ファインマンの重力理論

中嶋 慧

October 20, 2021

Abstract

本記事は数理物理 Advent Calendar 2019 の 3 日目の記事である。この記事では、ファインマンの重力理論 [1, 2, 3] についてまとめる。

Contents

1　はじめに

一般相対論は曲がった時空についての理論である。計量は $g_{\mu\nu}$ で表させる[1)]。計量から作られる曲率 (リーマン接続の曲率) を ${R^\alpha}_{\beta\mu\nu}[g]$ とすると、一般に ${R^\alpha}_{\beta\mu\nu}[g] \neq 0$ である。

一方、ファインマンの重力理論では時空は平坦だと考える。つまり、計量を $\eta_{\mu\nu}$ とするとき、${R^\alpha}_{\beta\mu\nu}[\eta] = 0$ である。適当な座標系を選べば全領域で、$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ とできる。重力場は対称 2 階テンソル $h_{\mu\nu}$ で表させる。ファインマンの理論では、重力場 $h_{\mu\nu}$ は、結果的に、

$$g_{\mu\nu} := \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

の組み合わせでのみ現れる。この $g_{\mu\nu}$ が一般相対論での計量に対応する。

ファインマンは、量子電磁力学などの場の理論は知っているが、一般相対論は知らない金星人の立場になって、重力理論を作る事を考えた。この立場を以下、「金星人の」立場と呼ぶ。

§2 では、質点の運動方程式を議論する。質点の運動方程式から、質点のエネルギー・運動量テンソルが満たすべき式 (これを (A) と呼ぶ) が分かる (§3)。

次に、重力場 $h_{\mu\nu}$ の方程式を考える。金星人は、まずは $h_{\mu\nu}$ の 2 次のラグランジアン密度を探すだろう。しかし、ラグランジアン密度が 2 次のみだと (A) と矛盾する。よって、$h_{\mu\nu}$ の 3 次のラグランジアン密度を加える必要がある。それでもまだ (A) と矛盾するので、4 次, 5 次, ... の項を加える必要があり、結局無限次まで考える必要がある。この議論は §8 で行う。また、3 次のラグランジアン密度は付録 A と付録 C で決定する。これは大変な計算である。

この記事では金星人の計算をする前に、いきなり正しい結果を与える (§4)。金星人が追い求めた $h_{\mu\nu}$ の無限次のラグランジアン密度は、アインシュタイン・ヒルベルトのそれであることが分かる。

§5 では、「物質場」(電磁場, ゲージ場を含む) と重力場との結合を見る。

§6 では、ファインマンの重力理論についてコメントする。

§7 では、アインシュタイン・ヒルベルトのラグランジアン密度を $h_{\mu\nu}$ について展開する。この節はそれ以降の節の補足説明のためにある。

§8 では、金星人の計算をする。$h_{\mu\nu}$ の 2 次のラグランジアン密度 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)}$ を求める。また、n 次のラグランジアン密度を決定する方法を述べる。3 次のラグランジアン密度 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}$ は付録 A と付録 C で決定する。

ところで、2 次のラグランジアン密度 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)}$ では (例えば水星の) 近日点移動の大きさを上手く説明できない。近日点移動を正しく求めるには 3 次の効果 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}$ が必要である。このことを §9 で説明する。

この記事では、§6 以外は、計量が $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ となる座標系を採用する。

2　質点の運動方程式

2.1　設定

ミンコフスキー時空について考える。つまり、計量テンソルは、

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1) \tag{2.1}$$

[1)] 符号は $(-+++)$ とする。また、ギリシャ小文字の添え字は $0, 1, 2, 3$ を表す。

であるとする。

重力場は2階対称テンソル $h_{\mu\nu}$ であると考える[2)]。

質点系と重力場の合成系の作用は以下であると仮定する:

$$S = S_{\text{particle}} + S_{\text{int}} + S_{\text{Gravity}}, \tag{2.2}$$

$$S_{\text{particle}} = \sum_a \frac{m_a}{2}\int d\lambda_a \left[e_a(\lambda_a)\eta_{\mu\nu}\frac{dz_a^\mu}{d\lambda_a}\frac{dz_a^\nu}{d\lambda_a} - \frac{c^2}{e(\lambda_a)}\right], \tag{2.3}$$

$$S_{\text{int}} = \sum_a \frac{g_a}{2}\int d\lambda_a\ e_a(\lambda_a)h_{\mu\nu}(z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\lambda_a}\frac{dz_a^\nu}{d\lambda_a}. \tag{2.4}$$

m_a は質量で、g_a は結合定数である。e_a は補助場で、λ_a はパラメーターである[3)]。重力場の作用 S_{Gravity} は後で決定する。パラメーターの変換で e_a は1とできる。e_a が1となるパラメーターを τ_a とすると、

$$S_{\text{particle}} = \sum_a \frac{m_a}{2}\int d\tau_a \left[\eta_{\mu\nu}\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} - c^2\right], \tag{2.5}$$

$$S_{\text{int}} = \sum_a \frac{g_a}{2}\int d\tau_a\ h_{\mu\nu}(z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\tau}{d\tau_a}. \tag{2.6}$$

を得る。S_{particle} の第2項は変分に効かないので、以下では落とし、それを $\tilde{S}_{\text{particle}}$ とする。

2.2 作用原理

質点についての作用は、

$$S_p := \tilde{S}_{\text{particle}} + S_{\text{int}} = \sum_a \frac{m_a}{2}\int d\tau_a \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{g_a}{m_a}h_{\mu\nu}(z_a)\right)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} \tag{2.7}$$

である。今、

$$g^{(a)}_{\mu\nu} := \eta_{\mu\nu} + \frac{g_a}{m_a}h_{\mu\nu} \tag{2.8}$$

とすると、

$$S_p = \sum_a \frac{m_a}{2}\int d\tau_a\ g^{(a)}_{\mu\nu}(z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} \tag{2.9}$$

であり、

$$\begin{aligned}
\delta S_p &= \sum_a \frac{m_a}{2}\int d\tau_a \left(\delta g^{(a)}_{\mu\nu}(z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} + 2g^{(a)}_{\mu\nu}(z_a)\frac{d\delta z_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a}\right)\\
&= \sum_a \frac{m_a}{2}\int d\tau_a\ \delta z_a^\lambda\Big(\partial_\lambda g^{(a)}_{\mu\nu}(z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} - \frac{d}{d\tau_a}\big[2g^{(a)}_{\lambda\nu}(z_a)\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a}\big]\Big)\\
&= \sum_a \frac{m_a}{2}\int d\tau_a\ \delta z_a^\lambda\Big(\partial_\lambda g^{(a)}_{\mu\nu}(z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} - 2\partial_\mu g^{(a)}_{\lambda\nu}(z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} - 2g^{(a)}_{\lambda\nu}(z_a)\frac{d^2z_a^\nu}{d\tau_a^2}\Big)\\
&= \sum_a \frac{m_a}{2}\int d\tau_a\ \delta z_a^\lambda\cdot(-2)\Big(\frac{1}{2}\big[-\partial_\lambda g^{(a)}_{\mu\nu} + \partial_\mu g^{(a)}_{\lambda\nu} + \partial_\nu g^{(a)}_{\lambda\mu}\big]\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} + g^{(a)}_{\lambda\nu}(z_a)\frac{d^2z_a^\nu}{d\tau_a^2}\Big)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

---

2) ファインマンの教科書 [1] には、なぜ2階対称テンソルなのかの解説もあるが、この記事では省略する。

3) $\lambda_a \to \lambda'_a$ で、$e_a \to e'_a = \frac{d\lambda'_a}{d\lambda_a}e_a$ である。

となる。よって、

$$g^{(a)}_{\lambda\nu}(z_a)\frac{d^2 z^\nu_a}{d\tau_a^2}+\frac{1}{2}\big[-\partial_\lambda g^{(a)}_{\mu\nu}+\partial_\mu g^{(a)}_{\lambda\nu}+\partial_\nu g^{(a)}_{\lambda\mu}\big]\frac{dz^\mu_a}{d\tau_a}\frac{dz^\nu_a}{d\tau_a}=0 \tag{2.11}$$

を得る。これは、

$$\Big(\eta_{\lambda\nu}+\frac{g_a}{m_a}h_{\lambda\nu}(z_a)\Big)\frac{d^2 z^\nu_a}{d\tau_a^2}+\frac{1}{2}\frac{g_a}{m_a}\big[-\partial_\lambda h_{\mu\nu}+\partial_\mu h_{\lambda\nu}+\partial_\nu h_{\lambda\mu}\big]\frac{dz^\mu_a}{d\tau_a}\frac{dz^\nu_a}{d\tau_a}=0 \tag{2.12}$$

である[4)]。

　ところで、等価原理より、

$$\frac{g_a}{m_a}=1 \tag{2.13}$$

である [3]。よって、

$$g_{\mu\nu}:=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu} \tag{2.14}$$

とすると、

$$g_{\lambda\nu}(z_a)\frac{d^2 z^\nu_a}{d\tau_a^2}+\frac{1}{2}\big[-\partial_\lambda g_{\mu\nu}+\partial_\mu g_{\lambda\nu}+\partial_\nu g_{\lambda\mu}\big]\frac{dz^\mu_a}{d\tau_a}\frac{dz^\nu_a}{d\tau_a}=0 \tag{2.15}$$

である。今、

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu}:=\frac{1}{2}\big[-\partial_\lambda g_{\mu\nu}+\partial_\mu g_{\lambda\nu}+\partial_\nu g_{\lambda\mu}\big] \tag{2.16}$$

と置くと、

$$g_{\lambda\nu}(z_a)\frac{d^2 z^\nu_a}{d\tau_a^2}+\Gamma_{\lambda\mu\nu}(z_a)\frac{dz^\mu_a}{d\tau_a}\frac{dz^\nu_a}{d\tau_a}=0 \tag{2.17}$$

である。

2.3　パラメーターの同定

　ところで、

$$C(\tau):=g_{\mu\nu}\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau} \tag{2.18}$$

---

4) 重力場が弱いとし、$h_{\mu\nu}$ の 2 次より高次が無視できるなら、$\eta_{\lambda\nu}+\frac{g_a}{m_a}h_{\lambda\nu}(z_a)$ の逆行列は、

$$\eta^{\mu\nu}-\frac{g_a}{m_a}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}(z_a)$$

であり、(2.12) は、

$$\frac{d^2 z^\lambda_a}{d\tau_a^2}+\eta^{\lambda\sigma}\frac{1}{2}\frac{g_a}{m_a}\big[-\partial_\sigma h_{\mu\nu}+\partial_\mu h_{\sigma\nu}+\partial_\nu h_{\sigma\mu}\big]\frac{dz^\mu_a}{d\tau_a}\frac{dz^\nu_a}{d\tau_a}\ \approx\ 0$$

となる。

とすると、

$$
\begin{aligned}
\frac{dC}{d\tau} &= \partial_\lambda g_{\mu\nu}\frac{dz^\lambda}{d\tau}\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau} + 2g_{\mu\nu}\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{d^2z^\nu}{d\tau^2} \\
&= \partial_\lambda g_{\mu\nu}\frac{dz^\lambda}{d\tau}\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau} - 2\Gamma_{\mu\lambda\nu}(z_a)\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\lambda}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

である。よって、C は定数である。τ は、

$$
g_{\mu\nu}\frac{dz^\mu}{d\tau}\frac{dz^\nu}{d\tau} = -c^2 \tag{2.20}
$$

を満たす。これは、$e(\tau)$ についてのオイラー・ラグランジュ方程式とも一致する。このとき、

$$
S_{\text{particle}} + S_{\text{int}} = -\sum_a m_a c^2 \int d\tau_a \tag{2.21}
$$

となる。

3 エネルギー・運動量テンソル

今、

$$
\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})}(x) := \sum_a m_a \int d\tau_a\ \delta^4(x - z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} \tag{3.1}
$$

とすると、

$$
S_{\text{int}} = \int d^4x\ \frac{1}{2}h_{\mu\nu}(x)\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})}(x) \tag{3.2}
$$

となる。$\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})}$ は質点系のエネルギー・運動量テンソルである。

ところで、

$$
\begin{aligned}
\partial_\nu \boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})} &= \sum_a m_a \int d\tau_a\ \partial_\nu\delta^4(x - z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} \\
&= \sum_a m_a \int d\tau_a\ (-1)\frac{d\delta^4(x - z_a)}{d\tau_a}\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a} \\
&= \sum_a m_a \int d\tau_a\ \delta^4(x - z_a)\frac{d^2z_a^\mu}{d\tau_a^2}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
g_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})} &= \sum_a m_a \int d\tau_a\ \delta^4(x - z_a)g_{\lambda\mu}(z_a)\frac{d^2z_a^\mu}{d\tau_a^2} \\
&= \sum_a m_a \int d\tau_a\ \delta^4(x - z_a)\Big[-\Gamma_{\lambda\mu\nu}(z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a}\Big] \\
&= -\Gamma_{\lambda\mu\nu}(x)\sum_a m_a \int d\tau_a\ \delta^4(x - z_a)\frac{dz_a^\mu}{d\tau_a}\frac{dz_a^\nu}{d\tau_a} \\
&= -\Gamma_{\lambda\mu\nu}(x)\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})}(x)
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

となる。質点の運動方程式 (2.17) を用いた。整理すると、

$$g_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})} = -\Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})} \tag{3.5}$$

である。

質点と重力場と、ゲージ場などのその他の場との合成系のラグランジアン密度を、

$$S_{\mathrm{tot}} = S_{\mathrm{particle}} + \int d^4x\ \frac{1}{2}h_{\mu\nu}(x)\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})}(x) + S_{\mathrm{Gravity}} + S_{\mathrm{matter}} \tag{3.6}$$

とする。S_{matter} の $h_{\mu\nu}$ についての変分を、

$$\delta S_{\mathrm{matter}} = \int d^4x\ \delta h_{\mu\nu}(x)\frac{1}{2}\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{m})} \tag{3.7}$$

で定義し、

$$\boldsymbol{T}^{\mu\nu} := \boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})} + \boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{m})} \tag{3.8}$$

と置く。$\boldsymbol{T}^{\mu\nu}$ も (3.5) を満たすと仮定する：

$$g_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{T}^{\mu\nu} = -\Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{T}^{\mu\nu}. \tag{3.9}$$

4　重力場の作用

4.1　重力場の運動方程式

今、S_{Gravity} の $h_{\mu\nu}$ についての変分を、

$$\delta S_{\mathrm{Gravity}} = -\int d^4x\ \delta h_{\mu\nu}(x)\frac{1}{2\kappa}\boldsymbol{G}^{\mu\nu} \tag{4.1}$$

とすると、重力場の運動方程式は、

$$\boldsymbol{G}^{\mu\nu} = \kappa\boldsymbol{T}^{\mu\nu} \tag{4.2}$$

となる。κ は定数 (アインシュタイン定数) である。

4.2　重力場の作用の不変性

(3.9), (4.2) より、

$$g_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{G}^{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{G}^{\mu\nu} = 0 \tag{4.3}$$

が従う。

上式に ε^λ をかけて積分すると、

$$\begin{aligned}
0 &= \int d^4x\ \Big[g_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{G}^{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{G}^{\mu\nu}\Big]\varepsilon^\lambda \\
&= \int d^4x\ \Big[-\partial_\nu(g_{\lambda\mu}\varepsilon^\lambda)\boldsymbol{G}^{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{G}^{\mu\nu}\varepsilon^\lambda\Big] \\
&= \int d^4x\ \boldsymbol{G}^{\mu\nu}\frac{1}{2}\Big[-\partial_\nu g_{\lambda\mu}\varepsilon^\lambda - \partial_\mu g_{\lambda\nu}\varepsilon^\lambda + 2\Gamma_{\lambda\mu\nu}\varepsilon^\lambda - g_{\lambda\mu}\partial_\nu\varepsilon^\lambda - g_{\lambda\nu}\partial_\mu\varepsilon^\lambda\Big] \\
&= \int d^4x\ \boldsymbol{G}^{\mu\nu}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big[\partial_\lambda g_{\mu\nu}\varepsilon^\lambda + g_{\lambda\mu}\partial_\nu\varepsilon^\lambda + g_{\lambda\nu}\partial_\mu\varepsilon^\lambda\Big] \\
&\equiv \int d^4x\ \boldsymbol{G}^{\mu\nu}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\delta^{(\varepsilon)}h_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

