \tag{6.8}
$$

$$
\boldsymbol{E} := hg^{\mu\nu}{C^\rho}_{\gamma\rho}{C^\gamma}_{\mu\nu} \tag{6.9}
$$

と置く。このとき、

$$
\sqrt{-g}(-A) \to \boldsymbol{G} := \boldsymbol{D} - \boldsymbol{E} \tag{6.10}
$$

である。

$\boldsymbol{G}$ の変分を取る。

まず、

$$
\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{D} &= \delta(hg^{\mu\nu}){C^\rho}_{\gamma\nu}{C^\gamma}_{\mu\rho} + 2hg^{\mu\nu}\delta{C^\rho}_{\gamma\nu}{C^\gamma}_{\mu\rho} \\
&= -\delta(hg^{\mu\nu}){C^\rho}_{\gamma\nu}{C^\gamma}_{\mu\rho} + 2\delta(hg^{\mu\nu}{C^\rho}_{\gamma\nu}){C^\gamma}_{\mu\rho}
\end{aligned} \tag{6.11}
$$

である。ここで、

$$
\partial_\lambda g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}{\Gamma^\nu}_{\alpha\lambda} - g^{\nu\alpha}{\Gamma^\mu}_{\alpha\lambda} \tag{6.12}
$$

なので、

$$
\delta\boldsymbol{D} = -\delta(hg^{\mu\nu}){C^\rho}_{\gamma\nu}{C^\gamma}_{\mu\rho} + [-\delta(\partial_\gamma g^{\mu\rho}h) - 2\delta(hg^{\mu\nu}){\gamma^\rho}_{\gamma\nu}]{C^\gamma}_{\mu\rho} \tag{6.13}
$$

となる。

また、

$$
\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{E} &= \delta(hg^{\mu\nu}C_\gamma){C^\gamma}_{\mu\nu} + hg^{\mu\nu}C_\gamma\delta{C^\gamma}_{\mu\nu} \\
&= \delta(hg^{\mu\nu}C_\gamma){C^\gamma}_{\mu\nu} + C_\gamma\delta(hg^{\mu\nu}{C^\gamma}_{\mu\nu}) - \delta(hg^{\mu\nu})C_\gamma{C^\gamma}_{\mu\nu} \\
&= \delta(g^{\mu\nu}\partial_\gamma h){C^\gamma}_{\mu\nu} - \delta(hg^{\mu\nu})\gamma_\gamma{C^\gamma}_{\mu\nu} + C_\gamma\delta(hg^{\mu\nu}{C^\gamma}_{\mu\nu}) - \delta(hg^{\mu\nu})C_\gamma{C^\gamma}_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{6.14}
$$

である。ここで、$\bullet_\gamma := {\bullet^\rho}_{\gamma\rho}(\bullet = C, \Gamma, \gamma)$ である。ところで、(6.12) より、

$$
\partial_\lambda(hg^{\mu\nu}) = h(-g^{\mu\alpha}{\Gamma^\nu}_{\alpha\lambda} - g^{\nu\alpha}{\Gamma^\mu}_{\alpha\lambda} + g^{\mu\nu}\Gamma_\lambda) \tag{6.15}
$$

である。$\lambda = \nu$ として、

$$
\partial_\nu(hg^{\mu\nu}) = -hg^{\nu\alpha}{\Gamma^\mu}_{\alpha\nu} \tag{6.16}
$$

なので、これを (6.14) の第 2 項に代入して、

$$
\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{E} &= \delta(g^{\mu\nu}\partial_\gamma h){C^\gamma}_{\mu\nu} - \delta(hg^{\mu\nu})\gamma_\gamma{C^\gamma}_{\mu\nu} - C_\gamma\delta[\partial_\beta(hg^{\gamma\beta})] \\
&\quad -C_\gamma\delta(hg^{\mu\nu}){\gamma^\gamma}_{\mu\nu} - \delta(hg^{\mu\nu})C_\gamma{C^\gamma}_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{6.17}
$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned}\delta \boldsymbol{G} = \delta(hg^{\mu\nu})C_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - \delta(hg^{\mu\nu})C^\rho{}_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\mu\rho} \\ -\delta[\partial_\gamma(g^{\mu\rho}h)]C^\gamma{}_{\mu\rho} + C_\gamma\delta[\partial_\beta(hg^{\gamma\beta})] \\ +\delta(hg^{\mu\nu})[\gamma_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} + C_\gamma\gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - 2\gamma^\rho{}_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\mu\rho}]\end{aligned} \tag{6.18}$$

である。第 2 行は、

$$\delta(g^{\mu\nu}h)[\partial_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - \partial_\nu C_\mu] + \partial_\rho \boldsymbol{F}^\rho \tag{6.19}$$

の形に書ける。よって、

$$\begin{aligned}\delta \boldsymbol{G} &= \delta(g^{\mu\nu}h)\Big([\partial_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - \partial_\nu C_\mu + C_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - C^\rho{}_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\mu\rho}] + [\gamma_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} + C_\gamma\gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - 2\gamma^\rho{}_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\mu\rho}]\Big) \\ &\quad +\partial_\rho \boldsymbol{F}^\rho \\ &= \delta(g^{\mu\nu}h)\Big([\partial_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - \partial_\nu C_\mu + C_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - C^\rho{}_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\mu\rho}] \\ &\quad +[\gamma_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} + C_\gamma\gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \gamma^\rho{}_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\mu\rho} - C^\rho{}_{\gamma\nu}\gamma^\gamma{}_{\mu\rho}]\Big) + \partial_\rho \boldsymbol{F}^\rho \\ &\equiv \delta(g^{\mu\nu}h)\mathcal{R}_{\mu\nu} + \partial_\rho \boldsymbol{F}^\rho\end{aligned} \tag{6.20}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mu\nu} &= [\partial_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - \partial_\nu C_\mu + C_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - C^\rho{}_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\mu\rho}] \\ &\quad +[\gamma_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} + C_\gamma\gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \gamma^\rho{}_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\mu\rho} - C^\rho{}_{\gamma\nu}\gamma^\gamma{}_{\mu\rho}] \\ &= \partial_\gamma\Gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma_\mu + \Gamma_\gamma\Gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu}\Gamma^\gamma{}_{\mu\rho} \\ &\quad -(\partial_\gamma\gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \partial_\nu\gamma_\mu + \gamma_\gamma\gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \gamma^\rho{}_{\gamma\nu}\gamma^\gamma{}_{\mu\rho})\end{aligned} \tag{6.21}$$

である。第 1 行目は $g_{\mu\nu}$ に対するリッチテンソル $R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu}[g]$ であり、第 2 行目は $(-1)R_{\mu\nu}[\eta] = 0$ である。また、

$$\delta(g^{\mu\nu}h) = h\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}hg^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \tag{6.22}$$

なので、

$$\delta \boldsymbol{G} = \delta g^{\mu\nu}\cdot h\Big(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\Big) + \partial_\rho \boldsymbol{F}^\rho \tag{6.23}$$

となる。

6.3 疑問

ファインマンの重力理論はミンコフスキー時空上の理論であるが、重力場があると光線も曲がる。また、最終的にはラグランジアン密度にミンコフスキー計量は登場せず、$g_{\mu\nu}$ のみが登場する。では、なぜミンコフスキー時空だと言えるのか？

また、最初に考えていた、$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ となる座標系とは何か？

6.4　変換 (4.6) の意味

一般座標でも、(4.4), (4.5), (4.6) はそのまま成り立つ。(4.5), (4.6) は、

$$\delta^{(\varepsilon)} h_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} \varepsilon^\lambda + g_{\lambda\mu} \partial_\nu \varepsilon^\lambda + g_{\lambda\nu} \partial_\mu \varepsilon^\lambda \equiv \delta^{(\varepsilon)} g_{\mu\nu}, \tag{6.24}$$

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \delta^{(\varepsilon)} h_{\mu\nu}, \tag{6.25}$$

$$\eta_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}, \tag{6.26}$$

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta^{(\varepsilon)} g_{\mu\nu} \tag{6.27}$$

である。この $g_{\mu\nu}$ の変換の式は、

$$\delta^{(\varepsilon)} g_{\mu\nu} = \bar{\delta} g_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x')\Big|_{x'=x} - g_{\mu\nu}(x), \tag{6.28}$$

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x), \tag{6.29}$$

$$x'^\mu = x^\mu - \varepsilon^\mu \tag{6.30}$$

である。$\bar{\delta} g_{\mu\nu}(x)$ はリー微分である。

7　重力場の作用：低次からの構成。金星人の計算

7.1　一般論

重力場の作用を

$$S_{\mathrm{Gravity}} = \sum_{n=2}^{\infty} S^{(n)}, \quad S^{(n)} = \int d^4x \ \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(n)} \tag{7.1}$$

と展開する。ここで、$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(n)}$ は $h_{\mu\nu}$ の n 次の項からなる。$h_{\mu\nu}$ による変分を、

$$\delta S^{(n+1)} = -\frac{1}{2}\int d^4x \ \delta h_{\mu\nu}\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)} \tag{7.2}$$

と置く。ただし、

$$\partial_\nu \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(1)} = 0 \tag{7.3}$$

を要請する。運動方程式は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)} = \boldsymbol{T}^{\mu\nu} \tag{7.4}$$

である。よって、

$$\partial_\nu \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(1)} = \partial_\nu(\boldsymbol{T}^{\mu\nu} - \sum_{n=2}^{\infty} \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)}) = 0 \tag{7.5}$$

となる。(3.9) は、

$$g_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{T}^{\mu\nu} = -\Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{T}^{\mu\nu} \tag{7.6}$$

であった。よって、

$$g_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{T}^{\mu\nu} = -\Gamma_{\lambda\mu\nu}\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)} \tag{7.7}$$

である。これと (7.5) より、

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu}\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)} + (\eta_{\lambda\mu} + h_{\lambda\mu})\sum_{n=2}^{\infty} \partial_\nu \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)} = 0 \tag{7.8}$$

を得る。よって、

$$\eta_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(2)} = -\Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(1)}, \tag{7.9}$$

$$\eta_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n+1)} = -\Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)} - h_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)} \quad (n = 2, 3, \cdots) \tag{7.10}$$

を得る。

(7.3) と (7.4) とから $\mathcal{L}^{(2)}$ が決まる。次に (7.9) から $\mathcal{L}^{(3)}$ が決まる。そして、(7.10) から $\mathcal{L}^{(4)}$, $\mathcal{L}^{(5)}, \cdots$ が決まる。

$\mathcal{L}^{(2)}$ の候補は、

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{2}\Big[a_1\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha h_{\mu\nu}\partial_\beta h^{\mu\nu} + a_2\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\sigma h^\sigma{}_\nu + a_3\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h + a_4\eta^{\mu\nu}\partial_\mu h\partial_\nu h\Big] \tag{7.11}$$

である。ここで、

$$h := h^\mu{}_\mu \tag{7.12}$$

である。$\mathcal{L}^{(3)}$ は §7.3 で考察し、§7.4 で決定する。$\mathcal{L}^{(3)}$ には素朴には 4!=24 項からなるが、8 組同じものがある。更に部分積分により、16 種類の項の間に 2 つの関係式が存在する。よって独立なのは 14 項である[7)]。明らかに $\mathcal{L}^{(3)}$ ぐらいまでが限界で、$\mathcal{L}^{(4)}$ より高次の項を求めるのは困難である。

なお、

$$\mathcal{L}^{(n)} \stackrel{\mathrm{w}}{=} \mathcal{L}_{\mathrm{E}}^{(n)} \tag{7.13}$$

となるはずである。ここで、$\mathcal{L}_{\mathrm{E}}^{(n)}$ はアインシュタインのラグランジアン密度のうち、$h_{\mu\nu}$ について n 次の部分である。

7.2　最低次のラグランジアン密度

(7.11) の a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ を決定する。

まず、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}_{(1)}^{\mu\nu} &= 2a_1\Box h^{\mu\nu} + a_2(\partial^\mu\partial_\sigma h^{\sigma\nu} + \partial^\nu\partial_\sigma h^{\sigma\mu}) \\ &\quad + a_3(\partial^\mu\partial^\nu h + \eta^{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}) + 2a_4\eta^{\mu\nu}\Box h\end{aligned} \tag{7.14}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\partial_\nu\boldsymbol{\chi}_{(1)}^{\mu\nu} &= 2a_1\Box(\partial h)^\mu + a_2(\partial^\mu(\partial\partial h) + \Box(\partial h)^\mu) \\ &\quad + a_3(\partial^\mu\Box h + \partial^\mu(\partial\partial h)) + 2a_4\partial^\mu\Box h,\end{aligned} \tag{7.15}$$

$$(\partial h)^\mu := \partial_\nu h^{\mu\nu}, \quad (\partial\partial h) := \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} \tag{7.16}$$

となる。これより、

$$2a_1 + a_2 = 0, \tag{7.17}$$

$$a_2 + a_3 = 0, \tag{7.18}$$

$$a_1 + a_4 = 0 \tag{7.19}$$

を得る。これより、

$$a_2 = -2a_1, \quad a_3 = 2a_1, \quad a_4 = -a_1 \tag{7.20}$$

---

7) ファインマン [1] によると 18 項らしい。なぜ?

と分かる：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{X}}^{\mu\nu}_{(1)} &= 2a_1\Big[\Box h^{\mu\nu} - (\partial^\mu\partial_\sigma h^{\sigma\nu} + \partial^\nu\partial_\sigma h^{\sigma\mu}) \\
&\qquad +(\partial^\mu\partial^\nu h + \eta^{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}) - \eta^{\mu\nu}\Box h\Big], \qquad (7.21) \\
\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)} &= a_1\Big[\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha h_{\mu\nu}\partial_\beta h^{\mu\nu} - \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\sigma h^\sigma{}_\nu + \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu h\partial_\nu h\Big]. \qquad (7.22)
\end{aligned}
$$

なお、

$$
a_1 = -\frac{1}{4\kappa} \qquad (7.23)
$$

である。

7.3　$h_{\mu\nu}$ の 3 次のラグランジアン密度

$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}$ を考える。今、

$$
(i_1 i_2 i_3 i_4) := h^{\mu_{i_1}}{}_{\mu_1}\partial_{\mu_2}h^{\mu_{i_2}}{}_{\mu_3}\partial^{\mu_{i_3}}h^{\mu_{i_4}}{}_{\mu_4} \qquad (7.24)
$$

とする。ここで、$i_k = 1,2,3,4$ であり、$i_k \neq i_l (k \neq l)$ である。$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}$ は、

$$
\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)} = \sum_{(i_1,i_2,i_3,i_4)\in S_4} g_{(i_1i_2i_3i_4)}(i_1i_2i_3i_4) \qquad (7.25)
$$

と 24 項で書ける。S_4 は 4 次の置換群である。ただし、

$$
(1342) = (1234)\,, \quad (3214) = (2341)\,, \quad (3412) = (2431)\,, \quad (4213) = (2143), \qquad (7.26)
$$

$$
(4123) = (3421)\,, \quad (4231) = (3142)\,, \quad (4312) = (2134)\,, \quad (4321) = (3124) \qquad (7.27)
$$

の関係があるので、16 項に減らせる。よって、一般の形は、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)} &= g_1 h\partial_\alpha h\partial^\alpha h + g_2 h\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial^\gamma h_{\alpha\beta} + g_3 h\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^\gamma{}_\alpha + g_4 h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h\partial^\beta h \\
&\quad + g_5 h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h^\delta{}_\gamma\partial^\beta h^\gamma{}_\delta + g_6 h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h^\beta{}_\delta + g_7 h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h^{\alpha\delta}\partial^\gamma h^\beta{}_\delta + g_8 h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h^{\alpha\delta}\partial_\delta h^{\beta\gamma} \\
&\quad + g_9 h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h\partial^\alpha h^{\beta\gamma} + g_{10} h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h\partial^\gamma h^{\alpha\beta} + g_{11} h(\partial h)^\alpha\partial_\alpha h + g_{12} h_{\alpha\beta}\partial^\beta h^{\alpha\gamma}(\partial h)_\gamma \\
&\quad + g_{13} h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h(\partial h)^\beta + g_{14} h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h^{\alpha\beta}(\partial h)^\gamma + g_{15} h(\partial h)_\alpha(\partial h)^\alpha + g_{16} h_{\alpha\beta}(\partial h)^\alpha(\partial h)^\beta \\
&\equiv \sum_{i=1}^{16} g_i[i] \qquad (7.28)
\end{aligned}
$$

である。ここで、

$$
(\partial h)^\alpha := \partial_\beta h^{\beta\alpha} \qquad (7.29)
$$

である。また、

$$
(\partial\partial h) := \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} \qquad (7.30)
$$

とする。以下、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(2)} &:= -2\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}}{\partial h_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}}{\partial(\partial_\lambda h_{\mu\nu})}\Big) \\ &\equiv \sum_{i=1}^{16} g_i \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[i]} \end{aligned}\tag{7.31}$$

を求め、次に

$$(\partial \boldsymbol{\chi}_{[i]})_\mu := \eta_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[i]} \tag{7.32}$$

を求める。(7.9) は、

$$\sum_{i=1}^{16} g_i(\partial \boldsymbol{\chi}_{[i]})_\mu = -\Gamma_{\mu\alpha\beta}\boldsymbol{\chi}^{\alpha\beta}_{(1)} \equiv V_\mu \tag{7.33}$$

であり、

$$\boldsymbol{\chi}^{\alpha\beta}_{(1)} = 4g\big[-\Box h^{\alpha\beta} + \partial^\alpha(\partial h)^\beta + \partial^\beta(\partial h)^\alpha - \partial^\beta\partial^\alpha h + \eta^{\alpha\beta}\Box h - \eta^{\alpha\beta}(\partial\partial h)\big], \tag{7.34}$$

$$g := \frac{1}{8\kappa} \tag{7.35}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} V_\mu/g = & -2\partial_\mu h_{\alpha\beta}\Box h^{\alpha\beta} + 4\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\alpha(\partial h)^\beta - 2\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\beta\partial^\alpha h \\ & +2\partial_\mu h\Box h - 2\partial_\mu h(\partial\partial h) \\ & +4\partial_\alpha h_{\mu\beta}\Box h^{\alpha\beta} - 4\partial_\alpha h_{\mu\beta}\partial^\alpha(\partial h)^\beta - 4\partial_\alpha h_{\mu\beta}\partial^\beta(\partial h)^\alpha + 4\partial_\alpha h_{\mu\beta}\partial^\beta\partial^\alpha h \\ & -4(\partial h)_\mu\Box h + 4(\partial h)_\mu(\partial\partial h) \end{aligned}\tag{7.36}$$

となる。この式から $\{g_i\}_{i=1}^{16}$ が決まる。

$\{[i]\}_{i=1}^{16}$ は独立ではない。今、$a\partial_\mu b\partial_\nu c$ という量を考える。a, b, c のうちに上付き添え字 μ, ν も含まれ、$a\partial_\mu b\partial_\nu c$ はスカラーとする。このとき、

$$\begin{aligned} a\partial_\mu b\partial_\nu c &\overset{\mathrm{w}}{=} -\partial_\nu(a\partial_\mu b)c \\ &= -\partial_\nu a\partial_\mu bc - a\partial_\nu\partial_\mu bc \\ &\overset{\mathrm{w}}{=} -\partial_\nu a\partial_\mu bc + \partial_\mu(ac)\partial_\nu b \\ &= -c\partial_\nu a\partial_\mu b + c\partial_\mu a\partial_\nu b + a\partial_\mu c\partial_\nu b \end{aligned}\tag{7.37}$$