を得る。ε^μ は無限遠で 0 になるとした。ここで、

$$\delta^{(\varepsilon)}h_{\mu\nu} := \partial_\lambda g_{\mu\nu}\varepsilon^\lambda + g_{\lambda\mu}\partial_\nu\varepsilon^\lambda + g_{\lambda\nu}\partial_\mu\varepsilon^\lambda \tag{4.5}$$

である。(4.4) は、

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \delta^{(\varepsilon)}h_{\mu\nu} \tag{4.6}$$

で S_{Gravity} が不変であることを意味する。以下では、特に、ε^μ が無限小として、上の変換で不変な作用を探す。

4.3 $h_{\mu\nu}$ の微分を含まない作用

今、

$$g := \det(g_{\mu\nu}) \tag{4.7}$$

とすると、

$$\delta g = g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{4.8}$$

である。ここで、$g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の逆行列である。よって、

$$\begin{aligned}
\delta(-g)^\alpha &= \alpha(-g)^{\alpha-1}(-gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) \\
&= \alpha(-g)^\alpha g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

である。$\delta g_{\mu\nu} = \delta^{(\varepsilon)}g_{\mu\nu} = \delta^{(\varepsilon)}h_{\mu\nu}$ として、

$$\begin{aligned}
\delta^{(\varepsilon)}(-g)^\alpha &= \alpha(-g)^\alpha g^{\mu\nu}(\partial_\lambda g_{\mu\nu}\varepsilon^\lambda + g_{\lambda\mu}\partial_\nu\varepsilon^\lambda + g_{\lambda\nu}\partial_\mu\varepsilon^\lambda) \\
&= \alpha(-g)^\alpha(g^{-1}\partial_\lambda g\varepsilon^\lambda + 2\partial_\mu\varepsilon^\mu) \\
&= \varepsilon^\mu\partial_\mu(-g)^\alpha + 2\alpha(-g)^\alpha\partial_\mu\varepsilon^\mu
\end{aligned} \tag{4.10}$$

を得る。よって、$\alpha = 1/2$ の時は、

$$\delta^{(\varepsilon)}\sqrt{-g} = \partial_\mu(\varepsilon^\mu\sqrt{-g}) \tag{4.11}$$

となる。従って、

$$S_\Lambda := -\frac{\Lambda}{\kappa}\int d^4x\ \sqrt{-g} \tag{4.12}$$

は作用の候補である。Λ は宇宙定数である。

4.4　$h_{\mu\nu}$ の 2 階微分を含む作用

今、

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} := g^{\lambda\sigma}\Gamma_{\sigma\mu\nu}, \tag{4.13}$$
$$R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta} := \partial_{\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\beta} - \partial_{\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\alpha} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\alpha}, \tag{4.14}$$
$$R_{\mu\nu} := R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}, \tag{4.15}$$
$$R := g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{4.16}$$

と置くと、

$$\delta^{(\varepsilon)}R = \varepsilon^{\mu}\partial_{\mu}R \tag{4.17}$$

となる [1, 2]。よって、

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}R &\to \sqrt{-g}R + \partial_{\mu}(\varepsilon^{\mu}\sqrt{-g})R + \varepsilon^{\mu}\sqrt{-g}\partial_{\mu}R \\ &= \sqrt{-g}R + \partial_{\mu}(\varepsilon^{\mu}\sqrt{-g}R)\end{aligned} \tag{4.18}$$

となる。これより、

$$S_{\mathrm{EH}} := \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\ \sqrt{-g}R \tag{4.19}$$

は作用の候補である。

4.5　アインシュタイン方程式

作用

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{Gravity}} &= S_{\mathrm{EH}} + S_{\Lambda} \\ &= \int d^4x\ \frac{1}{\kappa}\sqrt{-g}\Big(\frac{1}{2}R - \Lambda\Big)\end{aligned} \tag{4.20}$$

に対する $\boldsymbol{G}^{\mu\nu}$ は、よく知られたように、

$$\boldsymbol{G}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\Big(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu}\Big) \tag{4.21}$$

となる。よって、重力場の運動方程式 (4.2) は、

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu} = \kappa\frac{\boldsymbol{T}^{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} \tag{4.22}$$

となる。これはアインシュタイン方程式である。

5　「物質場」の作用

5.1　スカラー場

重力場と結合していないスカラー場 ϕ の作用は、

$$S_{\text{Scalar,Free}} = \int d^4x \; \mathcal{L}_{\text{Scalar,Free}}, \tag{5.1}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Scalar,Free}} = -\frac{1}{2}\Big(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + m^2\phi^2\Big) \tag{5.2}$$

である。重力場としたスカラー場の作用は、

$$S_{\text{Scalar}} = \int d^4x \; \sqrt{-g}\mathcal{L}_{\text{Scalar}}, \tag{5.3}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Scalar}} = -\frac{1}{2}\Big(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + m^2\phi^2\Big) \tag{5.4}$$

である。

$|h_{\mu\nu}| \ll 1$ とし、$h_{\mu\nu}$ の 1 次まで考えると、

$$\sqrt{-g} \approx 1 + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}, \tag{5.5}$$

$$g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta} \tag{5.6}$$

なので、

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\text{Scalar}} &\approx \mathcal{L}_{\text{Scalar,Free}} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}\mathcal{L}_{\text{Scalar,Free}} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \\ &= \mathcal{L}_{\text{Scalar,Free}} + \frac{1}{2}h_{\mu\nu}\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{S})}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{S})} = \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}_{\text{Scalar,Free}} + \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi \tag{5.8}$$

となる。$\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{S})}$ は $\mathcal{L}_{\text{Scalar,Free}}$ のエネルギー・運動量テンソルである。

5.2　電磁場

重力場と結合していない電磁場 A_μ の作用は、

$$S_{\text{EM,Free}} = \int d^4x \; \mathcal{L}_{\text{EM,Free}}, \tag{5.9}$$

$$\mathcal{L}_{\text{EM,Free}} = -\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}, \tag{5.10}$$

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{5.11}$$

である。重力場としたスカラー場の作用は、

$$S_{\text{EM}} = \int d^4x \; \sqrt{-g}\mathcal{L}_{\text{EM}}, \tag{5.12}$$

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \tag{5.13}$$

である。

6 コメント

6.1 光線の運動方程式

今はミンコフスキー時空を考えている。しかし、重力場がある場合は、光線はもはや直進しない。光線の運動方程式は、あるパラメーター Λ が存在し、

$$g_{\lambda\nu}(X)\frac{d^2X^\nu}{d\Lambda^2}+\Gamma_{\lambda\mu\nu}(X)\frac{dX^\mu}{d\Lambda}\frac{dX^\nu}{d\Lambda}=0, \tag{6.1}$$

$$g_{\mu\nu}(X)\frac{dX^\mu}{d\Lambda}\frac{dX^\nu}{d\Lambda}=0 \tag{6.2}$$

となるべきである。

6.2 一般座標

一般座標では、$\eta_{\mu\nu}$ はもはや定数ではない。ただし、

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}[\eta]=0 \tag{6.3}$$

である。ここで、$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}[q]$ は $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ で $g_{\mu\nu}$ を $q_{\mu\nu}$ に置き換えたものである。領域 Ω で $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}[q]=0$ であることと、Ω で $q_{\mu\nu}$ が定数となる座標系が存在することは同値である。

6.3 疑問

ファインマンの重力理論はミンコフスキー時空上の理論であるが、重力場があると光線も曲がる。また、最終的にはラグランジアン密度にミンコフスキー計量は登場せず、$g_{\mu\nu}$ のみが登場する。では、なぜミンコフスキー時空だと言えるのか？

また、最初に考えていた、$\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ となる座標系とは何か？

6.4 変換 (4.6) の意味

一般座標でも、(4.4), (4.5), (4.6) はそのまま成り立つ。(4.5), (4.6) は、

$$\delta^{(\varepsilon)}h_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu}\varepsilon^\lambda+g_{\lambda\mu}\partial_\nu\varepsilon^\lambda+g_{\lambda\nu}\partial_\mu\varepsilon^\lambda\equiv\delta^{(\varepsilon)}g_{\mu\nu}, \tag{6.4}$$

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu}+\delta^{(\varepsilon)}h_{\mu\nu}, \tag{6.5}$$

$$\eta_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}, \tag{6.6}$$

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}+\delta^{(\varepsilon)}g_{\mu\nu} \tag{6.7}$$

である。この $g_{\mu\nu}$ の変換の式は、

$$\delta^{(\varepsilon)}g_{\mu\nu} = \bar{\delta}g_{\mu\nu}(x)=g'_{\mu\nu}(x')\big|_{x'=x}-g_{\mu\nu}(x), \tag{6.8}$$

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}g_{\alpha\beta}(x), \tag{6.9}$$

$$x'^\mu = x^\mu-\varepsilon^\mu \tag{6.10}$$

である。$\bar{\delta}g_{\mu\nu}(x)$ はリー微分である。

7 アインシュタイン・ヒルベルト作用の展開

7.1 一般論

アインシュタイン・ヒルベルトのラグランジアン密度

$$\mathcal{L}_{\mathrm{EH}} := \frac{1}{2\kappa} SR, \quad S := \sqrt{-g} \tag{7.1}$$

を $h_{\mu\nu}$ について展開することを考える。今、

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}_{(1)} + g^{\mu\nu}_{(2)} + \cdots \tag{7.2}$$

とする[5]と、

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = {}^{(1)}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + {}^{(2)}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + {}^{(3)}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \cdots, \tag{7.3}$$

$${}^{(1)}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \eta^{\lambda\sigma}\Gamma_{\sigma\mu\nu}, \tag{7.4}$$

$${}^{(2)}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma}_{(1)}\Gamma_{\sigma\mu\nu}, \tag{7.5}$$

$${}^{(3)}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma}_{(2)}\Gamma_{\sigma\mu\nu} \tag{7.6}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} &= \partial_\alpha \Gamma^\mu{}_{\lambda\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\rho\alpha}\Gamma^\rho{}_{\lambda\beta} - \Gamma^\mu{}_{\rho\beta}\Gamma^\rho{}_{\lambda\alpha} \\ &= {}^{(1)}R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} + {}^{(2)}R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} + {}^{(3)}R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} + \cdots, \end{aligned} \tag{7.7}$$

$${}^{(1)}R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} = \partial_\alpha {}^{(1)}\Gamma^\mu{}_{\lambda\beta} - \partial_\beta {}^{(1)}\Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha}, \tag{7.8}$$

$${}^{(2)}R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} = \partial_\alpha {}^{(2)}\Gamma^\mu{}_{\lambda\beta} - \partial_\beta {}^{(2)}\Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha} + {}^{(1)}\Gamma^\mu{}_{\rho\alpha}{}^{(1)}\Gamma^\rho{}_{\lambda\beta} - {}^{(1)}\Gamma^\mu{}_{\rho\beta}{}^{(1)}\Gamma^\rho{}_{\lambda\alpha}, \tag{7.9}$$

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} &= \partial_\alpha {}^{(3)}\Gamma^\mu{}_{\lambda\beta} - \partial_\beta {}^{(3)}\Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha} + {}^{(1)}\Gamma^\mu{}_{\rho\alpha}{}^{(2)}\Gamma^\rho{}_{\lambda\beta} - {}^{(1)}\Gamma^\mu{}_{\rho\beta}{}^{(2)}\Gamma^\rho{}_{\lambda\alpha} \\ &\quad + {}^{(2)}\Gamma^\mu{}_{\rho\alpha}{}^{(1)}\Gamma^\rho{}_{\lambda\beta} - {}^{(2)}\Gamma^\mu{}_{\rho\beta}{}^{(1)}\Gamma^\rho{}_{\lambda\alpha} \end{aligned} \tag{7.10}$$

である。よって、

$$R_{\lambda\beta} = R^{(1)}_{\lambda\beta} + R^{(2)}_{\lambda\beta} + R^{(3)}_{\lambda\beta} + \cdots, \tag{7.11}$$

$$R^{(i)}_{\lambda\beta} = {}^{(i)}R^\mu{}_{\lambda\mu\beta}, \tag{7.12}$$

$$R^{(1)}_{\lambda\beta} = \partial_\mu {}^{(1)}\Gamma^\mu{}_{\lambda\beta} - \partial_\beta {}^{(1)}\Gamma^\mu{}_{\lambda\mu}, \tag{7.13}$$

$$R^{(2)}_{\lambda\beta} = \partial_\mu {}^{(2)}\Gamma^\mu{}_{\lambda\beta} - \partial_\beta {}^{(2)}\Gamma^\mu{}_{\lambda\mu} + {}^{(1)}\Gamma^\mu{}_{\rho\mu}{}^{(1)}\Gamma^\rho{}_{\lambda\beta} - {}^{(1)}\Gamma^\mu{}_{\rho\beta}{}^{(1)}\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu}, \tag{7.14}$$

$$\begin{aligned} R^{(3)}_{\lambda\beta} &= \partial_\mu {}^{(3)}\Gamma^\mu{}_{\lambda\beta} - \partial_\beta {}^{(3)}\Gamma^\mu{}_{\lambda\mu} + {}^{(1)}\Gamma^\mu{}_{\rho\mu}{}^{(2)}\Gamma^\rho{}_{\lambda\beta} - {}^{(1)}\Gamma^\mu{}_{\rho\beta}{}^{(2)}\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} \\ &\quad + {}^{(2)}\Gamma^\mu{}_{\rho\mu}{}^{(1)}\Gamma^\rho{}_{\lambda\beta} - {}^{(2)}\Gamma^\mu{}_{\rho\beta}{}^{(1)}\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} \end{aligned} \tag{7.15}$$

となる。また、

$$R = R^{(1)} + R^{(2)} + R^{(3)} + \cdots, \tag{7.16}$$

$$R^{(1)} = \eta^{\lambda\beta} R^{(1)}_{\lambda\beta}, \tag{7.17}$$

$$R^{(2)} = \eta^{\lambda\beta} R^{(2)}_{\lambda\beta} + g^{\lambda\beta}_{(1)} R^{(1)}_{\lambda\beta}, \tag{7.18}$$

$$R^{(3)} = \eta^{\lambda\beta} R^{(3)}_{\lambda\beta} + g^{\lambda\beta}_{(1)} R^{(2)}_{\lambda\beta} + g^{\lambda\beta}_{(2)} R^{(1)}_{\lambda\beta} \tag{7.19}$$

[5] (n) は $h_{\mu\nu}$ の n 次であることを表す。

である。今、

$$S = 1 + S^{(1)} + S^{(2)} + \cdots \tag{7.20}$$

と展開すると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{EH}} &= \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{EH}}^{(1)} + \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{EH}}^{(2)} + \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{EH}}^{(3)} + \cdots , &(7.21)\\ 2\kappa \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{EH}}^{(1)} &= R^{(1)}, &(7.22)\\ 2\kappa \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{EH}}^{(2)} &= R^{(2)} + S^{(1)} R^{(1)}, &(7.23)\\ 2\kappa \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{EH}}^{(3)} &= R^{(3)} + S^{(1)} R^{(2)} + S^{(2)} R^{(1)} &(7.24) \end{aligned}$$