より、$\{[i]\}_{i=1}^{16}$ の間に関係が付く。ただし、$a^{\mu\nu}$ が対称テンソルの時、

$$\begin{aligned} a^{\mu\nu}\partial_\mu b\partial_\nu c &\overset{\mathrm{w}}{=} -c\partial_\nu a^{\mu\nu}\partial_\mu b + c\partial_\mu a^{\mu\nu}\partial_\nu b + a^{\mu\nu}\partial_\mu c\partial_\nu b \\ &= a^{\mu\nu}\partial_\nu c\partial_\mu b \end{aligned}\tag{7.38}$$

なので、$a\partial_\mu b\partial^\mu c$ や $h^{\mu\nu}\partial_\mu b\partial_\nu c$ のタイプの項は考えなくてよい。まず、

$$\begin{aligned} [3] &= h\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^\gamma{}_\alpha \\ &\overset{\mathrm{w}}{=} -h^\gamma{}_\alpha\partial_\beta h\partial_\gamma h^{\alpha\beta} + h^\gamma{}_\alpha\partial_\gamma h\partial_\beta h^{\alpha\beta} + h\partial_\beta h^{\alpha\beta}\partial_\gamma h^\gamma{}_\alpha \\ &= -[9] + [13] + [15] \end{aligned}\tag{7.39}$$

である。また、

$$\begin{aligned}
[6] &= h_{\alpha\beta}\partial^{\alpha}h^{\gamma\delta}\partial_{\gamma}h^{\beta}{}_{\delta} \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} -h^{\beta}{}_{\delta}\partial^{\alpha}h^{\gamma\delta}\partial_{\gamma}h_{\alpha\beta} + h^{\beta}{}_{\delta}\partial_{\gamma}h^{\gamma\delta}\partial^{\alpha}h_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\partial_{\gamma}h^{\gamma\delta}\partial^{\alpha}h^{\beta}{}_{\delta} \\
&= -[8] + [16] + [12]
\end{aligned} \tag{7.40}$$

である。なお、

$$\begin{aligned}
[11] &= h\partial_{\beta}h^{\beta\alpha}\partial_{\alpha}h \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} -h\partial_{\beta}h^{\beta\alpha}\partial_{\alpha}h + h\partial_{\alpha}h^{\beta\alpha}\partial_{\beta}h + h\partial_{\alpha}h^{\beta\alpha}\partial_{\beta}h = [11]
\end{aligned} \tag{7.41}$$

および、

$$\begin{aligned}
[14] &= h_{\alpha\beta}\partial_{\gamma}h^{\alpha\beta}\partial_{\delta}h^{\delta\gamma} \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} -h^{\delta\gamma}\partial_{\gamma}h^{\alpha\beta}\partial_{\delta}h_{\alpha\beta} + h^{\delta\gamma}\partial_{\delta}h^{\alpha\beta}\partial_{\gamma}h_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\partial_{\delta}h^{\alpha\beta}\partial_{\gamma}h^{\delta\gamma} = [14]
\end{aligned} \tag{7.42}$$

である。よって、

$$[3] + [9] - [13] - [15] \overset{\mathrm{w}}{=} 0, \quad [6] + [8] - [12] - [16] \overset{\mathrm{w}}{=} 0 \tag{7.43}$$

である。これより、[15], [16] を消すこともできる。

§7.4 で $\{(\partial\boldsymbol{\chi}_{[i]})_{\mu}\}_{i=1}^{16}$ を計算し、$\{g_i\}$ に課される条件式たちを求める。その結果、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}/g \overset{\mathrm{w}}{=} &\frac{1}{2}[1] - \frac{1}{2}[2] + [3] - [4] + [5] - 4[6] + 2[7] - 2[8] + 2[9] - 2[10] \\
&-[11] + 2[13] + 2[14]
\end{aligned} \tag{7.44}$$

を得る (文献 [4–6])。

7.4 $h_{\mu\nu}$ の 3 次のラグランジアン密度：具体的な計算

$h_{\mu\nu}$ の 3 次のラグランジアン密度を決定する。

本節の参考文献は [6] である。本節には、まだミスが残っている可能性がある。

以下では、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[i]} &= A^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}(A^{\mu\nu} + A^{\nu\mu})
\end{aligned}
\tag{7.45}
$$