となる。

7.2 具体的な計算

7.2.1 準備

よく知られた公式

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B A^{-1} + A^{-1} B A^{-1} B A^{-1} - \cdots \tag{7.25}$$

より、

$$\begin{aligned} g_{(1)}^{\mu\nu} &= -h^{\mu\nu}, &(7.26)\\ g_{(2)}^{\mu\nu} &= h^{\mu}{}_{\rho} h^{\rho\nu} &(7.27) \end{aligned}$$

である。$h_{\mu\nu}$ の添え字は $\eta^{\mu\nu}$ で上げた。

また、

$$\begin{aligned} \det(A) &= \exp \mathrm{Tr} \ln A, &(7.28)\\ \det(A+B) &= \det(A) \det(1 + A^{-1}B)\\ &= \det(A) \exp \mathrm{Tr} \ln (1 + A^{-1}B)\\ &= \det(A) \exp \mathrm{Tr}[A^{-1}B - \frac{1}{2} A^{-1}BA^{-1}B + \cdots]\\ &= \det(A) \Big(1 + \mathrm{Tr}[A^{-1}B] - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[A^{-1}BA^{-1}B] + \frac{1}{2}\big(\mathrm{Tr}[A^{-1}B]\big)^2 + \cdots\Big) &(7.29) \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \sqrt{-\det(A+B)} &= \sqrt{-\det(A)} \Big(1 + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[A^{-1}B] - \frac{1}{4}\mathrm{Tr}[A^{-1}BA^{-1}B]\\ &\qquad + (\frac{1}{4} - \frac{1}{8})\big(\mathrm{Tr}[A^{-1}B]\big)^2 + \cdots\Big)\\ &= \sqrt{-\det(A)} \Big(1 + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[A^{-1}B]\\ &\qquad + \frac{1}{8}\big\{\big(\mathrm{Tr}[A^{-1}B]\big)^2 - 2\mathrm{Tr}[A^{-1}BA^{-1}B]\big\} + \cdots\Big) &(7.30) \end{aligned}$$

となり、

$$S^{(1)} = \frac{1}{2}h^{\mu}{}_{\mu} \equiv \frac{1}{2}h, \tag{7.31}$$

$$S^{(2)} = \frac{1}{8}\Big(h^2 - 2h^{\mu}{}_{\nu}h^{\nu}{}_{\mu}\Big) \tag{7.32}$$

を得る。

7.2.2 1次

さて、

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\big[-\partial_\lambda h_{\mu\nu} + \partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial_\nu h_{\lambda\mu}\big] \tag{7.33}$$

より、

$${}^{(1)}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}\big[-\partial_\sigma h_{\mu\nu} + \partial_\mu h_{\sigma\nu} + \partial_\nu h_{\sigma\mu}\big] \tag{7.34}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
R^{(1)}_{\lambda\beta} &= \partial_\mu {}^{(1)}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\beta} - \partial_\beta {}^{(1)}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\mu} \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\big[-\partial_\mu\partial_\sigma h_{\lambda\beta} + \partial_\mu\partial_\lambda h_{\sigma\beta} + \partial_\mu\partial_\beta h_{\sigma\lambda}\big] \\
&\quad -\frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\big[-\partial_\beta\partial_\sigma h_{\mu\lambda} + \partial_\beta\partial_\mu h_{\sigma\lambda} + \partial_\beta\partial_\lambda h_{\sigma\mu}\big] \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\big[-\partial_\mu\partial_\sigma h_{\lambda\beta} + \partial_\mu\partial_\lambda h_{\sigma\beta} + \partial_\beta\partial_\sigma h_{\mu\lambda} - \partial_\beta\partial_\lambda h_{\sigma\mu}\big] \\
&= \frac{1}{2}\big[-\Box h_{\lambda\beta} + \partial_\mu\partial_\lambda h^{\mu}{}_{\beta} + \partial_\beta\partial_\mu h^{\mu}{}_{\lambda} - \partial_\beta\partial_\lambda h\big]
\end{aligned} \tag{7.35}$$

である。ここで、

$$\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \tag{7.36}$$

である。また、

$$\begin{aligned}
R^{(1)} &= \eta^{\lambda\beta}\frac{1}{2}\big[-\Box h_{\lambda\beta} + \partial_\mu\partial_\lambda h^{\mu}{}_{\beta} + \partial_\beta\partial_\mu h^{\mu}{}_{\lambda} - \partial_\beta\partial_\lambda h\big] \\
&= -\Box h + \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{7.37}$$

である。よって、

$$R^{(1)}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}R^{(1)} = \frac{1}{2}\big[-\Box h_{\alpha\beta} + \partial_\mu\partial_\alpha h^{\mu}{}_{\beta} + \partial_\beta\partial_\mu h^{\mu}{}_{\alpha} - \partial_\beta\partial_\alpha h + \eta_{\alpha\beta}\Box h - \eta_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu}\big] \tag{7.38}$$

となる。

7.2.3　2 次

$R^{(2)}_{\lambda\beta}$ は、

$$R^{(2)}_{\lambda\beta} \;=\; R^{(2a)}_{\lambda\beta} + R^{(2b)}_{\lambda\beta} + R^{(2c)}_{\lambda\beta}, \tag{7.39}$$

$$R^{(2a)}_{\lambda\beta} := \partial_\mu {}^{(2)}\Gamma^\mu{}_{\lambda\beta} - \partial_\beta {}^{(2)}\Gamma^\mu{}_{\lambda\mu}, \tag{7.40}$$

$$R^{(2b)}_{\lambda\beta} := {}^{(1)}\Gamma^\mu{}_{\rho\mu} {}^{(1)}\Gamma^\rho{}_{\lambda\beta}, \tag{7.41}$$

$$R^{(2c)}_{\lambda\beta} := -{}^{(1)}\Gamma^\mu{}_{\rho\beta} {}^{(1)}\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} \tag{7.42}$$

と書ける。また、

$$R^{(2x)} := \eta^{\lambda\beta} R^{(2x)}_{\lambda\beta} \quad (x = a, b, c), \tag{7.43}$$

$$R^{(2d)} := g^{\lambda\beta}_{(1)} R^{(1)}_{\lambda\beta} = -h^{\lambda\beta} R^{(1)}_{\lambda\beta} \tag{7.44}$$

と置く。

さて、

$$R^{(2a)} \overset{\mathrm{w}}{=} 0 \tag{7.45}$$

である。ここで、$\overset{\mathrm{w}}{=}$ は全微分項を無視する近似である。また、

$$\begin{aligned}
R^{(2d)} &= -\frac{1}{2} h^{\lambda\beta} \eta^{\mu\sigma} \big[-\partial_\mu \partial_\sigma h_{\lambda\beta} + \partial_\mu \partial_\lambda h_{\sigma\beta} + \partial_\beta \partial_\sigma h_{\mu\lambda} - \partial_\beta \partial_\lambda h_{\sigma\mu} \big] \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} \frac{1}{2} \eta^{\mu\sigma} \big[-\partial_\mu h^{\lambda\beta} \partial_\sigma h_{\lambda\beta} + \partial_\mu h^{\lambda\beta} \partial_\lambda h_{\sigma\beta} + \partial_\beta h^{\lambda\beta} \partial_\sigma h_{\mu\lambda} - \partial_\beta h^{\lambda\beta} \partial_\lambda h_{\sigma\mu} \big] \\
&= \frac{1}{2} \big[-\eta^{\mu\sigma} \partial_\mu h^{\lambda\beta} \partial_\sigma h_{\lambda\beta} + \partial_\mu h^{\lambda\beta} \partial_\lambda h^\mu{}_\beta + \partial_\beta h^{\lambda\beta} \partial_\mu h^\mu{}_\lambda - \partial_\beta h^{\lambda\beta} \partial_\lambda h \big] \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} \frac{1}{2} \big[-\eta^{\mu\sigma} \partial_\mu h^{\lambda\beta} \partial_\sigma h_{\lambda\beta} + \partial_\lambda h^{\lambda\beta} \partial_\mu h^\mu{}_\beta + \partial_\beta h^{\lambda\beta} \partial_\mu h^\mu{}_\lambda - \partial_\beta h^{\lambda\beta} \partial_\lambda h \big]
\end{aligned} \tag{7.46}$$

である。

$R^{(2)}$ は以下の 4 つの項からなる：

$$(1) := \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha h_{\mu\nu} \partial_\beta h^{\mu\nu}, \tag{7.47}$$

$$(2) := \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\sigma h^\sigma{}_\nu \overset{\mathrm{w}}{=} \partial_\sigma h_\mu{}^\nu \partial_\nu h^{\mu\sigma} \overset{\mathrm{w}}{=} (2'), \tag{7.48}$$

$$(3) := \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h, \tag{7.49}$$

$$(4) := \eta^{\mu\nu} \partial_\mu h \partial_\nu h. \tag{7.50}$$

これを使うと、

$$R^{(2d)} \overset{\mathrm{w}}{=} \frac{1}{2} \big[-(1) + 2(2) - (3) \big] \tag{7.51}$$

である。

さて、

$$\begin{aligned}
R^{(2b)} &= \eta^{\lambda\beta} {}^{(1)}\Gamma^\mu{}_{\rho\mu} {}^{(1)}\Gamma^\rho{}_{\lambda\beta} \\
&= \frac{1}{4} \eta^{\lambda\beta} \eta^{\mu\sigma} \eta^{\rho\alpha} [-\partial_\sigma h_{\mu\rho} + \partial_\mu h_{\sigma\rho} + \partial_\rho h_{\sigma\mu}][-\partial_\alpha h_{\lambda\beta} + \partial_\lambda h_{\alpha\beta} + \partial_\beta h_{\alpha\lambda}] \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} \frac{1}{4} [(3) - (2) - (2) - (3) + (2) + (2) - (4) + (3) + (3)] \\
&= \frac{1}{4} [2(3) - (4)]
\end{aligned} \tag{7.52}$$

である。また、

$$\begin{aligned}
R^{(2c)} &= -\eta^{\lambda\beta(1)}\Gamma^{\mu}{}_{\rho\beta}{}^{(1)}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu} \\
&= -\frac{1}{4}\eta^{\lambda\beta}\eta^{\mu\sigma}\eta^{\rho\alpha}[-\partial_\sigma h_{\rho\beta}+\partial_\rho h_{\sigma\beta}+\partial_\beta h_{\sigma\rho}][-\partial_\alpha h_{\mu\lambda}+\partial_\mu h_{\alpha\lambda}+\partial_\lambda h_{\alpha\mu}] \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} -\frac{1}{4}[(2)-(1)-(2)-(1)+(2)+(2)-(2)+(2)+(1)] \\
&= \frac{1}{4}[(1)-2(2)] \qquad (7.53)
\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
R^{(2)} &\overset{\mathrm{w}}{=} \frac{1}{4}\big[-2(1)+4(2)-2(3)+2(3)-(4)+(1)-2(2)\big] \\
&= \frac{1}{4}\big[-(1)+2(2)-(4)\big] \qquad (7.54)
\end{aligned}$$

となる。

さて、

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)}_{\mathrm{EH}} = R^{(2)} + S^{(1)}R^{(1)} \qquad (7.55)$$

であった。ここで、

$$\begin{aligned}
S^{(1)}R^{(1)} &= \frac{1}{2}h[-\Box h+\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu}] \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} \frac{1}{2}[(4)-(3)] \qquad (7.56)
\end{aligned}$$

である。よって、

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)}_{\mathrm{EH}} \overset{\mathrm{w}}{=} \frac{1}{4}\big[-(1)+2(2)-2(3)+(4)\big] \qquad (7.57)$$

となる。また、

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(1)}_{\mathrm{EH}} = R^{(1)} \overset{\mathrm{w}}{=} 0 \qquad (7.58)$$

なので、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(1)}_{\mathrm{EH}}+\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)}_{\mathrm{EH}} &\overset{\mathrm{w}}{=} \frac{1}{4}\big[-(1)+2(2)-2(3)+(4)\big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[-\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha h_{\mu\nu}\partial_\beta h^{\mu\nu}+2\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\sigma h^{\sigma}{}_{\nu}-2\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h+\eta^{\mu\nu}\partial_\mu h\partial_\nu h\Big] \qquad (7.59)
\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}R \overset{\mathrm{w}}{=} &-\frac{1}{4\kappa}\Big[\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha h_{\mu\nu}\partial_\beta h^{\mu\nu}-\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\sigma h^{\sigma}{}_{\nu}+\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu h\partial_\nu h\Big] \\
&+\mathcal{O}(h^3) \qquad (7.60)
\end{aligned}$$

となる。

7.3 補足

よく知られているように、

$$\mathcal{L}_{\mathrm{EH}} \overset{\mathrm{w}}{=} \frac{1}{2\kappa} S G \equiv \mathcal{L}'_{\mathrm{EH}}\,, \quad G := g^{\mu\nu}\Big[\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} - \Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}\Big] \tag{7.61}$$

である ([4] など)。右辺を、

$$\mathcal{L}'_{\mathrm{EH}} = \mathcal{L}'^{(2)}_{\mathrm{EH}} + \mathcal{L}'^{(3)}_{\mathrm{EH}} + \cdots \tag{7.62}$$

と展開すると、

$$\mathcal{L}'^{(2)}_{\mathrm{EH}} \overset{\mathrm{w}}{=} \mathcal{L}^{(2)}_{\mathrm{EH}}, \tag{7.63}$$

$$\begin{aligned} 2\kappa\mathcal{L}'^{(3)}_{\mathrm{EH}} &= G^{(3)} + S^{(1)}G^{(2)} \\ &= G^{(3)} + \frac{1}{2}hG^{(2)} \end{aligned} \tag{7.64}$$

である。ここで、

$$G^{(3)} = G^{(3a)} + G^{(3b)}, \tag{7.65}$$

$$G^{(3a)} := \eta^{\mu\nu}\Big[{}^{(2)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}{}^{(1)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} + {}^{(1)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}{}^{(2)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} - {}^{(2)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}{}^{(1)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu} - {}^{(1)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}{}^{(2)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}\Big], \tag{7.66}$$

$$G^{(3b)} := -h^{\mu\nu}\Big[{}^{(1)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}{}^{(1)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} - {}^{(1)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}{}^{(1)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}\Big] \tag{7.67}$$

である。また、付録 B で示すように、

$$G^{(2)} = \frac{1}{4}[-(1) + 2(2') - 2(3) + (4)] \tag{7.68}$$

である。

8　重力場の作用：低次からの構成。金星人の計算

8.1　一般論

重力場の作用を

$$S_{\rm Gravity} = \sum_{n=2}^{\infty} S^{(n)}, \quad S^{(n)} = \int d^4x\ \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(n)} \tag{8.1}$$

と展開する。ここで、$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(n)}$ は $h_{\mu\nu}$ の n 次の項からなる。$h_{\mu\nu}$ による変分を、

$$\delta S^{(n+1)} = -\frac{1}{2}\int d^4x\ \delta h_{\mu\nu}\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)} \tag{8.2}$$

と置く。ただし、

$$\partial_\nu \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(1)} = 0 \tag{8.3}$$

を要請する。運動方程式は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)} = \boldsymbol{T}^{\mu\nu} \tag{8.4}$$

である。よって、

$$\partial_\nu \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(1)} = \partial_\nu(\boldsymbol{T}^{\mu\nu} - \sum_{n=2}^{\infty} \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)}) = 0 \tag{8.5}$$

となる。(3.9) は、

$$g_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{T}^{\mu\nu} = -\Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{T}^{\mu\nu} \tag{8.6}$$

であった。よって、

$$g_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{T}^{\mu\nu} = -\Gamma_{\lambda\mu\nu}\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)} \tag{8.7}$$