のような書き方をする。つまり、1 つ目の等号では μ, ν が対称化されているとは限らないが、2 つ目の等号では必ず対称化されている。また、$(\partial\partial h) = \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}$ とする。さて、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[1]} &= \eta^{\mu\nu}[-2\partial_\alpha h\partial^\alpha h + 4\partial_\alpha(h\partial^\alpha h)] \\
&= \eta^{\mu\nu}[2\partial_\alpha h\partial^\alpha h + 4h\Box h],
\end{aligned}
\tag{7.46}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[2]} &= -2\eta^{\mu\nu}\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial^\gamma h_{\alpha\beta} + 4\partial_\gamma(h\partial^\gamma h^{\mu\nu}) \\
&= -2\eta^{\mu\nu}\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial^\gamma h_{\alpha\beta} + 4\partial_\gamma h\partial^\gamma h^{\mu\nu} + 4h\Box h^{\mu\nu},
\end{aligned}
\tag{7.47}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[3]} &= -2\eta^{\mu\nu}\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^\gamma{}_\alpha + 2\partial_\gamma(h\partial^\nu h^{\gamma\mu}) + 2\partial_\beta(h\partial^\mu h^{\nu\beta}) \\
&= -2\eta^{\mu\nu}\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^\gamma{}_\alpha + 2\partial_\gamma h\partial^\nu h^{\gamma\mu} + 2\partial_\gamma h\partial^\mu h^{\gamma\nu} + 2h\partial^\mu(\partial h)^\nu + 2h\partial^\nu(\partial h)^\mu,
\end{aligned}
\tag{7.48}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[4]} &= -2\partial^\mu h\partial^\nu h + 4\eta^{\mu\nu}\partial_\alpha(h^{\alpha\beta}\partial_\beta h) \\
&= -2\partial^\mu h\partial^\nu h + 4\eta^{\mu\nu}[(\partial h)^\alpha\partial_\alpha h + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta h],
\end{aligned}
\tag{7.49}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[5]} &= -2\partial^\mu h^{\alpha\beta}\partial^\nu h_{\alpha\beta} + 4\partial_\alpha(h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^{\mu\nu}) \\
&= -2\partial^\mu h^{\alpha\beta}\partial^\nu h_{\alpha\beta} + 4(\partial h)^\alpha\partial_\alpha h^{\mu\nu} + 4h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\mu\nu},
\end{aligned}
\tag{7.50}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[6]} &= -\partial^\mu h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h^\nu{}_\delta - \partial^\nu h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h^\mu{}_\delta + 2\partial_\alpha(h^{\alpha\beta}\partial^\mu h_\beta{}^\nu) + 2\partial_\gamma(h^{\mu\alpha}\partial_\alpha h^{\gamma\nu}) \\
&= -\partial^\mu h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h^\nu{}_\delta - \partial^\nu h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h^\mu{}_\delta + (\partial h)^\alpha\partial^\mu h_\alpha{}^\nu + (\partial h)^\alpha\partial^\nu h_\alpha{}^\mu + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial^\mu h_\beta{}^\nu + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial^\nu h_\beta{}^\mu \\
&\quad +2\partial_\gamma h^{\mu\alpha}\partial_\alpha h^{\gamma\nu} + h^{\mu\alpha}\partial_\alpha(\partial h)^\nu + h^{\nu\alpha}\partial_\alpha(\partial h)^\mu,
\end{aligned}
\tag{7.51}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[7]} &= -2\partial_\gamma h^{\mu\delta}\partial^\gamma h^\nu{}_\delta + 4\partial_\gamma(h^\mu{}_\beta\partial^\gamma h^{\beta\nu}) \\
&= -2\partial_\gamma h^{\mu\delta}\partial^\gamma h^\nu{}_\delta + 4\partial_\gamma h^\mu{}_\beta\partial^\gamma h^{\beta\nu} + 2h^\mu{}_\beta\Box h^{\beta\nu} + 2h^\nu{}_\beta\Box h^{\beta\mu},
\end{aligned}
\tag{7.52}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[8]} &= -2\partial_\gamma h^{\mu\delta}\partial_\delta h^{\nu\gamma} + 4\partial_\gamma(h^\mu{}_\beta\partial^\nu h^{\beta\gamma}) \\
&= -2\partial_\gamma h^{\mu\delta}\partial_\delta h^{\nu\gamma} + 2\partial_\gamma h^\mu{}_\beta\partial^\nu h^{\beta\gamma} + 2\partial_\gamma h^\nu{}_\beta\partial^\mu h^{\beta\gamma} + 2h^\mu{}_\beta\partial^\nu(\partial h)^\beta + 2h^\nu{}_\beta\partial^\mu(\partial h)^\beta,
\end{aligned}
\tag{7.53}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[9]} &= -2(\partial_\gamma h\partial^\mu h^{\nu\gamma}) + 2\eta^{\mu\nu}\partial_\gamma(h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h^{\beta\gamma}) + 2\partial_\alpha(h^{\alpha\mu}\partial^\nu h) \\
&= -\partial_\gamma h\partial^\mu h^{\nu\gamma} - \partial_\gamma h\partial^\nu h^{\mu\gamma} + 2\eta^{\mu\nu}[\partial_\gamma h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h^{\beta\gamma} + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\partial h)_\beta] \\
&\quad +(\partial h)^\mu\partial^\nu h + (\partial h)^\nu\partial^\mu h + h^{\alpha\mu}\partial_\alpha\partial^\nu h + h^{\alpha\nu}\partial_\alpha\partial^\mu h,
\end{aligned}
\tag{7.54}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[10]} &= -2\partial_\gamma h\partial^\gamma h^{\mu\nu} + 2\eta^{\mu\nu}\partial_\gamma(h_{\alpha\beta}\partial^\gamma h^{\alpha\beta}) + 2\partial_\gamma(h^{\mu\nu}\partial^\gamma h) \\
&= 2\eta^{\mu\nu}[\partial_\gamma h_{\alpha\beta}\partial^\gamma h^{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\Box h^{\alpha\beta}] + 2h^{\mu\nu}\Box h,
\end{aligned}
\tag{7.55}
$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[11]} &= -2\eta^{\mu\nu}(\partial h)^\alpha\partial_\alpha h + 2\partial^\mu(h\partial^\nu h) + 2\eta^{\mu\nu}\partial_\alpha[h(\partial h)^\alpha] \\
&= 2\partial^\mu h\partial^\nu h + 2h\partial^\mu\partial^\nu h + 2\eta^{\mu\nu}h(\partial\partial h), && (7.56) \\
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[12]} &= -2\partial^\mu h^{\nu\gamma}(\partial h)_\gamma + 2\partial_\beta[h^{\mu\beta}(\partial h)^\nu] + 2\partial^\mu(h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^\nu{}_\alpha) \\
&= -\partial^\mu h^{\nu\gamma}(\partial h)_\gamma - \partial^\nu h^{\mu\gamma}(\partial h)_\gamma + 2(\partial h)^\mu(\partial h)^\nu + h^{\mu\beta}\partial_\beta(\partial h)^\nu + h^{\nu\beta}\partial_\beta(\partial h)^\mu \\
&\quad +\partial^\mu h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^\nu{}_\alpha + \partial^\nu h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^\mu{}_\alpha + h^{\alpha\beta}\partial_\beta\partial^\mu h^\nu{}_\alpha + h^{\alpha\beta}\partial_\beta\partial^\nu h^\mu{}_\alpha, && (7.57) \\
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[13]} &= -2\partial^\mu h(\partial h)^\nu + 2\eta^{\mu\nu}\partial_\alpha[h^{\alpha\beta}(\partial h)_\beta] + 2\partial^\mu(h^{\alpha\nu}\partial_\alpha h) \\
&= -\partial^\mu h(\partial h)^\nu - \partial^\nu h(\partial h)^\mu + 2\eta^{\mu\nu}[(\partial h)^\alpha(\partial h)_\alpha + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\partial h)_\beta] \\
&\quad +\partial^\mu h^{\alpha\nu}\partial_\alpha h + \partial^\nu h^{\alpha\mu}\partial_\alpha h + h^{\alpha\nu}\partial^\mu\partial_\alpha h + h^{\alpha\mu}\partial^\nu\partial_\alpha h, && (7.58) \\
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[14]} &= -2\partial_\gamma h^{\mu\nu}(\partial h)^\gamma + 2\partial_\gamma[h^{\mu\nu}(\partial h)^\gamma] + 2\partial^\mu(h_{\alpha\beta}\partial^\nu h^{\alpha\beta}) \\
&= 2h^{\mu\nu}(\partial\partial h) + 2\partial^\mu h_{\alpha\beta}\partial^\nu h^{\alpha\beta} + 2h_{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\nu h^{\alpha\beta}, && (7.59) \\
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[15]} &= -2\eta^{\mu\nu}(\partial h)_\alpha(\partial h)^\alpha + 4\partial^\mu[h(\partial h)^\nu] \\
&= -2\eta^{\mu\nu}(\partial h)_\alpha(\partial h)^\alpha + 2\partial^\mu h(\partial h)^\nu + 2\partial^\nu h(\partial h)^\mu + 2h\partial^\mu(\partial h)^\nu + 2h\partial^\nu(\partial h)^\mu, && (7.60) \\
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[16]} &= -2(\partial h)^\mu(\partial h)^\nu + 4\partial^\mu[h^{\nu\alpha}(\partial h)_\alpha] \\
&= -2(\partial h)^\mu(\partial h)^\nu + 2\partial^\mu h^{\nu\alpha}(\partial h)_\alpha + 2\partial^\nu h^{\mu\alpha}(\partial h)_\alpha \\
&\quad +2h^{\nu\alpha}\partial^\mu(\partial h)_\alpha + 2h^{\mu\alpha}\partial^\nu(\partial h)_\alpha && (7.61)
\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[1]})_\mu &= \partial_\mu[2\partial_\alpha h\partial^\alpha h + 4h\Box h] \\
&= 4\partial_\alpha h\partial_\mu\partial^\alpha h + 4\partial_\mu h\Box h + 4h\partial_\mu\Box h, && (7.62) \\
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[2]})_\mu &= -2\partial_\mu[\partial_\gamma h_{\alpha\beta}\partial^\gamma h^{\alpha\beta}] + 4\partial_\nu(\partial_\gamma h\partial^\gamma h_\mu{}^\nu) + 4\partial_\nu(h\Box h_\mu{}^\nu) \\
&= -4\partial_\gamma h_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial^\gamma h^{\alpha\beta} + 4\partial_\nu\partial_\gamma h\partial^\gamma h_\mu{}^\nu + 4\partial_\gamma h\partial^\gamma(\partial h)_\mu \\
&\quad +4\partial_\nu h\Box h_\mu{}^\nu + 4h\Box(\partial h)_\mu, && (7.63) \\
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[3]})_\mu &= -2\partial_\mu\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^\gamma{}_\alpha - 2\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\beta h^\gamma{}_\alpha + 2\partial_\nu\partial_\gamma h\partial^\nu h^\gamma{}_\mu + 2\partial_\gamma h\Box h^\gamma{}_\mu \\
&\quad +2\partial_\nu\partial_\gamma h\partial_\mu h^{\gamma\nu} + 2\partial_\gamma h\partial_\mu(\partial h)^\gamma + 2\partial_\nu h\partial_\mu(\partial h)^\nu + 2h\partial_\mu(\partial\partial h) \\
&\quad +2\partial_\nu h\partial^\nu(\partial h)_\mu + 2h\Box(\partial h)_\mu \\
&= -2\partial_\mu\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^\gamma{}_\alpha - 2\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\beta h^\gamma{}_\alpha + 2\partial_\nu\partial_\gamma h\partial^\nu h^\gamma{}_\mu + 2\partial_\gamma h\Box h^\gamma{}_\mu \\
&\quad +2\partial_\nu\partial_\gamma h\partial_\mu h^{\gamma\nu} + 4\partial_\gamma h\partial_\mu(\partial h)^\gamma + 2h\partial_\mu(\partial\partial h) \\
&\quad +2\partial_\nu h\partial^\nu(\partial h)_\mu + 2h\Box(\partial h)_\mu, && (7.64) \\
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[4]})_\mu &= -2\partial_\nu(\partial_\mu h\partial^\nu h) + 4\partial_\mu[(\partial h)^\alpha\partial_\alpha h + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta h] \\
&= -2\partial_\nu\partial_\mu h\partial^\nu h - 2\partial_\mu h\Box h + 4\partial_\mu(\partial h)^\alpha\partial_\alpha h + 4(\partial h)^\alpha\partial_\mu\partial_\alpha h \\
&\quad +4\partial_\mu h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta h + 4h^{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\alpha\partial_\beta h, && (7.65) \\
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[5]})_\mu &= \partial_\nu[-2\partial_\mu h^{\alpha\beta}\partial^\nu h_{\alpha\beta} + 4(\partial h)^\alpha\partial_\alpha h_\mu{}^\nu + 4h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta h_\mu{}^\nu] \\
&= -2\partial_\nu\partial_\mu h^{\alpha\beta}\partial^\nu h_{\alpha\beta} - 2\partial_\mu h^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta} + 4\partial_\nu(\partial h)^\alpha\partial_\alpha h_\mu{}^\nu + 4(\partial h)^\alpha\partial_\alpha(\partial h)_\mu \\
&\quad +4\partial_\nu h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta h_\mu{}^\nu + 4h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta(\partial h)_\mu, && (7.66)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[6]})_\mu &= -\partial_\nu\partial_\mu h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h^\nu{}_\delta - \partial_\mu h^{\gamma\delta}\partial_\gamma(\partial h)_\delta - \Box h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h_{\mu\delta} - \partial^\nu h^{\gamma\delta}\partial_\nu\partial_\gamma h_{\mu\delta} \\
&\quad +\partial_\nu(\partial h)^\alpha\partial_\mu h_\alpha{}^\nu + (\partial h)^\alpha\partial_\mu(\partial h)_\alpha + \partial_\nu(\partial h)^\alpha\partial^\nu h_{\alpha\mu} + (\partial h)^\alpha\Box h_{\alpha\mu} \\
&\quad +\partial_\nu h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\mu h_\beta{}^\nu + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\mu(\partial h)_\beta + \partial_\nu h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial^\nu h_{\beta\mu} + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Box h_{\beta\mu} \\
&\quad +2\partial_\nu\partial_\gamma h_\mu{}^\alpha\partial_\alpha h^{\gamma\nu} + 2\partial_\gamma h_\mu{}^\alpha\partial_\alpha(\partial h)^\gamma + \partial_\nu h_\mu{}^\alpha\partial_\alpha(\partial h)^\nu + h_\mu{}^\alpha\partial_\alpha(\partial\partial h) \\
&\quad +(\partial h)^\alpha\partial_\alpha(\partial h)_\mu + h^{\nu\alpha}\partial_\nu\partial_\alpha(\partial h)_\mu \\
&= -\partial_\nu\partial_\mu h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h^\nu{}_\delta - \Box h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h_{\mu\delta} - \partial^\nu h^{\gamma\delta}\partial_\nu\partial_\gamma h_{\mu\delta} \\
&\quad +(\partial h)^\alpha\partial_\mu(\partial h)_\alpha + \partial_\nu(\partial h)^\alpha\partial^\nu h_{\alpha\mu} + (\partial h)^\alpha\Box h_{\alpha\mu} \\
&\quad +\partial_\nu h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\mu h_\beta{}^\nu + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\mu(\partial h)_\beta + \partial_\nu h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial^\nu h_{\beta\mu} + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Box h_{\beta\mu} \\
&\quad +2\partial_\nu\partial_\gamma h_\mu{}^\alpha\partial_\alpha h^{\gamma\nu} + 3\partial_\gamma h_\mu{}^\alpha\partial_\alpha(\partial h)^\gamma + h_\mu{}^\alpha\partial_\alpha(\partial\partial h) \\
&\quad +h^{\nu\alpha}\partial_\nu\partial_\alpha(\partial h)_\mu, \qquad (7.67) \\
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[7]})_\mu &= -2\partial_\nu\partial_\gamma h_\mu{}^\delta\partial^\gamma h^\nu{}_\delta - 2\partial_\gamma h_\mu{}^\delta\partial^\gamma(\partial h)_\delta + 4\partial_\nu\partial_\gamma h_{\mu\beta}\partial^\gamma h^{\beta\nu} + 4\partial_\gamma h_{\mu\beta}\partial^\gamma(\partial h)^\beta \\
&\quad +2\partial_\nu h_{\mu\beta}\Box h^{\beta\nu} + 2h_{\mu\beta}\Box(\partial h)^\beta + 2(\partial h)_\beta\Box h^\beta{}_\mu + 2h^\nu{}_\beta\partial_\nu\Box h^\beta{}_\mu \\
&= -2\partial_\nu\partial_\gamma h_\mu{}^\delta\partial^\gamma h^\nu{}_\delta + 4\partial_\nu\partial_\gamma h_{\mu\beta}\partial^\gamma h^{\beta\nu} + 2\partial_\gamma h_{\mu\beta}\partial^\gamma(\partial h)^\beta \\
&\quad +2\partial_\nu h_{\mu\beta}\Box h^{\beta\nu} + 2h_{\mu\beta}\Box(\partial h)^\beta + 2(\partial h)_\beta\Box h^\beta{}_\mu + 2h^\nu{}_\beta\partial_\nu\Box h^\beta{}_\mu, \qquad (7.68) \\
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[8]})_\mu &= -2\partial_\nu\partial_\gamma h_\mu{}^\delta\partial_\delta h^{\nu\gamma} - 2\partial_\gamma h_\mu{}^\delta\partial_\delta(\partial h)^\gamma + 2\partial_\nu\partial_\gamma h_{\mu\beta}\partial^\nu h^{\beta\gamma} + 2\partial_\gamma h_{\mu\beta}\Box h^{\beta\gamma} \\
&\quad +2\partial_\gamma(\partial h)_\beta\partial_\mu h^{\beta\gamma} + 2\partial_\gamma h^\nu{}_\beta\partial_\nu\partial_\mu h^{\beta\gamma} + 2\partial_\nu h_{\mu\beta}\partial^\nu(\partial h)^\beta + 2h_{\mu\beta}\Box(\partial h)^\beta \\
&\quad +2(\partial h)_\beta\partial_\mu(\partial h)^\beta + 2h^\nu{}_\beta\partial_\nu\partial_\mu(\partial h)^\beta, \qquad (7.69) \\
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[9]})_\mu &= 2\partial_\mu\partial_\gamma h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h^{\beta\gamma} + 2\partial_\gamma h_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial^\alpha h^{\beta\gamma} + 2\partial_\mu h^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\partial h)_\beta + 2h^{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\alpha(\partial h)_\beta \\
&\quad -\partial_\nu\partial_\gamma h\partial_\mu h^{\nu\gamma} - \partial_\gamma h\partial_\mu(\partial h)^\gamma - \partial_\nu\partial_\gamma h\partial^\nu h_\mu{}^\gamma - \partial_\gamma h\Box h_\mu{}^\gamma \\
&\quad +\partial_\nu(\partial h)_\mu\partial^\nu h + (\partial h)_\mu\Box h + (\partial\partial h)\partial_\mu h + (\partial h)^\nu\partial_\nu\partial_\mu h \\
&\quad +\partial_\nu h^\alpha{}_\mu\partial_\alpha\partial^\nu h + h^\alpha{}_\mu\partial_\alpha\Box h + (\partial h)^\alpha\partial_\alpha\partial_\mu h + h^{\alpha\nu}\partial_\nu\partial_\alpha\partial_\mu h \\
&= 2\partial_\mu\partial_\gamma h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h^{\beta\gamma} + 2\partial_\gamma h_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial^\alpha h^{\beta\gamma} + 2\partial_\mu h^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\partial h)_\beta + 2h^{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\alpha(\partial h)_\beta \\
&\quad -\partial_\nu\partial_\gamma h\partial_\mu h^{\nu\gamma} - \partial_\gamma h\partial_\mu(\partial h)^\gamma - \partial_\gamma h\Box h_\mu{}^\gamma \\
&\quad +\partial_\nu(\partial h)_\mu\partial^\nu h + (\partial h)_\mu\Box h + (\partial\partial h)\partial_\mu h + 2(\partial h)^\nu\partial_\nu\partial_\mu h \\
&\quad +h^\alpha{}_\mu\partial_\alpha\Box h + h^{\alpha\nu}\partial_\nu\partial_\alpha\partial_\mu h, \qquad (7.70) \\
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[10]})_\mu &= 4\partial_\gamma h_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial^\gamma h^{\alpha\beta} + 2\partial_\mu h_{\alpha\beta}\Box h^{\alpha\beta} + 2h_{\alpha\beta}\partial_\mu\Box h^{\alpha\beta} \\
&\quad +2(\partial h)_\mu\Box h + 2h^\nu{}_\mu\partial_\nu\Box h, \qquad (7.71) \\
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[11]})_\mu &= 2\partial_\nu\partial_\mu h\partial^\nu h + 2\partial_\mu h\Box h + 2\partial_\nu h\partial_\mu\partial^\nu h + 2h\partial_\mu\Box h + 2\partial_\mu h(\partial\partial h) + 2h\partial_\mu(\partial\partial h) \\
&= 4\partial^\nu h\partial_\nu\partial_\mu h + 2\partial_\mu h\Box h + 2h\partial_\mu\Box h + 2\partial_\mu h(\partial\partial h) + 2h\partial_\mu(\partial\partial h), \qquad (7.72)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[12]})_\mu =& -\partial_\mu(\partial h)^\gamma(\partial h)_\gamma - \partial_\mu h^{\nu\gamma}\partial_\nu(\partial h)_\gamma - \Box h_\mu{}^\gamma(\partial h)_\gamma - \partial^\nu h_\mu{}^\gamma\partial_\nu(\partial h)_\gamma \\
&+2\partial_\nu(\partial h)_\mu(\partial h)^\nu + 2(\partial h)_\mu(\partial\partial h) + \partial_\nu h_\mu{}^\beta\partial_\beta(\partial h)^\nu + h_\mu{}^\beta\partial_\beta(\partial\partial h) \\
&+(\partial h)^\beta\partial_\beta(\partial h)_\mu + h^{\nu\beta}\partial_\nu\partial_\beta(\partial h)_\mu + \partial_\nu\partial_\mu h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^\nu{}_\alpha + \partial_\mu h^{\alpha\beta}\partial_\beta(\partial h)_\alpha \\
&+\Box h^{\alpha\beta}\partial_\beta h_{\mu\alpha} + \partial^\nu h^{\alpha\beta}\partial_\nu\partial_\beta h_{\mu\alpha} + \partial_\nu h^{\alpha\beta}\partial_\beta\partial_\mu h^\nu{}_\alpha + h^{\alpha\beta}\partial_\beta\partial_\mu(\partial h)_\alpha \\
&+\partial_\nu h^{\alpha\beta}\partial_\beta\partial^\nu h_{\mu\alpha} + h^{\alpha\beta}\partial_\beta\Box h_{\mu\alpha} \\
=& -\partial_\mu(\partial h)^\gamma(\partial h)_\gamma - \Box h_\mu{}^\gamma(\partial h)_\gamma - \partial^\nu h_\mu{}^\gamma\partial_\nu(\partial h)_\gamma \\
&+3\partial_\nu(\partial h)_\mu(\partial h)^\nu + 2(\partial h)_\mu(\partial\partial h) + \partial_\nu h_\mu{}^\beta\partial_\beta(\partial h)^\nu + h_\mu{}^\beta\partial_\beta(\partial\partial h) \\
&+h^{\nu\beta}\partial_\nu\partial_\beta(\partial h)_\mu + 2\partial_\nu\partial_\mu h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^\nu{}_\alpha \\
&+\Box h^{\alpha\beta}\partial_\beta h_{\mu\alpha} + 2\partial^\nu h^{\alpha\beta}\partial_\nu\partial_\beta h_{\mu\alpha} + h^{\alpha\beta}\partial_\beta\partial_\mu(\partial h)_\alpha \\
&+h^{\alpha\beta}\partial_\beta\Box h_{\mu\alpha},
\end{aligned} \tag{7.73}
$$

$$
\begin{aligned}
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[13]})_\mu =& \, 4(\partial h)^\alpha\partial_\mu(\partial h)_\alpha + 2\partial_\mu h^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\partial h)_\beta + 2h^{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\alpha(\partial h)_\beta \\
&-\partial_\nu\partial_\mu h(\partial h)^\nu - \partial_\mu h(\partial\partial h) - \Box h(\partial h)_\mu - \partial^\nu h\partial_\nu(\partial h)_\mu \\
&+\partial_\mu(\partial h)^\alpha\partial_\alpha h + \partial_\mu h^{\alpha\nu}\partial_\nu\partial_\alpha h + \Box h^\alpha{}_\mu\partial_\alpha h + \partial^\nu h^\alpha{}_\mu\partial_\nu\partial_\alpha h \\
&+(\partial h)^\alpha\partial_\mu\partial_\alpha h + h^{\alpha\nu}\partial_\nu\partial_\mu\partial_\alpha h + \partial_\nu h^\alpha{}_\mu\partial^\nu\partial_\alpha h + h^\alpha{}_\mu\Box\partial_\alpha h \\
=& \, 4(\partial h)^\alpha\partial_\mu(\partial h)_\alpha + 2\partial_\mu h^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\partial h)_\beta + 2h^{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\alpha(\partial h)_\beta \\
&-\partial_\nu\partial_\mu h(\partial h)^\nu - \partial_\mu h(\partial\partial h) - \Box h(\partial h)_\mu - \partial^\nu h\partial_\nu(\partial h)_\mu \\
&+\partial_\mu(\partial h)^\alpha\partial_\alpha h + \partial_\mu h^{\alpha\nu}\partial_\nu\partial_\alpha h + \Box h^\alpha{}_\mu\partial_\alpha h + 2\partial^\nu h^\alpha{}_\mu\partial_\nu\partial_\alpha h \\
&+(\partial h)^\alpha\partial_\mu\partial_\alpha h + h^{\alpha\nu}\partial_\nu\partial_\mu\partial_\alpha h + h^\alpha{}_\mu\Box\partial_\alpha h,
\end{aligned} \tag{7.74}
$$