である。これと (8.5) より、

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu}\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)} + (\eta_{\lambda\mu} + h_{\lambda\mu})\sum_{n=2}^{\infty} \partial_\nu \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)} = 0 \tag{8.8}$$

を得る。よって、

$$\eta_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(2)} = -\Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(1)}, \tag{8.9}$$

$$\eta_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n+1)} = -\Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)} - h_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(n)} \quad (n = 2, 3, \cdots) \tag{8.10}$$

を得る。

(8.3) と (8.4) とから $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)}$ が決まる。次に (8.9) から $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}$ が決まる。そして、(8.10) から $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(4)}$, $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(5)}, \cdots$ が決まる。

$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)}$ の候補は、

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)} = \frac{1}{2}\Big[a_1\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha h_{\mu\nu}\partial_\beta h^{\mu\nu} + a_2\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\sigma h^\sigma{}_\nu + a_3\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h + a_4\eta^{\mu\nu}\partial_\mu h\partial_\nu h\Big] \tag{8.11}$$

である。$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}$ は付録 A で考察し、付録 C で決定する。$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}$ には素朴には 4!=24 項からなるが、8 組同じものがある。更に部分積分により、16 種類の項の間に 2 つの関係式が存在する。よって独立なのは 14 項である[6] 。明らかに $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}$ ぐらいまでが限界で、$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(4)}$ より高次の項を求めるのは困難である。

なお、

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(n)} \stackrel{\mathrm{w}}{=} \boldsymbol{\mathcal{L}}'^{(n)}_{\mathrm{EH}} \tag{8.12}$$

となるはずである。

8.2 最低次のラグランジアン密度

(8.11) の a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ を決定する。

まず、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(1)} &= 2a_1\Box h^{\mu\nu} + a_2(\partial^\mu\partial_\sigma h^{\sigma\nu} + \partial^\nu\partial_\sigma h^{\sigma\mu}) \\ &\quad + a_3(\partial^\mu\partial^\nu h + \eta^{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}) + 2a_4\eta^{\mu\nu}\Box h\end{aligned} \tag{8.13}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\partial_\nu\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(1)} &= 2a_1\Box(\partial h)^\mu + a_2(\partial^\mu(\partial\partial h) + \Box(\partial h)^\mu) \\ &\quad + a_3(\partial^\mu\Box h + \partial^\mu(\partial\partial h)) + 2a_4\partial^\mu\Box h,\end{aligned} \tag{8.14}$$

$$(\partial h)^\mu := \partial_\nu h^{\mu\nu}, \quad (\partial\partial h) := \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} \tag{8.15}$$

となる。これより、

$$2a_1 + a_2 = 0, \tag{8.16}$$

$$a_2 + a_3 = 0, \tag{8.17}$$

$$a_1 + a_4 = 0 \tag{8.18}$$

を得る。これより、

$$a_2 = -2a_1, \quad a_3 = 2a_1, \quad a_4 = -a_1 \tag{8.19}$$

と分かる：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(1)} &= 2a_1\Big[\Box h^{\mu\nu} - (\partial^\mu\partial_\sigma h^{\sigma\nu} + \partial^\nu\partial_\sigma h^{\sigma\mu}) \\ &\quad + (\partial^\mu\partial^\nu h + \eta^{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}) - \eta^{\mu\nu}\Box h\Big],\end{aligned} \tag{8.20}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)} = a_1\Big[\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha h_{\mu\nu}\partial_\beta h^{\mu\nu} - \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\sigma h^\sigma{}_\nu + \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu h\partial_\nu h\Big]. \tag{8.21}$$

[6] ファインマン [1] によると 18 項らしい。なぜ?

この結果は、

$$
\begin{aligned}
R^{(1)}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}R^{(1)} &= \frac{1}{2}\big[-\Box h_{\alpha\beta} + \partial_\mu\partial_\alpha h^\mu{}_\beta + \partial_\beta\partial_\mu h^\mu{}_\alpha - \partial_\beta\partial_\alpha h \\
&\quad + \eta_{\alpha\beta}\Box h - \eta_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu}\big], \qquad (8.22) \\
\frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}R &\overset{\mathrm{w}}{=} -\frac{1}{4\kappa}\Big[\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha h_{\mu\nu}\partial_\beta h^{\mu\nu} - \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\sigma h^\sigma{}_\nu + \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu h\partial_\nu h\Big] \\
&\quad + \mathcal{O}(h^3) \qquad (8.23)
\end{aligned}
$$

と整合している。また、

$$
a_1 = -\frac{1}{4\kappa} \qquad (8.24)
$$

である。

9　星の周りの粒子の軌道

この節では、球対称で静的な系を考える。具体的には、星の周りの粒子の運動を考え、近日点移動を調べる。2 次のラグランジアン密度 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(2)}$ では近日点移動の大きさを上手く説明できない。近日点移動を正しく求めるには 3 次の効果 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}$ が必要である。

光速度 c は 1 とする。

9.1　球対称, 静的な場合の一般論

(2.17) より、質点の運動方程式は、

$$\frac{d}{d\tau}\Big[(\eta_{\sigma\nu}+h_{\sigma\nu})\frac{dx^\sigma}{d\tau}\Big]=\frac{1}{2}\partial_\nu h_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} \tag{9.1}$$

となる。今、

$$h_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(h_0,h_s,h_s,h_s) \tag{9.2}$$

とする。(9.1) の空間成分 $(i=1,2,3)$ は、

$$\frac{d}{d\tau}\Big[(1+h_s)\dot{x}^i\Big]=\frac{1}{2}\Big[\partial_i h_0\dot{t}^2+\partial_i h_s(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)\Big] \tag{9.3}$$

となる。ここで、$\dot{X}:=dX/d\tau$, $t=x^0$ である。(9.1) の時間成分は、

$$\frac{d}{d\tau}\Big[(1-h_0)\dot{t}\Big]=0 \tag{9.4}$$

となる。ここで、

$$\partial_0 h_{\mu\nu}=0 \tag{9.5}$$

を仮定した。

$c=1$ とすると、

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu=-1 \tag{9.6}$$

である。今の場合、

$$(1-h_0)\dot{t}^2-(1+h_s)(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=1 \tag{9.7}$$

である。

(9.4) より、

$$(1-h_0)\dot{t}=K=\mathrm{const.} \tag{9.8}$$

である。これと (9.7) より、

$$\frac{K^2}{1-h_0}-(1+h_s)(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=1 \tag{9.9}$$

である。

ところで、

$$\frac{d}{d\tau}\Big[(1+h_s)(\dot{x}^i x^k - \dot{x}^k x^i)\Big] = \frac{d}{d\tau}\Big[(1+h_s)\dot{x}^i\Big]x^k - \frac{d}{d\tau}\Big[(1+h_s)\dot{x}^k\Big]x^i \tag{9.10}$$

である。今、$h_0,\, h_s$ が $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ のみの関数とすると、(9.3) の右辺は x^i に比例する。よって、上式の右辺は 0 である：

$$\frac{d}{d\tau}\Big[(1+h_s)(\dot{x}^i x^k - \dot{x}^k x^i)\Big] = 0. \tag{9.11}$$

これは角運動量の保存則である。特に、

$$L_1 := (1+h_s)(\dot{z}y - \dot{y}z), \tag{9.12}$$

$$L_2 := (1+h_s)(\dot{x}z - \dot{z}x), \tag{9.13}$$

$$L_3 := (1+h_s)(\dot{y}x - \dot{x}y) \equiv L \tag{9.14}$$

は保存する。

今、$L_1 = L_2 = 0$ を仮定する。この時、極座標表示で、$\varphi = \pi/2$ $(\dot{\varphi}=0)$ である[7)] 。また、

$$L = (1+h_s)r^2\dot{\theta}, \tag{9.15}$$

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2 = r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 = r^2\dot{\theta}^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\dot{\theta}^2 \tag{9.16}$$

である。(9.16) より、

$$\frac{K^2}{1-h_0} - (1+h_s)\dot{\theta}^2\Big[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\Big] = 1 \tag{9.17}$$

である。また、(9.15) より、

$$\dot{\theta} = \frac{L}{(1+h_s)r^2} \tag{9.18}$$

なので、

$$\frac{K^2}{1-h_0} - \frac{L^2}{(1+h_s)r^4}\Big[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\Big] = 1 \tag{9.19}$$

となる。今、

$$u := \frac{1}{r} \tag{9.20}$$

とすると、

$$\frac{du}{d\theta} = -u^2\frac{dr}{d\theta}, \tag{9.21}$$

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \tag{9.22}$$

---

7) ここでの $\theta,\, \varphi$ は多くの文献と逆である。つまり、ここでの φ は通常は θ と書かれるものである。

なので、

$$\frac{K^2}{1-h_0}-\frac{L^2}{(1+h_s)}\Big[u^2+\Big(\frac{du}{d\theta}\Big)^2\Big]=1, \tag{9.23}$$

$$u^2+\Big(\frac{du}{d\theta}\Big)^2=\Big(\frac{K^2}{1-h_0}-1\Big)\frac{1+h_s}{L^2} \tag{9.24}$$

を得る。

今、M を中心 $(r=0)$ にある星の質量とし、

$$\phi := -2GMu, \tag{9.25}$$

$$h_0 \ = \ -\alpha\phi - a\phi^2+\mathcal{O}(\phi^3), \tag{9.26}$$

$$h_s \ = \ -\beta\phi - b\phi^2+\mathcal{O}(\phi^3) \tag{9.27}$$

を仮定する。このとき、

$$\begin{aligned}\frac{K^2}{1-h_0}-1 &= K^2(1-\alpha\phi-a\phi^2+\alpha^2\phi^2+\cdots)-1\\ &= K^2-1-K^2\alpha\phi+K^2(\alpha^2-a)\phi^2+\cdots\,,\end{aligned} \tag{9.28}$$

$$\begin{aligned}\Big(\frac{K^2}{1-h_0}-1\Big)\frac{1+h_s}{L^2} &= \frac{K^2-1}{L^2}-\frac{K^2\alpha}{L^2}\phi+\frac{K^2}{L^2}(\alpha^2-a)\phi^2\\ &\quad -\frac{K^2-1}{L^2}\beta\phi-\frac{K^2-1}{L^2}b\phi^2+\frac{K^2\alpha\beta}{L^2}\phi^2+\mathcal{O}(\phi^3)\\ &= A+Bu+Cu^2+\cdots\end{aligned} \tag{9.29}$$

となる。ただし、

$$A=\frac{K^2-1}{L^2}, \tag{9.30}$$

$$B=\frac{2GM}{L^2}\Big[K^2\alpha+(K^2-1)\beta\Big], \tag{9.31}$$

$$C=\frac{(2GM)^2}{L^2}\Big[K^2(\alpha^2+\alpha\beta-a)-(K^2-1)b\Big] \tag{9.32}$$

である。よって、

$$u^2+\Big(\frac{du}{d\theta}\Big)^2=A+Bu+Cu^2+\cdots \tag{9.33}$$

となる。これを θ で微分して、$\cdots$ を無視すると、

$$u+\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{1}{2}B+Cu, \tag{9.34}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{1}{2}B-(1-C)u \tag{9.35}$$

を得る。

$$u=\frac{B}{2(1-C)}+v \tag{9.36}$$

とすると、

$$\frac{d^2v}{d\theta^2} = -(1-C)v \tag{9.37}$$

となる。これの解は、

$$v = v_0\cos(\sqrt{1-C}\theta) + v_1\sin(\sqrt{1-C}\theta) \tag{9.38}$$

であり、近日点は、角度が

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1-C}} = 2\pi + C\pi + \mathcal{O}(C^2) \tag{9.39}$$

変化するたびび現れる。近日点の 1 周期ごとの歳差は、

$$\begin{aligned}\delta = C\pi &= \pi\frac{(2GM)^2}{L^2}\Big[K^2(\alpha^2+\alpha\beta-a)-(K^2-1)b\Big]\\ &\approx \pi\frac{(2GM)^2}{L^2}(\alpha^2+\alpha\beta-a)\end{aligned} \tag{9.40}$$

である。ここで、$K^2 \approx 1$ とした。

9.2 最低次の近似とその補正

$h_{\mu\nu}$ を

$$\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(1)} = \boldsymbol{T}^{\mu\nu} \tag{9.41}$$

から求めると、

$$(\alpha_{(1)}, \beta_{(1)}, a_{(1)}, b_{(1)}) = (1, 1, 0, 0) \tag{9.42}$$

となることを、§9.3 で示す。添え字 $_{(1)}$ は、最低の近似であることを表す。なお、

$$\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(1)} + \boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(2)} = \boldsymbol{T}^{\mu\nu} \tag{9.43}$$

を考えた場合は、

$$(\alpha_{(2)}, \beta_{(2)}, a_{(2)}, b_{(2)}) = \left(1, 1, \frac{1}{2}, -\frac{3}{8}\right) \tag{9.44}$$

となる [1]。添え字 $_{(2)}$ は、2 次までの近似であることを表す。よって、

$$\delta_{(1)} = \pi\frac{(2GM)^2}{L^2}\cdot 2, \tag{9.45}$$

$$\delta_{(2)} = \pi\frac{(2GM)^2}{L^2}\cdot \frac{3}{2}, \tag{9.46}$$

$$\delta_{(1)} = \frac{4}{3}\delta_{(2)} \tag{9.47}$$

である。$\delta_{(2)}$ は実験と合うが、$\delta_{(1)}$ は合わない。
　なお、アインシュタイン方程式の解は、

$$
g_{00} = -\Big(1+\frac{\phi}{4}\Big)^2\Big(1-\frac{\phi}{4}\Big)^{-2}, \tag{9.48}
$$

$$
g_{ik} = \delta_{ik}\Big(1-\frac{\phi}{4}\Big)^4 \tag{9.49}
$$

である [4]。よって、

$$
\begin{aligned}
h_0 &= 1-\Big(1+\frac{\phi}{4}\Big)^2\Big(1-\frac{\phi}{4}\Big)^{-2} \\
&= 1-\Big(1+\frac{\phi}{2}+\frac{\phi^2}{16}\Big)\Big(1+\frac{\phi}{2}+\frac{3\phi^2}{16}+\frac{\phi^3}{16}+\cdots\Big) \\
&= -\phi-\frac{1}{2}\phi^2-\frac{3}{16}\phi^3+\cdots
\end{aligned} \tag{9.50}
$$

および、

$$
\begin{aligned}
h_s &= -1+\Big(1-\frac{\phi}{4}\Big)^4 \\
&= -\phi+\frac{3}{8}\phi^2+\frac{1}{16}\phi^3-\frac{1}{256}\phi^4
\end{aligned} \tag{9.51}
$$

を得る。

9.3　最低次のアインシュタイン方程式の解

　(9.41) を解こう。(9.41) は、

$$
\chi^{\mu\nu} \;=\; \kappa \boldsymbol{T}^{\mu\nu}, \tag{9.52}
$$

$$
\chi_{\mu\nu} := R^{(1)}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)} \tag{9.53}
$$

となる。
　今、2 階テンソル $X_{\mu\nu}$ に対して、

$$
\bar{X}_{\mu\nu} := X_{(\mu\nu)}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}X\,, \quad X := X^\sigma{}_\sigma\,, \quad X_{(\mu\nu)} := \frac{1}{2}(X_{\mu\nu}+X_{\nu\mu}) \tag{9.54}
$$

とする。このとき、

$$
\bar{X} = (1-D/2)X = -X \tag{9.55}
$$

である。$D=4$ は次元である。よって、対称テンソルに対して、

$$
\begin{aligned}
\bar{\bar{X}}_{\mu\nu} &= X_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}X+\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}X \\
&= X_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{9.56}
$$