$$
\begin{aligned}
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[14]})_\mu =& \, 2(\partial h)_\mu(\partial\partial h) + 2h_\mu{}^\nu\partial_\nu(\partial\partial h) + 2\partial_\nu\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\nu h^{\alpha\beta} + 2\partial_\mu h_{\alpha\beta}\Box h^{\alpha\beta} \\
&+2\partial_\nu h_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial^\nu h^{\alpha\beta} + 2h_{\alpha\beta}\partial_\mu\Box h^{\alpha\beta} \\
=& \, 2(\partial h)_\mu(\partial\partial h) + 2h_\mu{}^\nu\partial_\nu(\partial\partial h) + 4\partial^\nu h^{\alpha\beta}\partial_\nu\partial_\mu h_{\alpha\beta} + 2\partial_\mu h_{\alpha\beta}\Box h^{\alpha\beta} \\
&+2h_{\alpha\beta}\partial_\mu\Box h^{\alpha\beta},
\end{aligned} \tag{7.75}
$$

$$
\begin{aligned}
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[15]})_\mu =& -4(\partial h)_\alpha\partial_\mu(\partial h)^\alpha + 2\partial_\nu\partial_\mu h(\partial h)^\nu + 2\partial_\mu h(\partial\partial h) \\
&+2\Box h(\partial h)_\mu + 2\partial^\nu h\partial_\nu(\partial h)_\mu + 2\partial_\nu h\partial_\mu(\partial h)^\nu + 2h\partial_\mu(\partial\partial h) \\
&+2\partial_\nu h\partial^\nu(\partial h)_\mu + 2h\Box(\partial h)_\mu \\
=& -4(\partial h)_\alpha\partial_\mu(\partial h)^\alpha + 2\partial_\nu\partial_\mu h(\partial h)^\nu + 2\partial_\mu h(\partial\partial h) \\
&+2\Box h(\partial h)_\mu + 4\partial^\nu h\partial_\nu(\partial h)_\mu + 2\partial_\nu h\partial_\mu(\partial h)^\nu + 2h\partial_\mu(\partial\partial h) \\
&+2h\Box(\partial h)_\mu,
\end{aligned} \tag{7.76}
$$

$$
\begin{aligned}
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[16]})_\mu =& -2\partial_\nu(\partial h)_\mu(\partial h)^\nu - 2(\partial h)_\mu(\partial\partial h) + 2\partial_\mu(\partial h)^\alpha(\partial h)_\alpha + 2\partial_\mu h^{\nu\alpha}\partial_\nu(\partial h)_\alpha \\
&+2\Box h_\mu{}^\alpha(\partial h)_\alpha + 2\partial^\nu h_\mu{}^\alpha\partial_\nu(\partial h)_\alpha + 2(\partial h)^\alpha\partial_\mu(\partial h)_\alpha + 2h^{\nu\alpha}\partial_\nu\partial_\mu(\partial h)_\alpha \\
&+2\partial_\nu h_\mu{}^\alpha\partial^\nu(\partial h)_\alpha + 2h_\mu{}^\alpha\Box(\partial h)_\alpha \\
=& -2\partial_\nu(\partial h)_\mu(\partial h)^\nu - 2(\partial h)_\mu(\partial\partial h) + 2\partial_\mu h^{\nu\alpha}\partial_\nu(\partial h)_\alpha \\
&+2\Box h_\mu{}^\alpha(\partial h)_\alpha + 4\partial^\nu h_\mu{}^\alpha\partial_\nu(\partial h)_\alpha + 4(\partial h)^\alpha\partial_\mu(\partial h)_\alpha + 2h^{\nu\alpha}\partial_\nu\partial_\mu(\partial h)_\alpha \\
&+2h_\mu{}^\alpha\Box(\partial h)_\alpha
\end{aligned} \tag{7.77}
$$

である。
$\bullet$ を項とし、

$$\sum_{i=1}^{16} g_i(\partial\boldsymbol{\chi}_{[i]})_\mu = \sum_{\bullet} C(\bullet)\bullet \tag{7.78}$$

と置く。$C(\bullet)$ は係数である。34 種類の項があるが、そのうち 20 種類について係数を調べてみる：

$$\begin{aligned}
C(\partial_\mu h_{\alpha\beta}\Box h^{\alpha\beta}) &= -2g_5 + 2g_{10} + 2g_{14} = -2g, && (7.79)\\
C(h_{\alpha\beta}\partial_\mu\Box h^{\alpha\beta}) &= 2g_{10} + 2g_{14} = 0, && (7.80)\\
C(\partial_\mu h\Box h) &= 4g_1 - 2g_4 + 2g_{11} = 2g, && (7.81)\\
C(h\partial_\mu\Box h) &= 4g_1 + 2g_{11} = 0, && (7.82)\\
C((\partial h)_\mu\Box h) &= g_9 + 2g_{10} - g_{13} + 2g_{15} = -4g, && (7.83)\\
C(\partial_\alpha h_{\mu\beta}\Box h^{\alpha\beta}) &= -g_6 + 2g_7 + 2g_8 + g_{12} = 4g, && (7.84)\\
C(\partial_\alpha h\Box h^\alpha{}_\mu) &= 4g_2 + 2g_3 - g_9 + g_{13} = 0, && (7.85)\\
C(h\Box(\partial h)_\mu) &= 4g_2 + 2g_3 + 2g_{15} = 0, && (7.86)\\
C((\partial h)_\mu(\partial\partial h)) &= 2g_{12} + 2g_{14} - 2g_{16} = 4g, && (7.87)\\
C(\partial_\mu h(\partial\partial h)) &= g_9 + 2g_{11} - g_{13} + 2g_{15} = -2g, && (7.88)\\
C(\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\alpha(\partial h)^\beta) &= 2g_8 + 2g_9 + 2g_{13} + 2g_{16} = 4g, && (7.89)\\
C(\partial_\alpha h_{\mu\beta}\partial^\alpha(\partial h)^\beta) &= g_6 + 2g_7 + 2g_8 - g_{12} + 4g_{16} = -4g, && (7.90)\\
C(\partial_\beta h_{\mu\alpha}\partial^\alpha(\partial h)^\beta) &= 4g_5 + 3g_6 - 2g_8 + g_{12} = -4g, && (7.91)\\
C((\partial h)^\alpha\partial_\mu(\partial h)_\alpha) &= g_6 + 2g_8 - g_{12} + 4g_{13} - 4g_{15} + 4g_{16} = 0, && (7.92)\\
C(h\partial_\mu(\partial\partial h)) &= 2g_3 + 2g_{11} + 2g_{15} = 0, && (7.93)\\
C(\partial_\mu h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta h) &= 2g_3 + 4g_4 - g_9 + g_{13} = -2g, && (7.94)\\
C(\partial^\alpha h^\beta{}_\mu\partial_\alpha\partial_\beta h) &= 4g_2 + 2g_3 + 2g_{13} = 4g, && (7.95)\\
C(\partial_\alpha h\partial^\alpha\partial_\mu h) &= 4g_1 - 2g_4 + 4g_{11} = 0, && (7.96)\\
C(\partial^\alpha h\partial_\alpha(\partial h)_\mu) &= 4g_2 + 2g_3 + g_9 - g_{13} + 4g_{15} = 0, && (7.97)\\
C(h^{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\alpha\partial_\beta h) &= 4g_4 + g_9 + g_{13} = 0. && (7.98)
\end{aligned}$$

アインシュタイン作用から求めたラグランジアン密度 (8.64) は、これらを全て満たす。
金星人の立場では、上の連立方程式を解く必要があるが、この記事ではその作業は省略する。