となる。

さて、

$$\chi_{\mu\nu} = \bar{R}^{(1)}_{\mu\nu} \tag{9.57}$$

なので、

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \kappa \bar{\boldsymbol{T}}_{\mu\nu} \tag{9.58}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{\lambda\beta} &= \frac{1}{2}\big[-\Box h_{\lambda\beta} + \partial_\mu \partial_\lambda h^\mu{}_\beta + \partial_\beta \partial_\mu h^\mu{}_\lambda - \partial_\beta \partial_\lambda h \big] \\ &= \frac{1}{2}\big[-\Box h_{\lambda\beta} + 2\partial_\mu \partial_{(\lambda} \bar{h}^\mu{}_{\beta)} \big], \qquad (9.59) \\ & \qquad (9.60) \end{aligned}$$

となる。ここでローレンス条件

$$\partial_\mu \bar{h}^\mu{}_\nu = 0 \tag{9.61}$$

を課すと、

$$\Box h_{\mu\nu} = -2\kappa \bar{\boldsymbol{T}}_{\mu\nu} \tag{9.62}$$

を得る。

さて、$h_{\mu\nu}$ について 0 次の近似で、

$$\boldsymbol{T}^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu, \quad \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1 \tag{9.63}$$

である。ρ は質量密度で、u^μ は速度ベクトル場である。このとき、

$$\bar{\boldsymbol{T}}_{\mu\nu} = \rho\Big(u_\mu u_\nu + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \Big) \approx \frac{1}{2}\rho \cdot \mathrm{diag}(1,1,1,1) \tag{9.64}$$

である。よって、

$$h_{\mu\nu} \approx \frac{\kappa M}{4\pi r} \cdot \mathrm{diag}(1,1,1,1) = \frac{2GM}{r} \cdot \mathrm{diag}(1,1,1,1) \tag{9.65}$$

となる。これより、(9.42) を得る。

9.4 PPN パラメーター

Parametrized post-Newtonian(PPN) 展開では、

$$h_0 = -\phi - \frac{\beta_{\mathrm{PPN}}}{2}\phi^2 + \mathcal{O}(\phi^3), \tag{9.66}$$

$$h_s = -\gamma_{\mathrm{PPN}}\phi + \mathcal{O}(\phi^2) \tag{9.67}$$

である。つまり、

$$(\alpha, \beta, a) = (1, \gamma_{\mathrm{PPN}}, \frac{\beta_{\mathrm{PPN}}}{2}) \tag{9.68}$$

である。このとき、(9.40) は、

$$
\begin{aligned}
\delta &\approx \pi\frac{(2GM)^2}{L^2}(\alpha^2+\alpha\beta-a) \\
&= \pi\frac{6(GM)^2}{L^2}\frac{2-\beta_{\mathrm{PPN}}+2\gamma_{\mathrm{PPN}}}{3} \equiv \delta_{\mathrm{GR}}\frac{2-\beta_{\mathrm{PPN}}+2\gamma_{\mathrm{PPN}}}{3}
\end{aligned} \tag{9.69}
$$

となる。一般相対論では、$\beta_{\mathrm{PPN}}=\gamma_{\mathrm{PPN}}=1$ で、

$$
\delta \approx \delta_{\mathrm{GR}} = \pi\frac{6(GM)^2}{L^2} \tag{9.70}
$$

となる。

PPN 展開について詳しくは、私のノート [5] を参照のこと。また、惑星の影響による、ニュートン力学での近日点移動については、私のノート [6] を参照のこと。

A　$h_{\mu\nu}$ の 3 次のラグランジアン密度：一般論

$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}$ を考える。今、

$$(i_1 i_2 i_3 i_4) := h^{\mu_{i_1}}{}_{\mu_1}\partial_{\mu_2} h^{\mu_{i_2}}{}_{\mu_3}\partial^{\mu_{i_3}} h^{\mu_{i_4}}{}_{\mu_4} \tag{A.1}$$

とする。ここで、$i_k = 1, 2, 3, 4$ であり、$i_k \neq i_l (k \neq l)$ である。$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}$ は、

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)} = \sum_{(i_1, i_2, i_3, i_4) \in S_4} g_{(i_1 i_2 i_3 i_4)}(i_1 i_2 i_3 i_4) \tag{A.2}$$

と 24 項で書ける。S_4 は 4 次の置換群である。ただし、

$$(1342) = (1234)\,, \quad (3214) = (2341)\,, \quad (3412) = (2431)\,, \quad (4213) = (2143), \tag{A.3}$$

$$(4123) = (3421)\,, \quad (4231) = (3142)\,, \quad (4312) = (2134)\,, \quad (4321) = (3124) \tag{A.4}$$

の関係があるので、16 項に減らせる。よって、一般の形は、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)} &= g_1 h\partial_\alpha h\partial^\alpha h + g_2 h\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial^\gamma h_{\alpha\beta} + g_3 h\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^\gamma{}_\alpha + g_4 h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h\partial^\beta h \\
&\quad + g_5 h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h^\delta{}_\gamma\partial^\beta h^\gamma{}_\delta + g_6 h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h^\beta{}_\delta + g_7 h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h^{\alpha\delta}\partial^\gamma h^\beta{}_\delta + g_8 h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h^{\alpha\delta}\partial_\delta h^{\beta\gamma} \\
&\quad + g_9 h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h\partial^\alpha h^{\beta\gamma} + g_{10} h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h\partial^\gamma h^{\alpha\beta} + g_{11} h(\partial h)^\alpha\partial_\alpha h + g_{12} h_{\alpha\beta}\partial^\beta h^{\alpha\gamma}(\partial h)_\gamma \\
&\quad + g_{13} h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h(\partial h)^\beta + g_{14} h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h^{\alpha\beta}(\partial h)^\gamma + g_{15} h(\partial h)_\alpha(\partial h)^\alpha + g_{16} h_{\alpha\beta}(\partial h)^\alpha(\partial h)^\beta \\
&\equiv \sum_{i=1}^{16} g_i[i]
\end{aligned} \tag{A.5}$$

である。ここで、

$$(\partial h)^\alpha := \partial_\beta h^{\beta\alpha} \tag{A.6}$$

である。また、

$$(\partial\partial h) := \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} \tag{A.7}$$

とする。以下、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{(2)} &:= -2\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}}{\partial h_{\mu\nu}} - \partial_\lambda\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}}{\partial(\partial_\lambda h_{\mu\nu})}\Big) \\
&\equiv \sum_{i=1}^{16} g_i\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[i]}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

を求め、次に

$$(\partial\boldsymbol{\chi}_{[i]})_\mu := \eta_{\lambda\mu}\partial_\nu\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[i]} \tag{A.9}$$

を求める。(8.9) は、

$$\sum_{i=1}^{16} g_i(\partial\boldsymbol{\chi}_{[i]})_\mu = -\Gamma_{\mu\alpha\beta}\boldsymbol{\chi}^{\alpha\beta}_{(1)} \equiv V_\mu \tag{A.10}$$

であり、

$$\boldsymbol{\chi}^{\alpha\beta}_{(1)} = 4g\big[-\Box h^{\alpha\beta} + \partial^\alpha(\partial h)^\beta + \partial^\beta(\partial h)^\alpha - \partial^\beta\partial^\alpha h + \eta^{\alpha\beta}\Box h - \eta^{\alpha\beta}(\partial\partial h)\big], \tag{A.11}$$

$$g := \frac{1}{8\kappa} \tag{A.12}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} V_\mu/g = &-2\partial_\mu h_{\alpha\beta}\Box h^{\alpha\beta} + 4\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\alpha(\partial h)^\beta - 2\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\beta\partial^\alpha h \\ &+2\partial_\mu h\Box h - 2\partial_\mu h(\partial\partial h) \\ &+4\partial_\alpha h_{\mu\beta}\Box h^{\alpha\beta} - 4\partial_\alpha h_{\mu\beta}\partial^\alpha(\partial h)^\beta - 4\partial_\alpha h_{\mu\beta}\partial^\beta(\partial h)^\alpha + 4\partial_\alpha h_{\mu\beta}\partial^\beta\partial^\alpha h \\ &-4(\partial h)_\mu\Box h + 4(\partial h)_\mu(\partial\partial h) \end{aligned} \tag{A.13}$$

となる。この式から $\{g_i\}_{i=1}^{16}$ が決まる。

$\{[i]\}_{i=1}^{16}$ は独立ではない。今、$a\partial_\mu b\partial_\nu c$ という量を考える。a, b, c のうちに上付き添え字 μ, ν も含まれ、$a\partial_\mu b\partial_\nu c$ はスカラーとする。このとき、

$$\begin{aligned} a\partial_\mu b\partial_\nu c &\overset{\mathrm{w}}{=} -\partial_\nu(a\partial_\mu b)c \\ &= -\partial_\nu a\partial_\mu bc - a\partial_\nu\partial_\mu bc \\ &\overset{\mathrm{w}}{=} -\partial_\nu a\partial_\mu bc + \partial_\mu(ac)\partial_\nu b \\ &= -c\partial_\nu a\partial_\mu b + c\partial_\mu a\partial_\nu b + a\partial_\mu c\partial_\nu b \end{aligned} \tag{A.14}$$

より、$\{[i]\}_{i=1}^{16}$ の間に関係が付く。ただし、$a^{\mu\nu}$ が対称テンソルの時、

$$\begin{aligned} a^{\mu\nu}\partial_\mu b\partial_\nu c &\overset{\mathrm{w}}{=} -c\partial_\nu a^{\mu\nu}\partial_\mu b + c\partial_\mu a^{\mu\nu}\partial_\nu b + a^{\mu\nu}\partial_\mu c\partial_\nu b \\ &= a^{\mu\nu}\partial_\nu c\partial_\mu b \end{aligned} \tag{A.15}$$

なので、$a\partial_\mu b\partial^\mu c$ や $h^{\mu\nu}\partial_\mu b\partial_\nu c$ のタイプの項は考えなくてよい。まず、

$$\begin{aligned} [3] &= h\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^\gamma{}_\alpha \\ &\overset{\mathrm{w}}{=} -h^\gamma{}_\alpha\partial_\beta h\partial_\gamma h^{\alpha\beta} + h^\gamma{}_\alpha\partial_\gamma h\partial_\beta h^{\alpha\beta} + h\partial_\beta h^{\alpha\beta}\partial_\gamma h^\gamma{}_\alpha \\ &= -[9] + [13] + [15] \end{aligned} \tag{A.16}$$

である。また、

$$\begin{aligned} [6] &= h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h^\beta{}_\delta \\ &\overset{\mathrm{w}}{=} -h^\beta{}_\delta\partial^\alpha h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h_{\alpha\beta} + h^\beta{}_\delta\partial_\gamma h^{\gamma\delta}\partial^\alpha h_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h^{\gamma\delta}\partial^\alpha h^\beta{}_\delta \\ &= -[8] + [16] + [12] \end{aligned} \tag{A.17}$$

である。なお、

$$\begin{aligned} [11] &= h\partial_\beta h^{\beta\alpha}\partial_\alpha h \\ &\overset{\mathrm{w}}{=} -h\partial_\beta h^{\beta\alpha}\partial_\alpha h + h\partial_\alpha h^{\beta\alpha}\partial_\beta h + h\partial_\alpha h^{\beta\alpha}\partial_\beta h = [11] \end{aligned} \tag{A.18}$$

および、

$$
\begin{aligned}
[14] &= h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\delta h^{\delta\gamma} \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} -h^{\delta\gamma}\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\delta h_{\alpha\beta} + h^{\delta\gamma}\partial_\delta h^{\alpha\beta}\partial_\gamma h_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\partial_\delta h^{\alpha\beta}\partial_\gamma h^{\delta\gamma} = [14]
\end{aligned} \tag{A.19}
$$

である。よって、

$$
[3] + [9] - [13] - [15] \overset{\mathrm{w}}{=} 0, \quad [6] + [8] - [12] - [16] \overset{\mathrm{w}}{=} 0 \tag{A.20}
$$

である。これより、[15], [16] を消すこともできる。

付録 C で $\{(\partial\boldsymbol{\chi}_{[i]})_\mu\}_{i=1}^{16}$ を計算し、$\{g_i\}$ に課される条件式たちを求める。

B 3次のアインシュタイン・ヒルベルトのラグランジアン密度

アインシュタイン・ヒルベルトのラグランジアン密度を $h_{\mu\nu}$ の3次まで展開する。

B.1 アインシュタイン・ヒルベルトのラグランジアン密度

(7.64), (7.66), (7.67), (8.12) より、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)} &\overset{\mathrm{w}}{=} \boldsymbol{\mathcal{L}}'^{(3)}_{\mathrm{EH}}, && \text{(B.1)}\\
\boldsymbol{\mathcal{L}}'^{(3)}_{\mathrm{EH}}/g &= 4G^{(3)} + 2hG^{(2)} = \sum_{k=1}^{7} \tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_k, && \text{(B.2)}\\
G^{(3)} &= G^{(3a)} + G^{(3b)}, && \text{(B.3)}\\
4G^{(3a)} &= 4\eta^{\mu\nu}\left[{}^{(2)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}{}^{(1)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} + {}^{(1)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}{}^{(2)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} - {}^{(2)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}{}^{(1)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu} - {}^{(1)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}{}^{(2)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}\right] \\
&\equiv \tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_1 + \tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_2 + \tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_3 + \tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_4, && \text{(B.4)}\\
4G^{(3b)} &= -4h^{\mu\nu}\left[{}^{(1)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}{}^{(1)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} - {}^{(1)}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}{}^{(1)}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}\right] \\
&\equiv \tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_5 + \tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_6, && \text{(B.5)}\\
\tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_7 &:= 2hG^{(2)} && \text{(B.6)}
\end{aligned}
$$

である。$g = 1/(8\kappa)$ である。今、$a^{\mu\nu}, b^{\mu\nu}, c^{\mu\nu}$ を対称テンソルとし、

$$
\begin{aligned}
G_1(a,b,c) &:= 4a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\Gamma_{\sigma\gamma\nu}\Gamma_{\lambda\mu\rho}, && \text{(B.7)}\\
G_2(a,b,c) &:= 4a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\Gamma_{\sigma\gamma\rho}\Gamma_{\lambda\mu\nu} && \text{(B.8)}
\end{aligned}
$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_1 &= -G_1(\eta,h,\eta), && \text{(B.9)}\\
\tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_2 &= -G_1(\eta,\eta,h), && \text{(B.10)}\\
\tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_5 &= -G_1(h,\eta,\eta), && \text{(B.11)}\\
\tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_3 &= G_2(\eta,h,\eta), && \text{(B.12)}\\
\tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_4 &= G_2(\eta,\eta,h), && \text{(B.13)}\\
\tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_6 &= G_2(h,\eta,\eta), && \text{(B.14)}\\
\tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_7 &= \frac{1}{2}h[G_1(\eta,\eta,\eta) - G_2(\eta,\eta,\eta)] && \text{(B.15)}
\end{aligned}
$$

となる。

まず $G_1(a,b,c), G_2(a,b,c)$ を求める。定義より、

$$
\begin{aligned}
G_1(a,b,c) &= a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}[\partial_\gamma h_{\sigma\nu} + \partial_\nu h_{\sigma\gamma} - \partial_\sigma h_{\gamma\nu}][\partial_\mu h_{\lambda\rho} + \partial_\rho h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\rho}], && \text{(B.16)}\\
G_2(a,b,c) &= a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}[\partial_\gamma h_{\sigma\rho} + \partial_\rho h_{\sigma\gamma} - \partial_\sigma h_{\gamma\rho}][\partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}] \\
&= a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\gamma h_{\sigma\rho}[2\partial_\mu h_{\lambda\nu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}] && \text{(B.17)}
\end{aligned}
$$