8　アインシュタイン作用の展開

$$G := g^{\mu\nu}\Big[\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} - \Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}\Big] = -A, \tag{8.1}$$
$$S := \sqrt{-g} \tag{8.2}$$

と置く。$\mathcal{L}_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2\kappa}SG$ である。

　$h_{\mu\nu}$ について展開することを考える。今、

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}_{(1)} + g^{\mu\nu}_{(2)} + \cdots \tag{8.3}$$

とする[8)]と、

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = {}^{(1)}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + {}^{(2)}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + {}^{(3)}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \cdots, \tag{8.4}$$
$${}^{(1)}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \eta^{\lambda\sigma}\Gamma_{\sigma\mu\nu}, \tag{8.5}$$
$${}^{(2)}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma}_{(1)}\Gamma_{\sigma\mu\nu}, \tag{8.6}$$
$${}^{(3)}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma}_{(2)}\Gamma_{\sigma\mu\nu} \tag{8.7}$$

となる。

　よく知られた公式

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}BA^{-1} + A^{-1}BA^{-1}BA^{-1} - \cdots \tag{8.8}$$

より、

$$g^{\mu\nu}_{(1)} = -h^{\mu\nu}, \tag{8.9}$$
$$g^{\mu\nu}_{(2)} = h^{\mu}{}_{\rho}h^{\rho\nu} \tag{8.10}$$

である。$h_{\mu\nu}$ の添え字は $\eta^{\mu\nu}$ で上げた。

　また、

$$\det(A) = \exp \mathrm{Tr} \ln A, \tag{8.11}$$

$$\begin{aligned}
\det(A+B) &= \det(A)\det(1 + A^{-1}B) \\
&= \det(A)\exp\mathrm{Tr}\ln(1+A^{-1}B) \\
&= \det(A)\exp\mathrm{Tr}[A^{-1}B - \frac{1}{2}A^{-1}BA^{-1}B + \cdots] \\
&= \det(A)\Big(1 + \mathrm{Tr}[A^{-1}B] - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[A^{-1}BA^{-1}B] + \frac{1}{2}\big(\mathrm{Tr}[A^{-1}B]\big)^2 + \cdots\Big)
\end{aligned} \tag{8.12}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
\sqrt{-\det(A+B)} &= \sqrt{-\det(A)}\Big(1 + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[A^{-1}B] - \frac{1}{4}\mathrm{Tr}[A^{-1}BA^{-1}B] \\
&\qquad + \big(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\big)\big(\mathrm{Tr}[A^{-1}B]\big)^2 + \cdots\Big) \\
&= \sqrt{-\det(A)}\Big(1 + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[A^{-1}B] \\
&\qquad + \frac{1}{8}\big\{\big(\mathrm{Tr}[A^{-1}B]\big)^2 - 2\mathrm{Tr}[A^{-1}BA^{-1}B]\big\} + \cdots\Big)
\end{aligned} \tag{8.13}$$

[8)] (n) は $h_{\mu\nu}$ の n 次であることを表す。

となり、

$$S = 1 + S^{(1)} + S^{(2)} + \cdots \tag{8.14}$$

と展開すると、

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= \frac{1}{2}h^{\mu}{}_{\mu} = \frac{1}{2}h, &(8.15)\\ S^{(2)} &= \frac{1}{8}\Big(h^2 - 2h^{\mu}{}_{\nu}h^{\nu}{}_{\mu}\Big) &(8.16)\end{aligned}$$

となる。

今、

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{E}} = \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{E}}^{(2)} + \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{E}}^{(3)} + \cdots \tag{8.17}$$

と展開すると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{E}}^{(2)} &= \frac{1}{2\kappa}G^{(2)}, &(8.18)\\ 2\kappa\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{E}}^{(3)} &= G^{(3)} + S^{(1)}G^{(2)} \\ &= G^{(3)} + \frac{1}{2}hG^{(2)} &(8.19)\end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} G^{(3)} &= G^{(3a)} + G^{(3b)}, &(8.20)\\ G^{(3a)} &:= \eta^{\mu\nu}\Big[{}^{(2)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}{}^{(1)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} + {}^{(1)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}{}^{(2)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} - {}^{(2)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}{}^{(1)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu} - {}^{(1)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}{}^{(2)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}\Big], &(8.21)\\ G^{(3b)} &:= -h^{\mu\nu}\Big[{}^{(1)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}{}^{(1)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} - {}^{(1)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}{}^{(1)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}\Big] &(8.22)\end{aligned}$$

である。また、

アインシュタインのラグランジアン密度を $h_{\mu\nu}$ の 3 次まで展開する。

(8.19), (8.21), (8.22), (7.13) より、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)} &\overset{\mathrm{w}}{=} \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{E}}^{(3)}, &(8.23)\\ \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{E}}^{(3)}/g &= 4G^{(3)} + 2hG^{(2)} = \sum_{k=1}^{7}\tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_k, &(8.24)\\ G^{(3)} &= G^{(3a)} + G^{(3b)}, &(8.25)\\ 4G^{(3a)} &= 4\eta^{\mu\nu}\Big[{}^{(2)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}{}^{(1)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} + {}^{(1)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}{}^{(2)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} - {}^{(2)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}{}^{(1)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu} - {}^{(1)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}{}^{(2)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}\Big] \\ &\equiv \tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_1 + \tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_2 + \tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_3 + \tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_4, &(8.26)\\ 4G^{(3b)} &= -4h^{\mu\nu}\Big[{}^{(1)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}{}^{(1)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} - {}^{(1)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}{}^{(1)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}\Big] \\ &\equiv \tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_5 + \tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_6, &(8.27)\\ \tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_7 &:= 2hG^{(2)} &(8.28)\end{aligned}$$

である。$g=1/(8\kappa)$ である。今、$a^{\mu\nu}, b^{\mu\nu}, c^{\mu\nu}$ を対称テンソルとし、

$$G_1(a,b,c) := 4a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\Gamma_{\sigma\gamma\nu}\Gamma_{\lambda\mu\rho}, \tag{8.29}$$
$$G_2(a,b,c) := 4a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\Gamma_{\sigma\gamma\rho}\Gamma_{\lambda\mu\nu} \tag{8.30}$$

とすると、

$$\tilde{\mathcal{L}}_1 = -G_1(\eta,h,\eta), \tag{8.31}$$
$$\tilde{\mathcal{L}}_2 = -G_1(\eta,\eta,h), \tag{8.32}$$
$$\tilde{\mathcal{L}}_5 = -G_1(h,\eta,\eta), \tag{8.33}$$
$$\tilde{\mathcal{L}}_3 = G_2(\eta,h,\eta), \tag{8.34}$$
$$\tilde{\mathcal{L}}_4 = G_2(\eta,\eta,h), \tag{8.35}$$
$$\tilde{\mathcal{L}}_6 = G_2(h,\eta,\eta), \tag{8.36}$$
$$\tilde{\mathcal{L}}_7 = \frac{1}{2}h[G_1(\eta,\eta,\eta)-G_2(\eta,\eta,\eta)] \tag{8.37}$$

となる。

まず $G_1(a,b,c), G_2(a,b,c)$ を求める。定義より、

$$G_1(a,b,c) = a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}[\partial_\gamma h_{\sigma\nu}+\partial_\nu h_{\sigma\gamma}-\partial_\sigma h_{\gamma\nu}][\partial_\mu h_{\lambda\rho}+\partial_\rho h_{\lambda\mu}-\partial_\lambda h_{\mu\rho}], \tag{8.38}$$
$$\begin{aligned}G_2(a,b,c) &= a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}[\partial_\gamma h_{\sigma\rho}+\partial_\rho h_{\sigma\gamma}-\partial_\sigma h_{\gamma\rho}][\partial_\mu h_{\lambda\nu}+\partial_\nu h_{\lambda\mu}-\partial_\lambda h_{\mu\nu}]\\ &= a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\gamma h_{\sigma\rho}[2\partial_\mu h_{\lambda\nu}-\partial_\lambda h_{\mu\nu}]\end{aligned} \tag{8.39}$$

である。さらに展開すると、

$$\begin{aligned}G_1(a,b,c) = {}& a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\gamma h_{\sigma\nu}\partial_\mu h_{\lambda\rho}+a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\gamma h_{\sigma\nu}\partial_\rho h_{\lambda\mu}-a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\gamma h_{\sigma\nu}\partial_\lambda h_{\mu\rho}\\ &+a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\nu h_{\sigma\gamma}\partial_\mu h_{\lambda\rho}+a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\nu h_{\sigma\gamma}\partial_\rho h_{\lambda\mu}-a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\nu h_{\sigma\gamma}\partial_\lambda h_{\mu\rho}\\ &-a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\sigma h_{\gamma\nu}\partial_\mu h_{\lambda\rho}-a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\sigma h_{\gamma\nu}\partial_\rho h_{\lambda\mu}+a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\sigma h_{\gamma\nu}\partial_\lambda h_{\mu\rho},\end{aligned} \tag{8.40}$$
$$G_2(a,b,c) = 2a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\gamma h_{\sigma\rho}\partial_\mu h_{\lambda\nu}-a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\gamma h_{\sigma\rho}\partial_\lambda h_{\mu\nu} \tag{8.41}$$