である。さらに展開すると、

$$
\begin{aligned}
G_1(a,b,c) &= a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\gamma h_{\sigma\nu}\partial_\mu h_{\lambda\rho} + a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\gamma h_{\sigma\nu}\partial_\rho h_{\lambda\mu} - a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\gamma h_{\sigma\nu}\partial_\lambda h_{\mu\rho} \\
&\quad + a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\nu h_{\sigma\gamma}\partial_\mu h_{\lambda\rho} + a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\nu h_{\sigma\gamma}\partial_\rho h_{\lambda\mu} - a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\nu h_{\sigma\gamma}\partial_\lambda h_{\mu\rho} \\
&\quad - a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\sigma h_{\gamma\nu}\partial_\mu h_{\lambda\rho} - a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\sigma h_{\gamma\nu}\partial_\rho h_{\lambda\mu} + a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\sigma h_{\gamma\nu}\partial_\lambda h_{\mu\rho}, \quad \text{(B.18)} \\
G_2(a,b,c) &= 2a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\gamma h_{\sigma\rho}\partial_\mu h_{\lambda\nu} - a^{\mu\nu}b^{\rho\sigma}c^{\gamma\lambda}\partial_\gamma h_{\sigma\rho}\partial_\lambda h_{\mu\nu} \quad \text{(B.19)}
\end{aligned}
$$

である。
　よって、

$$
\begin{aligned}
G_1(\eta,\eta,\eta) &= \partial_\gamma h_\sigma{}^\mu \partial_\mu h^{\gamma\sigma} + \partial_\gamma h_{\sigma\mu}\partial^\sigma h^{\gamma\mu} - \partial_\gamma h_{\sigma\mu}\partial^\gamma h^{\mu\sigma} \\
&\quad + \partial^\mu h_{\sigma\gamma}\partial_\mu h^{\gamma\sigma} + \partial^\mu h_{\sigma\gamma}\partial^\sigma h^\gamma{}_\mu - \partial^\mu h_{\sigma\gamma}\partial^\gamma h_{\mu\sigma} \\
&\quad - \partial^\sigma h^{\gamma\mu}\partial_\mu h_{\gamma\sigma} - \partial_\sigma h_{\gamma\mu}\partial^\sigma h^{\gamma\mu} + \partial_\sigma h_{\gamma\mu}\partial^\gamma h^{\mu\sigma} \\
&= (2') + (2') - (1) + (1) + (2') - (2') - (2') - (1) + (2') \\
&= 2(2') - (1) \quad \text{(B.20)}
\end{aligned}
$$

となる。ここで、

$$
\begin{aligned}
(1) &:= \partial_\alpha h_{\mu\nu}\partial^\alpha h^{\mu\nu}, \quad \text{(B.21)} \\
(2) &:= \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\sigma h^\sigma{}_\nu \overset{\mathrm{w}}{=} (2'), \quad \text{(B.22)} \\
(3) &:= \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h, \quad \text{(B.23)} \\
(4) &:= \partial_\mu h \partial^\mu h, \quad \text{(B.24)} \\
(2') &:= \partial_\sigma h_\mu{}^\nu \partial_\nu h^{\mu\sigma} \quad \text{(B.25)}
\end{aligned}
$$

である。また、

$$
\begin{aligned}
G_2(\eta,\eta,\eta) &= 2\partial_\gamma h \partial_\mu h^{\gamma\mu} - \partial_\gamma h \partial^\gamma h \\
&= 2(3) - (4) \quad \text{(B.26)}
\end{aligned}
$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
G^{(2)} &= \frac{1}{4}[G_1(\eta,\eta,\eta) - G_2(\eta,\eta,\eta)] \\
&= \frac{1}{4}[-(1) + 2(2') - 2(3) + (4)] \quad \text{(B.27)}
\end{aligned}
$$

となる。
　また、

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_7 &= h[-\frac{1}{2}(1) + (2') - (3) + \frac{1}{2}(4)] \\
&= -\frac{1}{2}[2] + [3] - [11] + \frac{1}{2}[1] \quad \text{(B.28)}
\end{aligned}
$$

である。

また、

$$\begin{aligned}G_1(\eta,h,\eta) &= h^{\rho\sigma}\partial^\lambda h_{\sigma\mu}\partial^\mu h_{\lambda\rho} + h^{\rho\sigma}\partial_\gamma h_{\sigma\mu}\partial_\rho h^{\gamma\mu} - h^{\rho\sigma}\partial_\gamma h_\sigma{}^\mu\partial^\gamma h_{\mu\rho} \\ &\quad + h^{\rho\sigma}\partial^\mu h_{\sigma\gamma}\partial_\mu h^\gamma{}_\rho + h^{\rho\sigma}\partial_\mu h_{\sigma\gamma}\partial_\rho h^{\gamma\mu} - h^{\rho\sigma}\partial^\mu h_{\sigma\gamma}\partial^\gamma h_{\mu\rho} \\ &\quad - h^{\rho\sigma}\partial_\sigma h^{\gamma\mu}\partial_\mu h_{\gamma\rho} - h^{\rho\sigma}\partial_\sigma h_{\gamma\mu}\partial_\rho h^{\gamma\mu} + h^{\rho\sigma}\partial_\sigma h^{\gamma\mu}\partial_\gamma h_{\mu\rho} \\ &= [8]+[6]-[7]+[7]+[6]-[8]-[6]-[5]+[6] \\ &= -[5]+2[6] \end{aligned} \tag{B.29}$$

および、

$$\begin{aligned}G_2(\eta,h,\eta) &= 2h^{\rho\sigma}\partial_\gamma h_{\sigma\rho}(\partial h)^\gamma - h^{\rho\sigma}\partial_\gamma h_{\sigma\rho}\partial^\gamma h \\ &= 2[14]-[10] \end{aligned} \tag{B.30}$$

である。また、

$$\begin{aligned}G_1(\eta,\eta,h) &= h^{\gamma\lambda}\partial_\gamma h^{\sigma\mu}\partial_\mu h_{\lambda\sigma} + h^{\gamma\lambda}\partial_\gamma h^{\sigma\mu}\partial_\sigma h_{\lambda\mu} - h^{\gamma\lambda}\partial_\gamma h^{\sigma\mu}\partial_\lambda h_{\mu\sigma} \\ &\quad + h^{\gamma\lambda}\partial^\mu h^\sigma{}_\gamma\partial_\mu h_{\lambda\sigma} + h^{\gamma\lambda}\partial^\mu h_{\sigma\gamma}\partial^\sigma h_{\lambda\mu} - h^{\gamma\lambda}\partial_\mu h_{\sigma\gamma}\partial_\lambda h^{\mu\sigma} \\ &\quad - h^{\gamma\lambda}\partial^\sigma h_{\gamma\mu}\partial^\mu h_{\lambda\sigma} - h^{\gamma\lambda}\partial_\sigma h_{\gamma\mu}\partial^\sigma h_\lambda{}^\mu + h^{\gamma\lambda}\partial_\sigma h_{\gamma\mu}\partial_\lambda h^{\mu\sigma} \\ &= [6]+[6]-[5]+[7]+[8]-[6]-[8]-[7]+[6] \\ &= -[5]+2[6] \end{aligned} \tag{B.31}$$

および、

$$\begin{aligned}G_2(\eta,\eta,h) &= 2h^{\gamma\lambda}\partial_\gamma h(\partial h)_\lambda - h^{\gamma\lambda}\partial_\gamma h\partial_\lambda h \\ &= 2[13]-[4] \end{aligned} \tag{B.32}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}G_1(\eta,\eta,h) &= h^{\mu\nu}\partial_\gamma h_{\sigma\nu}\partial_\mu h^{\gamma\sigma} + h^{\mu\nu}\partial^\gamma h_{\sigma\nu}\partial^\sigma h_{\gamma\mu} - h^{\mu\nu}\partial_\gamma h_{\sigma\nu}\partial^\gamma h_\mu{}^\sigma \\ &\quad + h^{\mu\nu}\partial_\nu h_{\sigma\gamma}\partial_\mu h^{\gamma\sigma} + h^{\mu\nu}\partial_\nu h^{\sigma\gamma}\partial_\sigma h_{\gamma\mu} - h^{\mu\nu}\partial_\nu h^{\sigma\gamma}\partial_\gamma h_{\mu\sigma} \\ &\quad - h^{\mu\nu}\partial_\sigma h_{\gamma\nu}\partial_\mu h^{\gamma\sigma} - h^{\mu\nu}\partial_\sigma h_{\gamma\nu}\partial^\sigma h^\gamma{}_\mu + h^{\mu\nu}\partial^\sigma h_{\gamma\nu}\partial^\gamma h_{\mu\sigma} \\ &= [6]+[8]-[7]+[5]+[6]-[6]-[6]-[7]+[8] \\ &= [5]-2[7]+2[8] \end{aligned} \tag{B.33}$$

および、

$$\begin{aligned}G_2(\eta,\eta,h) &= 2h^{\mu\nu}\partial^\gamma h\partial_\mu h_{\gamma\nu} - h^{\mu\nu}\partial^\gamma h\partial_\gamma h_{\mu\nu} \\ &= 2[9]-[10] \end{aligned} \tag{B.34}$$

となる。よって、

$$\tilde{\mathcal{L}}_1 = [5] - 2[6], \tag{B.35}$$
$$\tilde{\mathcal{L}}_2 = [5] - 2[6], \tag{B.36}$$
$$\tilde{\mathcal{L}}_5 = -[5] + 2[7] - 2[8], \tag{B.37}$$
$$\tilde{\mathcal{L}}_3 = 2[14] - [10], \tag{B.38}$$
$$\tilde{\mathcal{L}}_4 = 2[13] - [4], \tag{B.39}$$
$$\tilde{\mathcal{L}}_6 = 2[9] - [10], \tag{B.40}$$
$$\tilde{\mathcal{L}}_7 = -\frac{1}{2}[2] + [3] - [11] + \frac{1}{2}[1] \tag{B.41}$$

を得る。以上より、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'^{(3)}_{\mathrm{EH}}/g &= \sum_{k=1}^{7} \tilde{\mathcal{L}}_k \\ &= \frac{1}{2}[1] - \frac{1}{2}[2] + [3] - [4] + [5] - 4[6] + 2[7] - 2[8] + 2[9] - 2[10] \\ &\quad -[11] + 2[13] + 2[14]\end{aligned} \tag{B.42}$$

を得る。

文献 [7] には、背景時空の周りで、アインシュタイン・ヒルベルトのラグランジアン密度を 4 次まで展開した表式が載っている。

B.2 ファインマンのラグランジアン密度

[1] によると、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(3)} &\overset{\mathrm{w}}{=} -g\Big[h^{\alpha\beta}\bar{h}^{\gamma\delta}\partial_\gamma\partial_\delta\bar{h}_{\alpha\beta} + h_\gamma{}^\beta h^{\gamma\alpha}\Box\bar{h}_{\alpha\beta} - 2h^{\alpha\beta}h_\beta{}^\delta\partial_\gamma\partial_\delta\bar{h}^\gamma{}_\alpha \\ &\qquad +2\bar{h}_{\alpha\beta}(\partial\bar{h})^\alpha(\partial\bar{h})^\beta + \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta}\partial_\gamma\partial_\delta\bar{h}^{\gamma\delta} + \frac{1}{4}hh\partial_\gamma\partial_\delta\bar{h}^{\gamma\delta}\Big] \\ &\equiv \mathcal{L}^{(3)}_{\mathrm{Feynman}}\end{aligned} \tag{B.43}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}h^{\alpha\beta}\bar{h}^{\gamma\delta}\partial_\gamma\partial_\delta\bar{h}_{\alpha\beta} &\overset{\mathrm{w}}{=} -\partial_\delta(h^{\alpha\beta}\bar{h}^{\gamma\delta})\partial_\gamma\bar{h}_{\alpha\beta} \\ &= -\bar{h}^{\gamma\delta}\partial_\delta h^{\alpha\beta}\partial_\gamma\bar{h}_{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}(\partial\bar{h})^\gamma\partial_\gamma\bar{h}_{\alpha\beta} \\ &= -h^{\gamma\delta}\partial_\delta h^{\alpha\beta}\partial_\gamma h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}h\partial^\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\gamma h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}h^{\gamma\delta}\partial_\delta h\partial_\gamma h - \frac{1}{4}h\partial_\alpha h\partial^\alpha h \\ &\quad -h^{\alpha\beta}(\partial h)^\gamma\partial_\gamma h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\partial^\gamma h\partial_\gamma h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}h(\partial h)^\gamma\partial_\gamma h - \frac{1}{4}h\partial^\gamma h\partial_\gamma h \\ &= -[5] + \frac{1}{2}[2] + \frac{1}{2}[4] - \frac{1}{2}[1] - [14] + \frac{1}{2}[10] + \frac{1}{2}[11],\end{aligned} \tag{B.44}$$

$$\begin{aligned}h_\gamma{}^\beta h^{\gamma\alpha}\Box\bar{h}_{\alpha\beta} &\overset{\mathrm{w}}{=} -\partial_\delta(h_\gamma{}^\beta h^{\gamma\alpha})\partial^\delta\bar{h}_{\alpha\beta} \\ &= -h^{\gamma\alpha}\partial_\delta h_\gamma{}^\beta\partial^\delta\bar{h}_{\alpha\beta} - h_\gamma{}^\beta\partial_\delta h^{\gamma\alpha}\partial^\delta\bar{h}_{\alpha\beta} \\ &= -h^{\gamma\alpha}\partial_\delta h_\gamma{}^\beta\partial^\delta h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}h^{\gamma\alpha}\partial_\delta h_{\gamma\alpha}\partial^\delta h - h_\gamma{}^\beta\partial_\delta h^{\gamma\alpha}\partial^\delta h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}h_{\gamma\alpha}\partial_\delta h^{\gamma\alpha}\partial^\delta h \\ &= -2[7] + [10],\end{aligned} \tag{B.45}$$

$$
\begin{aligned}
-2h^{\alpha\beta}h_\beta{}^\delta\partial_\gamma\partial_\delta\bar{h}^\gamma{}_\alpha &\overset{\mathrm{w}}{=} 2\partial_\gamma(h^{\alpha\beta}h_\beta{}^\delta)\partial_\delta\bar{h}^\gamma{}_\alpha \\
&= 2h_\beta{}^\delta\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\delta\bar{h}^\gamma{}_\alpha + 2h^{\alpha\beta}\partial_\gamma h_\beta{}^\delta\partial_\delta\bar{h}^\gamma{}_\alpha \\
&= 2h_\beta{}^\delta\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\delta h^\gamma{}_\alpha - h_\beta{}^\delta(\partial h)^\beta\partial_\delta h + 2h^{\alpha\beta}\partial_\gamma h_\beta{}^\delta\partial_\delta h^\gamma{}_\alpha - h^{\alpha\beta}\partial_\alpha h_\beta{}^\delta\partial_\delta h \\
&= 2[6] - [13] + 2[8] - [9], \qquad \text{(B.46)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\bar{h}_{\alpha\beta}(\partial\bar{h})^\alpha(\partial\bar{h})^\beta &= 2\bar{h}_{\alpha\beta}(\partial h)^\alpha(\partial h)^\beta - 2\bar{h}_{\alpha\beta}(\partial h)^\alpha\partial^\beta h + \frac{1}{2}\bar{h}_{\alpha\beta}\partial^\alpha h\partial^\beta h \\
&= 2h_{\alpha\beta}(\partial h)^\alpha(\partial h)^\beta - h(\partial h)^\alpha(\partial h)_\alpha - 2h_{\alpha\beta}(\partial h)^\alpha\partial^\beta h + h(\partial h)^\alpha\partial_\alpha h \\
&\quad + \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h\partial^\beta h - \frac{1}{4}h\partial^\alpha h\partial_\alpha h \\
&= 2[16] - [15] - 2[13] + [11] + \frac{1}{2}[4] - \frac{1}{4}[1], \qquad \text{(B.47)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}h_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta}\partial_\gamma\partial_\delta\bar{h}^{\gamma\delta} &\overset{\mathrm{w}}{=} -\frac{1}{2}\partial_\gamma(h_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta})\partial_\delta\bar{h}^{\gamma\delta} \\
&= -h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h^{\alpha\beta}(\partial\bar{h})^\gamma \\
&= -h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h^{\alpha\beta}(\partial h)^\gamma + \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial^\gamma h \\
&= -[14] + \frac{1}{2}[10], \qquad \text{(B.48)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}hh\partial_\gamma\partial_\delta\bar{h}^{\gamma\delta} &\overset{\mathrm{w}}{=} -\frac{1}{2}h\partial_\gamma h(\partial h)^\gamma + \frac{1}{4}h\partial_\gamma h\partial^\gamma h \\
&= -\frac{1}{2}[11] + \frac{1}{4}[1] \qquad \text{(B.49)}
\end{aligned}
$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}_{\mathrm{Feynman}}/g \overset{\mathrm{w}}{=} &\frac{1}{2}[1] - \frac{1}{2}[2] - [4] + [5] - 2[6] + 2[7] - 2[8] + [9] - 2[10] \\
&-[11] + 3[13] + 2[14] + [15] - 2[16] \qquad \text{(B.50)}
\end{aligned}
$$