である。

よって、

$$\begin{aligned}G_1(\eta,\eta,\eta) &= \partial_\gamma h_\sigma{}^\mu\partial_\mu h^{\gamma\sigma}+\partial_\gamma h_{\sigma\mu}\partial^\sigma h^{\gamma\mu}-\partial_\gamma h_{\sigma\mu}\partial^\gamma h^{\mu\sigma}\\ &\quad+\partial^\mu h_{\sigma\gamma}\partial_\mu h^{\gamma\sigma}+\partial^\mu h_{\sigma\gamma}\partial^\sigma h^\gamma{}_\mu-\partial^\mu h_{\sigma\gamma}\partial^\gamma h_{\mu\sigma}\\ &\quad-\partial^\sigma h^{\gamma\mu}\partial_\mu h_{\gamma\sigma}-\partial_\sigma h_{\gamma\mu}\partial^\sigma h^{\gamma\mu}+\partial_\sigma h_{\gamma\mu}\partial^\gamma h^{\mu\sigma}\\ &= (2')+(2')-(1)+(1)+(2')-(2')-(2')-(1)+(2')\\ &= 2(2')-(1)\end{aligned} \tag{8.42}$$

となる。ここで、

$$(1) := \partial_\alpha h_{\mu\nu}\partial^\alpha h^{\mu\nu}, \tag{8.43}$$
$$(2) := \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\sigma h^\sigma{}_\nu \overset{\mathrm{w}}{=} (2'), \tag{8.44}$$
$$(3) := \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h, \tag{8.45}$$
$$(4) := \partial_\mu h\partial^\mu h, \tag{8.46}$$
$$(2') := \partial_\sigma h_\mu{}^\nu\partial_\nu h^{\mu\sigma} \tag{8.47}$$

である。また、

$$
\begin{aligned}
G_2(\eta,\eta,\eta) &= 2\partial_\gamma h\partial_\mu h^{\gamma\mu} - \partial_\gamma h\partial^\gamma h \\
&= 2(3) - (4)
\end{aligned}
\tag{8.48}
$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
G^{(2)} &= \frac{1}{4}[G_1(\eta,\eta,\eta) - G_2(\eta,\eta,\eta)] \\
&= \frac{1}{4}[-(1) + 2(2') - 2(3) + (4)]
\end{aligned}
\tag{8.49}
$$

となる。
　また、

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_7 &= h[-\frac{1}{2}(1) + (2') - (3) + \frac{1}{2}(4)] \\
&= -\frac{1}{2}[2] + [3] - [11] + \frac{1}{2}[1]
\end{aligned}
\tag{8.50}
$$

である。
　また、

$$
\begin{aligned}
G_1(\eta,h,\eta) &= h^{\rho\sigma}\partial^\lambda h_{\sigma\mu}\partial^\mu h_{\lambda\rho} + h^{\rho\sigma}\partial_\gamma h_{\sigma\mu}\partial_\rho h^{\gamma\mu} - h^{\rho\sigma}\partial_\gamma h_\sigma{}^\mu\partial^\gamma h_{\mu\rho} \\
&\quad + h^{\rho\sigma}\partial^\mu h_{\sigma\gamma}\partial_\mu h^\gamma{}_\rho + h^{\rho\sigma}\partial_\mu h_{\sigma\gamma}\partial_\rho h^{\gamma\mu} - h^{\rho\sigma}\partial^\mu h_{\sigma\gamma}\partial^\gamma h_{\mu\rho} \\
&\quad - h^{\rho\sigma}\partial_\sigma h^{\gamma\mu}\partial_\mu h_{\gamma\rho} - h^{\rho\sigma}\partial_\sigma h_{\gamma\mu}\partial_\rho h^{\gamma\mu} + h^{\rho\sigma}\partial_\sigma h^{\gamma\mu}\partial_\gamma h_{\mu\rho} \\
&= [8] + [6] - [7] + [7] + [6] - [8] - [6] - [5] + [6] \\
&= -[5] + 2[6]
\end{aligned}
\tag{8.51}
$$

および、

$$
\begin{aligned}
G_2(\eta,h,\eta) &= 2h^{\rho\sigma}\partial_\gamma h_{\sigma\rho}(\partial h)^\gamma - h^{\rho\sigma}\partial_\gamma h_{\sigma\rho}\partial^\gamma h \\
&= 2[14] - [10]
\end{aligned}
\tag{8.52}
$$

である。また、

$$
\begin{aligned}
G_1(\eta,\eta,h) &= h^{\gamma\lambda}\partial_\gamma h^{\sigma\mu}\partial_\mu h_{\lambda\sigma} + h^{\gamma\lambda}\partial_\gamma h^{\sigma\mu}\partial_\sigma h_{\lambda\mu} - h^{\gamma\lambda}\partial_\gamma h^{\sigma\mu}\partial_\lambda h_{\mu\sigma} \\
&\quad + h^{\gamma\lambda}\partial^\mu h^\sigma{}_\gamma\partial_\mu h_{\lambda\sigma} + h^{\gamma\lambda}\partial^\mu h_{\sigma\gamma}\partial^\sigma h_{\lambda\mu} - h^{\gamma\lambda}\partial_\mu h_{\sigma\gamma}\partial_\lambda h^{\mu\sigma} \\
&\quad - h^{\gamma\lambda}\partial^\sigma h_{\gamma\mu}\partial^\mu h_{\lambda\sigma} - h^{\gamma\lambda}\partial_\sigma h_{\gamma\mu}\partial^\sigma h_\lambda{}^\mu + h^{\gamma\lambda}\partial_\sigma h_{\gamma\mu}\partial_\lambda h^{\mu\sigma} \\
&= [6] + [6] - [5] + [7] + [8] - [6] - [8] - [7] + [6] \\
&= -[5] + 2[6]
\end{aligned}
\tag{8.53}
$$

および、

$$
\begin{aligned}
G_2(\eta,\eta,h) &= 2h^{\gamma\lambda}\partial_\gamma h(\partial h)_\lambda - h^{\gamma\lambda}\partial_\gamma h\partial_\lambda h \\
&= 2[13] - [4]
\end{aligned}
\tag{8.54}
$$

となる。また、

$$
\begin{aligned}
G_1(\eta,\eta,h) &= h^{\mu\nu}\partial_\gamma h_{\sigma\nu}\partial_\mu h^{\gamma\sigma} + h^{\mu\nu}\partial^\gamma h_{\sigma\nu}\partial^\sigma h_{\gamma\mu} - h^{\mu\nu}\partial_\gamma h_{\sigma\nu}\partial^\gamma h_\mu{}^\sigma \\
&\quad + h^{\mu\nu}\partial_\nu h_{\sigma\gamma}\partial_\mu h^{\gamma\sigma} + h^{\mu\nu}\partial_\nu h^{\sigma\gamma}\partial_\sigma h_{\gamma\mu} - h^{\mu\nu}\partial_\nu h^{\sigma\gamma}\partial_\gamma h_{\mu\sigma} \\
&\quad - h^{\mu\nu}\partial_\sigma h_{\gamma\nu}\partial_\mu h^{\gamma\sigma} - h^{\mu\nu}\partial_\sigma h_{\gamma\nu}\partial^\sigma h^\gamma{}_\mu + h^{\mu\nu}\partial^\sigma h_{\gamma\nu}\partial^\gamma h_{\mu\sigma} \\
&= [6]+[8]-[7]+[5]+[6]-[6]-[6]-[7]+[8] \\
&= [5]-2[7]+2[8] \qquad (8.55)
\end{aligned}
$$

および、

$$
\begin{aligned}
G_2(\eta,\eta,h) &= 2h^{\mu\nu}\partial^\gamma h\partial_\mu h_{\gamma\nu} - h^{\mu\nu}\partial^\gamma h\partial_\gamma h_{\mu\nu} \\
&= 2[9]-[10] \qquad (8.56)
\end{aligned}
$$

となる。よって、

$$\tilde{\mathcal{L}}_1 = [5]-2[6], \qquad (8.57)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_2 = [5]-2[6], \qquad (8.58)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_5 = -[5]+2[7]-2[8], \qquad (8.59)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_3 = 2[14]-[10], \qquad (8.60)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_4 = 2[13]-[4], \qquad (8.61)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_6 = 2[9]-[10], \qquad (8.62)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_7 = -\frac{1}{2}[2]+[3]-[11]+\frac{1}{2}[1] \qquad (8.63)$$

を得る。以上より、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{E}}^{(3)}/g &= \sum_{k=1}^{7}\tilde{\mathcal{L}}_k \\
&= \frac{1}{2}[1]-\frac{1}{2}[2]+[3]-[4]+[5]-4[6]+2[7]-2[8]+2[9]-2[10] \\
&\quad -[11]+2[13]+2[14] \qquad (8.64)
\end{aligned}
$$

を得る。

文献 [9] には、背景時空の周りで、アインシュタインのラグランジアン密度を 4 次まで展開した表式が載っている。

References

[1] ファインマン, モリニーゴ, ワーグナー (著), 和田純夫 (訳)『ファインマン講義重力の理論』(岩波書店, 1999 年).

[2] 和田純夫『今度こそわかる重力理論』(講談社, 2018 年).

[3] 高橋康, 表實『古典場から量子場への道 増補第 2 版』(講談社, 2006 年).

[4] Bert Janssen, "From Fierz-Pauli to Einstein-Hilbert:Gravity as a special relativistic field theory", `http://www.ugr.es/~bjanssen/text/fierz-pauli.pdf`

[5] Tomas Ortin, "Gravity and Strings", Cambridge University Press (第 2 版, 2015 年).

[6] Antonio Lopez-Pinto, "Nonstandard spin 2 field theory", arXiv:gr-qc/0410069.

[7] 内山龍雄『相対性理論』(岩波書店, 1977 年).

[8] 中嶋慧「アインシュタイン作用の変分」 `http://physnakajima.html.xdomain.jp/Einstein_tensor.pdf`

[9] Marc H. Goroff, Augusto Sagnotti, "The ultraviolet behavior of Einstein gravity", Nuclear Physics B **266**,709 (1986). [`https://www.researchgate.net/publication/256600623_The_ultraviolet_behavior_of_Einstein_gravity`]