を得る。また、(A.20) より、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}_{\mathrm{Feynman}}/g &\overset{\mathrm{w}}{=} \frac{1}{2}[1] - \frac{1}{2}[2] + [3] - [4] + [5] - 2[6] + 2[7] - 2[8] + 2[9] - 2[10] \\
&\quad -[11] + 2[13] + 2[14] - 2[16] \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} \frac{1}{2}[1] - \frac{1}{2}[2] + [3] - [4] + [5] - 4[6] + 2[7] - 4[8] + 2[9] - 2[10] \\
&\quad -[11] + 2[12] + 2[13] + 2[14] \qquad \text{(B.51)}
\end{aligned}
$$

である。(B.42) より、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{L}}'^{(3)}_{\mathrm{EH}}/g = &\frac{1}{2}[1] - \frac{1}{2}[2] + [3] - [4] + [5] - 4[6] + 2[7] - 2[8] + 2[9] - 2[10] \\
&-[11] + 2[13] + 2[14]
\end{aligned}
$$

なので、

$$
\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(3)}_{\mathrm{Feynman}}/g - \boldsymbol{\mathcal{L}}'^{(3)}_{\mathrm{EH}}/g \overset{\mathrm{w}}{=} 2[8] + 2[12] \qquad \text{(B.52)}
$$

である。これは全微分の形ではない。おそらくファインマンが間違っている。

B.3 他の文献

文献 [8] では、付録 A の方法で 3 次のラグランジアン密度を計算しているようである。結果は、(B.42) の右辺と一致している。

文献 [9] は付録 A の方法で 3 次のラグランジアン密度を計算し、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(3)}/g &\overset{\mathrm{w}}{=} \frac{1}{2}[1]-\frac{1}{2}[2]-[4]+[5]-4[6]+2[7]-2[8]+[9]-2[10]\\ &\quad -[11]+3[13]+2[14]+[15]\\ &\equiv \mathcal{L}^{(3)}_{\mathrm{Lopez-Pinto}}/g \end{aligned} \tag{B.53}$$

を得ている。これは、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(3)}_{\mathrm{Lopez-Pinto}}/g &\overset{\mathrm{w}}{=} \frac{1}{2}[1]-\frac{1}{2}[2]+[3]-[4]+[5]-4[6]+2[7]-2[8]+2[9]-2[10]\\ &\quad -[11]+2[13]+2[14]\\ &= \mathcal{L}'^{(3)}_{\mathrm{EH}}/g \end{aligned} \tag{B.54}$$

となる。

文献 [10] では、$\bar{h}_{\mu\nu}$ の 3 次のラグランジアン密度を独自の方法で決定している。結果は、(A.5) で $h_{\mu\nu}$ を $\bar{h}_{\mu\nu}$ で置き換えた形であり、

$$\frac{g}{2}\left[\frac{1}{2}[4]'-[5]'+2[7]'-2[8]'-[10]'\right] \equiv \mathcal{L}^{(3)}_{\mathrm{Kimura}} \quad (4\text{ 次元時空}) \tag{B.55}$$

となる[8]。$[k]'$ は $[k]$ で $h_{\mu\nu}$ を $\bar{h}_{\mu\nu}$ で置き換えたものである。上式は、

$$\mathcal{L}^{(3)}_{\mathrm{Kimura}}/g = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}[1]-\frac{1}{2}[2]+[3]-[5]+2[7]-2[8]+2[9]-2[10]-[11]\right] \tag{B.56}$$

とも書ける[9]。なお、

$$\mathcal{L}^{(3)}_{\mathrm{Kimura}} \neq \mathcal{L}'^{(3)}_{\mathrm{EH}}, \quad 2\mathcal{L}^{(3)}_{\mathrm{Kimura}} \neq \mathcal{L}'^{(3)}_{\mathrm{EH}} \tag{B.57}$$

である。

---

[8] 左辺の $g/2$ は g の方が自然な気がするが…。

[9] D 次元時空では、

$$[4]' = \left(\frac{D-2}{2}\right)^2\left([4]-\frac{1}{2}[1]\right), \quad [5]'=[5]+\frac{D-4}{4}[4]-\frac{1}{2}[2]-\frac{1}{2}\frac{D-4}{4}[1],$$

$$[7]' = [7]-[10]+\frac{1}{4}[1]-\frac{1}{2}[2]-\frac{1}{2}\frac{D-4}{4}[1], \quad [8]'=[8]-[9]+\frac{1}{4}[4]-\frac{1}{2}[3]+\frac{1}{2}[11]-\frac{1}{8}[1],$$

$$[10]' = -\frac{D-2}{2}\left([10]+\frac{D-4}{4}[1]\right)$$

となることを用いた。

C　$h_{\mu\nu}$ の3次のラグランジアン密度：具体的な計算

$h_{\mu\nu}$ の3次のラグランジアン密度を決定する。
本章の参考文献は [9] である。本章には、まだミスが残っている可能性がある。
以下では、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[i]} &= A^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}(A^{\mu\nu} + A^{\nu\mu})
\end{aligned}
\tag{C.1}
$$

のような書き方をする。つまり、1つ目の等号では μ, ν が対称化されているとは限らないが、2つ目の等号では必ず対称化されている。また、$(\partial\partial h) = \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}$ とする。さて、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[1]} &= \eta^{\mu\nu}[-2\partial_\alpha h\partial^\alpha h + 4\partial_\alpha(h\partial^\alpha h)] \\
&= \eta^{\mu\nu}[2\partial_\alpha h\partial^\alpha h + 4h\Box h],
\end{aligned}
\tag{C.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[2]} &= -2\eta^{\mu\nu}\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial^\gamma h_{\alpha\beta} + 4\partial_\gamma(h\partial^\gamma h^{\mu\nu}) \\
&= -2\eta^{\mu\nu}\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial^\gamma h_{\alpha\beta} + 4\partial_\gamma h\partial^\gamma h^{\mu\nu} + 4h\Box h^{\mu\nu},
\end{aligned}
\tag{C.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[3]} &= -2\eta^{\mu\nu}\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^\gamma{}_\alpha + 2\partial_\gamma(h\partial^\nu h^{\gamma\mu}) + 2\partial_\beta(h\partial^\mu h^{\nu\beta}) \\
&= -2\eta^{\mu\nu}\partial_\gamma h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^\gamma{}_\alpha + 2\partial_\gamma h\partial^\nu h^{\gamma\mu} + 2\partial_\gamma h\partial^\mu h^{\gamma\nu} + 2h\partial^\mu(\partial h)^\nu + 2h\partial^\nu(\partial h)^\mu,
\end{aligned}
\tag{C.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[4]} &= -2\partial^\mu h\partial^\nu h + 4\eta^{\mu\nu}\partial_\alpha(h^{\alpha\beta}\partial_\beta h) \\
&= -2\partial^\mu h\partial^\nu h + 4\eta^{\mu\nu}[(\partial h)^\alpha\partial_\alpha h + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta h],
\end{aligned}
\tag{C.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[5]} &= -2\partial^\mu h^{\alpha\beta}\partial^\nu h_{\alpha\beta} + 4\partial_\alpha(h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^{\mu\nu}) \\
&= -2\partial^\mu h^{\alpha\beta}\partial^\nu h_{\alpha\beta} + 4(\partial h)^\alpha\partial_\alpha h^{\mu\nu} + 4h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\mu\nu},
\end{aligned}
\tag{C.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[6]} &= -\partial^\mu h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h^\nu{}_\delta - \partial^\nu h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h^\mu{}_\delta + 2\partial_\alpha(h^{\alpha\beta}\partial^\mu h_\beta{}^\nu) + 2\partial_\gamma(h^{\mu\alpha}\partial_\alpha h^{\gamma\nu}) \\
&= -\partial^\mu h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h^\nu{}_\delta - \partial^\nu h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h^\mu{}_\delta + (\partial h)^\alpha\partial^\mu h_\alpha{}^\nu + (\partial h)^\alpha\partial^\nu h_\alpha{}^\mu + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial^\mu h_\beta{}^\nu + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial^\nu h_\beta{}^\mu \\
&\quad +2\partial_\gamma h^{\mu\alpha}\partial_\alpha h^{\gamma\nu} + h^{\mu\alpha}\partial_\alpha(\partial h)^\nu + h^{\nu\alpha}\partial_\alpha(\partial h)^\mu,
\end{aligned}
\tag{C.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[7]} &= -2\partial_\gamma h^{\mu\delta}\partial^\gamma h^\nu{}_\delta + 4\partial_\gamma(h^\mu{}_\beta\partial^\gamma h^{\beta\nu}) \\
&= -2\partial_\gamma h^{\mu\delta}\partial^\gamma h^\nu{}_\delta + 4\partial_\gamma h^\mu{}_\beta\partial^\gamma h^{\beta\nu} + 2h^\mu{}_\beta\Box h^{\beta\nu} + 2h^\nu{}_\beta\Box h^{\beta\mu},
\end{aligned}
\tag{C.8}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[8]} &= -2\partial_\gamma h^{\mu\delta}\partial_\delta h^{\nu\gamma} + 4\partial_\gamma(h^\mu{}_\beta\partial^\nu h^{\beta\gamma}) \\
&= -2\partial_\gamma h^{\mu\delta}\partial_\delta h^{\nu\gamma} + 2\partial_\gamma h^\mu{}_\beta\partial^\nu h^{\beta\gamma} + 2\partial_\gamma h^\nu{}_\beta\partial^\mu h^{\beta\gamma} + 2h^\mu{}_\beta\partial^\nu(\partial h)^\beta + 2h^\nu{}_\beta\partial^\mu(\partial h)^\beta,
\end{aligned}
\tag{C.9}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[9]} &= -2(\partial_\gamma h\partial^\mu h^{\nu\gamma}) + 2\eta^{\mu\nu}\partial_\gamma(h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h^{\beta\gamma}) + 2\partial_\alpha(h^{\alpha\mu}\partial^\nu h) \\
&= -\partial_\gamma h\partial^\mu h^{\nu\gamma} - \partial_\gamma h\partial^\nu h^{\mu\gamma} + 2\eta^{\mu\nu}[\partial_\gamma h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h^{\beta\gamma} + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\partial h)_\beta] \\
&\quad +(\partial h)^\mu\partial^\nu h + (\partial h)^\nu\partial^\mu h + h^{\alpha\mu}\partial_\alpha\partial^\nu h + h^{\alpha\nu}\partial_\alpha\partial^\mu h,
\end{aligned}
\tag{C.10}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[10]} &= -2\partial_\gamma h\partial^\gamma h^{\mu\nu} + 2\eta^{\mu\nu}\partial_\gamma(h_{\alpha\beta}\partial^\gamma h^{\alpha\beta}) + 2\partial_\gamma(h^{\mu\nu}\partial^\gamma h) \\
&= 2\eta^{\mu\nu}[\partial_\gamma h_{\alpha\beta}\partial^\gamma h^{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\Box h^{\alpha\beta}] + 2h^{\mu\nu}\Box h,
\end{aligned}
\tag{C.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[11]} &= -2\eta^{\mu\nu}(\partial h)^{\alpha}\partial_{\alpha}h + 2\partial^{\mu}(h\partial^{\nu}h) + 2\eta^{\mu\nu}\partial_{\alpha}[h(\partial h)^{\alpha}] \\
&= 2\partial^{\mu}h\partial^{\nu}h + 2h\partial^{\mu}\partial^{\nu}h + 2\eta^{\mu\nu}h(\partial\partial h), \qquad \text{(C.12)} \\
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[12]} &= -2\partial^{\mu}h^{\nu\gamma}(\partial h)_{\gamma} + 2\partial_{\beta}[h^{\mu\beta}(\partial h)^{\nu}] + 2\partial^{\mu}(h^{\alpha\beta}\partial_{\beta}h^{\nu}{}_{\alpha}) \\
&= -\partial^{\mu}h^{\nu\gamma}(\partial h)_{\gamma} - \partial^{\nu}h^{\mu\gamma}(\partial h)_{\gamma} + 2(\partial h)^{\mu}(\partial h)^{\nu} + h^{\mu\beta}\partial_{\beta}(\partial h)^{\nu} + h^{\nu\beta}\partial_{\beta}(\partial h)^{\mu} \\
&\quad +\partial^{\mu}h^{\alpha\beta}\partial_{\beta}h^{\nu}{}_{\alpha} + \partial^{\nu}h^{\alpha\beta}\partial_{\beta}h^{\mu}{}_{\alpha} + h^{\alpha\beta}\partial_{\beta}\partial^{\mu}h^{\nu}{}_{\alpha} + h^{\alpha\beta}\partial_{\beta}\partial^{\nu}h^{\mu}{}_{\alpha}, \qquad \text{(C.13)} \\
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[13]} &= -2\partial^{\mu}h(\partial h)^{\nu} + 2\eta^{\mu\nu}\partial_{\alpha}[h^{\alpha\beta}(\partial h)_{\beta}] + 2\partial^{\mu}(h^{\alpha\nu}\partial_{\alpha}h) \\
&= -\partial^{\mu}h(\partial h)^{\nu} - \partial^{\nu}h(\partial h)^{\mu} + 2\eta^{\mu\nu}[(\partial h)^{\alpha}(\partial h)_{\alpha} + h^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}(\partial h)_{\beta}] \\
&\quad +\partial^{\mu}h^{\alpha\nu}\partial_{\alpha}h + \partial^{\nu}h^{\alpha\mu}\partial_{\alpha}h + h^{\alpha\nu}\partial^{\mu}\partial_{\alpha}h + h^{\alpha\mu}\partial^{\nu}\partial_{\alpha}h, \qquad \text{(C.14)} \\
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[14]} &= -2\partial_{\gamma}h^{\mu\nu}(\partial h)^{\gamma} + 2\partial_{\gamma}[h^{\mu\nu}(\partial h)^{\gamma}] + 2\partial^{\mu}(h_{\alpha\beta}\partial^{\nu}h^{\alpha\beta}) \\
&= 2h^{\mu\nu}(\partial\partial h) + 2\partial^{\mu}h_{\alpha\beta}\partial^{\nu}h^{\alpha\beta} + 2h_{\alpha\beta}\partial^{\mu}\partial^{\nu}h^{\alpha\beta}, \qquad \text{(C.15)} \\
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[15]} &= -2\eta^{\mu\nu}(\partial h)_{\alpha}(\partial h)^{\alpha} + 4\partial^{\mu}[h(\partial h)^{\nu}] \\
&= -2\eta^{\mu\nu}(\partial h)_{\alpha}(\partial h)^{\alpha} + 2\partial^{\mu}h(\partial h)^{\nu} + 2\partial^{\nu}h(\partial h)^{\mu} + 2h\partial^{\mu}(\partial h)^{\nu} + 2h\partial^{\nu}(\partial h)^{\mu}, \qquad \text{(C.16)} \\
\boldsymbol{\chi}^{\mu\nu}_{[16]} &= -2(\partial h)^{\mu}(\partial h)^{\nu} + 4\partial^{\mu}[h^{\nu\alpha}(\partial h)_{\alpha}] \\
&= -2(\partial h)^{\mu}(\partial h)^{\nu} + 2\partial^{\mu}h^{\nu\alpha}(\partial h)_{\alpha} + 2\partial^{\nu}h^{\mu\alpha}(\partial h)_{\alpha} \\
&\quad +2h^{\nu\alpha}\partial^{\mu}(\partial h)_{\alpha} + 2h^{\mu\alpha}\partial^{\nu}(\partial h)_{\alpha} \qquad \text{(C.17)}
\end{aligned}
$$

である。また、

$$
\begin{aligned}
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[1]})_{\mu} &= \partial_{\mu}[2\partial_{\alpha}h\partial^{\alpha}h + 4h\Box h] \\
&= 4\partial_{\alpha}h\partial_{\mu}\partial^{\alpha}h + 4\partial_{\mu}h\Box h + 4h\partial_{\mu}\Box h, \qquad \text{(C.18)} \\
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[2]})_{\mu} &= -2\partial_{\mu}[\partial_{\gamma}h_{\alpha\beta}\partial^{\gamma}h^{\alpha\beta}] + 4\partial_{\nu}(\partial_{\gamma}h\partial^{\gamma}h_{\mu}{}^{\nu}) + 4\partial_{\nu}(h\Box h_{\mu}{}^{\nu}) \\
&= -4\partial_{\gamma}h_{\alpha\beta}\partial_{\mu}\partial^{\gamma}h^{\alpha\beta} + 4\partial_{\nu}\partial_{\gamma}h\partial^{\gamma}h_{\mu}{}^{\nu} + 4\partial_{\gamma}h\partial^{\gamma}(\partial h)_{\mu} \\
&\quad +4\partial_{\nu}h\Box h_{\mu}{}^{\nu} + 4h\Box(\partial h)_{\mu}, \qquad \text{(C.19)} \\
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[3]})_{\mu} &= -2\partial_{\mu}\partial_{\gamma}h^{\alpha\beta}\partial_{\beta}h^{\gamma}{}_{\alpha} - 2\partial_{\gamma}h^{\alpha\beta}\partial_{\mu}\partial_{\beta}h^{\gamma}{}_{\alpha} + 2\partial_{\nu}\partial_{\gamma}h\partial^{\nu}h^{\gamma}{}_{\mu} + 2\partial_{\gamma}h\Box h^{\gamma}{}_{\mu} \\
&\quad +2\partial_{\nu}\partial_{\gamma}h\partial_{\mu}h^{\gamma\nu} + 2\partial_{\gamma}h\partial_{\mu}(\partial h)^{\gamma} + 2\partial_{\nu}h\partial_{\mu}(\partial h)^{\nu} + 2h\partial_{\mu}(\partial\partial h) \\
&\quad +2\partial_{\nu}h\partial^{\nu}(\partial h)_{\mu} + 2h\Box(\partial h)_{\mu} \\
&= -2\partial_{\mu}\partial_{\gamma}h^{\alpha\beta}\partial_{\beta}h^{\gamma}{}_{\alpha} - 2\partial_{\gamma}h^{\alpha\beta}\partial_{\mu}\partial_{\beta}h^{\gamma}{}_{\alpha} + 2\partial_{\nu}\partial_{\gamma}h\partial^{\nu}h^{\gamma}{}_{\mu} + 2\partial_{\gamma}h\Box h^{\gamma}{}_{\mu} \\
&\quad +2\partial_{\nu}\partial_{\gamma}h\partial_{\mu}h^{\gamma\nu} + 4\partial_{\gamma}h\partial_{\mu}(\partial h)^{\gamma} + 2h\partial_{\mu}(\partial\partial h) \\
&\quad +2\partial_{\nu}h\partial^{\nu}(\partial h)_{\mu} + 2h\Box(\partial h)_{\mu}, \qquad \text{(C.20)} \\
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[4]})_{\mu} &= -2\partial_{\nu}(\partial_{\mu}h\partial^{\nu}h) + 4\partial_{\mu}[(\partial h)^{\alpha}\partial_{\alpha}h + h^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}h] \\
&= -2\partial_{\nu}\partial_{\mu}h\partial^{\nu}h - 2\partial_{\mu}h\Box h + 4\partial_{\mu}(\partial h)^{\alpha}\partial_{\alpha}h + 4(\partial h)^{\alpha}\partial_{\mu}\partial_{\alpha}h \\
&\quad +4\partial_{\mu}h^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}h + 4h^{\alpha\beta}\partial_{\mu}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}h, \qquad \text{(C.21)} \\
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[5]})_{\mu} &= \partial_{\nu}[-2\partial_{\mu}h^{\alpha\beta}\partial^{\nu}h_{\alpha\beta} + 4(\partial h)^{\alpha}\partial_{\alpha}h_{\mu}{}^{\nu} + 4h^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}h_{\mu}{}^{\nu}] \\
&= -2\partial_{\nu}\partial_{\mu}h^{\alpha\beta}\partial^{\nu}h_{\alpha\beta} - 2\partial_{\mu}h^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta} + 4\partial_{\nu}(\partial h)^{\alpha}\partial_{\alpha}h_{\mu}{}^{\nu} + 4(\partial h)^{\alpha}\partial_{\alpha}(\partial h)_{\mu} \\
&\quad +4\partial_{\nu}h^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}h_{\mu}{}^{\nu} + 4h^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}(\partial h)_{\mu}, \qquad \text{(C.22)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[6]})_\mu &= -\partial_\nu\partial_\mu h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h^\nu{}_\delta - \partial_\mu h^{\gamma\delta}\partial_\gamma(\partial h)_\delta - \Box h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h_{\mu\delta} - \partial^\nu h^{\gamma\delta}\partial_\nu\partial_\gamma h_{\mu\delta} \\
&\quad +\partial_\nu(\partial h)^\alpha\partial_\mu h_\alpha{}^\nu + (\partial h)^\alpha\partial_\mu(\partial h)_\alpha + \partial_\nu(\partial h)^\alpha\partial^\nu h_{\alpha\mu} + (\partial h)^\alpha\Box h_{\alpha\mu} \\
&\quad +\partial_\nu h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\mu h_\beta{}^\nu + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\mu(\partial h)_\beta + \partial_\nu h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial^\nu h_{\beta\mu} + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Box h_{\beta\mu} \\
&\quad +2\partial_\nu\partial_\gamma h_\mu{}^\alpha\partial_\alpha h^{\gamma\nu} + 2\partial_\gamma h_\mu{}^\alpha\partial_\alpha(\partial h)^\gamma + \partial_\nu h_\mu{}^\alpha\partial_\alpha(\partial h)^\nu + h_\mu{}^\alpha\partial_\alpha(\partial\partial h) \\
&\quad +(\partial h)^\alpha\partial_\alpha(\partial h)_\mu + h^{\nu\alpha}\partial_\nu\partial_\alpha(\partial h)_\mu \\
&= -\partial_\nu\partial_\mu h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h^\nu{}_\delta - \Box h^{\gamma\delta}\partial_\gamma h_{\mu\delta} - \partial^\nu h^{\gamma\delta}\partial_\nu\partial_\gamma h_{\mu\delta} \\
&\quad +(\partial h)^\alpha\partial_\mu(\partial h)_\alpha + \partial_\nu(\partial h)^\alpha\partial^\nu h_{\alpha\mu} + (\partial h)^\alpha\Box h_{\alpha\mu} \\
&\quad +\partial_\nu h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\mu h_\beta{}^\nu + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\mu(\partial h)_\beta + \partial_\nu h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial^\nu h_{\beta\mu} + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Box h_{\beta\mu} \\
&\quad +2\partial_\nu\partial_\gamma h_\mu{}^\alpha\partial_\alpha h^{\gamma\nu} + 3\partial_\gamma h_\mu{}^\alpha\partial_\alpha(\partial h)^\gamma + h_\mu{}^\alpha\partial_\alpha(\partial\partial h) \\
&\quad +h^{\nu\alpha}\partial_\nu\partial_\alpha(\partial h)_\mu, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(C.23)} \\
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[7]})_\mu &= -2\partial_\nu\partial_\gamma h_\mu{}^\delta\partial^\gamma h^\nu{}_\delta - 2\partial_\gamma h_\mu{}^\delta\partial^\gamma(\partial h)_\delta + 4\partial_\nu\partial_\gamma h_{\mu\beta}\partial^\gamma h^{\beta\nu} + 4\partial_\gamma h_{\mu\beta}\partial^\gamma(\partial h)^\beta \\
&\quad +2\partial_\nu h_{\mu\beta}\Box h^{\beta\nu} + 2h_{\mu\beta}\Box(\partial h)^\beta + 2(\partial h)_\beta\Box h^\beta{}_\mu + 2h^\nu{}_\beta\partial_\nu\Box h^\beta{}_\mu \\
&= -2\partial_\nu\partial_\gamma h_\mu{}^\delta\partial^\gamma h^\nu{}_\delta + 4\partial_\nu\partial_\gamma h_{\mu\beta}\partial^\gamma h^{\beta\nu} + 2\partial_\gamma h_{\mu\beta}\partial^\gamma(\partial h)^\beta \\
&\quad +2\partial_\nu h_{\mu\beta}\Box h^{\beta\nu} + 2h_{\mu\beta}\Box(\partial h)^\beta + 2(\partial h)_\beta\Box h^\beta{}_\mu + 2h^\nu{}_\beta\partial_\nu\Box h^\beta{}_\mu, \qquad\qquad \text{(C.24)} \\
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[8]})_\mu &= -2\partial_\nu\partial_\gamma h_\mu{}^\delta\partial_\delta h^{\nu\gamma} - 2\partial_\gamma h_\mu{}^\delta\partial_\delta(\partial h)^\gamma + 2\partial_\nu\partial_\gamma h_{\mu\beta}\partial^\nu h^{\beta\gamma} + 2\partial_\gamma h_{\mu\beta}\Box h^{\beta\gamma} \\
&\quad +2\partial_\gamma(\partial h)_\beta\partial_\mu h^{\beta\gamma} + 2\partial_\gamma h^\nu{}_\beta\partial_\nu\partial_\mu h^{\beta\gamma} + 2\partial_\nu h_{\mu\beta}\partial^\nu(\partial h)^\beta + 2h_{\mu\beta}\Box(\partial h)^\beta \\
&\quad +2(\partial h)_\beta\partial_\mu(\partial h)^\beta + 2h^\nu{}_\beta\partial_\nu\partial_\mu(\partial h)^\beta, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(C.25)} \\
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[9]})_\mu &= 2\partial_\mu\partial_\gamma h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h^{\beta\gamma} + 2\partial_\gamma h_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial^\alpha h^{\beta\gamma} + 2\partial_\mu h^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\partial h)_\beta + 2h^{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\alpha(\partial h)_\beta \\
&\quad -\partial_\nu\partial_\gamma h\partial_\mu h^{\nu\gamma} - \partial_\gamma h\partial_\mu(\partial h)^\gamma - \partial_\nu\partial_\gamma h\partial^\nu h_\mu{}^\gamma - \partial_\gamma h\Box h_\mu{}^\gamma \\
&\quad +\partial_\nu(\partial h)_\mu\partial^\nu h + (\partial h)_\mu\Box h + (\partial\partial h)\partial_\mu h + (\partial h)^\nu\partial_\nu\partial_\mu h \\
&\quad +\partial_\nu h^\alpha{}_\mu\partial_\alpha\partial^\nu h + h^\alpha{}_\mu\partial_\alpha\Box h + (\partial h)^\alpha\partial_\alpha\partial_\mu h + h^{\alpha\nu}\partial_\nu\partial_\alpha\partial_\mu h \\
&= 2\partial_\mu\partial_\gamma h_{\alpha\beta}\partial^\alpha h^{\beta\gamma} + 2\partial_\gamma h_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial^\alpha h^{\beta\gamma} + 2\partial_\mu h^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\partial h)_\beta + 2h^{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\alpha(\partial h)_\beta \\
&\quad -\partial_\nu\partial_\gamma h\partial_\mu h^{\nu\gamma} - \partial_\gamma h\partial_\mu(\partial h)^\gamma - \partial_\gamma h\Box h_\mu{}^\gamma \\
&\quad +\partial_\nu(\partial h)_\mu\partial^\nu h + (\partial h)_\mu\Box h + (\partial\partial h)\partial_\mu h + 2(\partial h)^\nu\partial_\nu\partial_\mu h \\
&\quad +h^\alpha{}_\mu\partial_\alpha\Box h + h^{\alpha\nu}\partial_\nu\partial_\alpha\partial_\mu h, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(C.26)} \\
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[10]})_\mu &= 4\partial_\gamma h_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial^\gamma h^{\alpha\beta} + 2\partial_\mu h_{\alpha\beta}\Box h^{\alpha\beta} + 2h_{\alpha\beta}\partial_\mu\Box h^{\alpha\beta} \\
&\quad +2(\partial h)_\mu\Box h + 2h^\nu{}_\mu\partial_\nu\Box h, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(C.27)} \\
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[11]})_\mu &= 2\partial_\nu\partial_\mu h\partial^\nu h + 2\partial_\mu h\Box h + 2\partial_\nu h\partial_\mu\partial^\nu h + 2h\partial_\mu\Box h + 2\partial_\mu h(\partial\partial h) + 2h\partial_\mu(\partial\partial h) \\
&= 4\partial^\nu h\partial_\nu\partial_\mu h + 2\partial_\mu h\Box h + 2h\partial_\mu\Box h + 2\partial_\mu h(\partial\partial h) + 2h\partial_\mu(\partial\partial h), \qquad \text{(C.28)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[12]})_\mu &= -\partial_\mu(\partial h)^\gamma(\partial h)_\gamma - \partial_\mu h^{\nu\gamma}\partial_\nu(\partial h)_\gamma - \Box h_\mu{}^\gamma(\partial h)_\gamma - \partial^\nu h_\mu{}^\gamma\partial_\nu(\partial h)_\gamma \\
&\quad +2\partial_\nu(\partial h)_\mu(\partial h)^\nu + 2(\partial h)_\mu(\partial\partial h) + \partial_\nu h_\mu{}^\beta\partial_\beta(\partial h)^\nu + h_\mu{}^\beta\partial_\beta(\partial\partial h) \\
&\quad +(\partial h)^\beta\partial_\beta(\partial h)_\mu + h^{\nu\beta}\partial_\nu\partial_\beta(\partial h)_\mu + \partial_\nu\partial_\mu h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^\nu{}_\alpha + \partial_\mu h^{\alpha\beta}\partial_\beta(\partial h)_\alpha \\
&\quad +\Box h^{\alpha\beta}\partial_\beta h_{\mu\alpha} + \partial^\nu h^{\alpha\beta}\partial_\nu\partial_\beta h_{\mu\alpha} + \partial_\nu h^{\alpha\beta}\partial_\beta\partial_\mu h^\nu{}_\alpha + h^{\alpha\beta}\partial_\beta\partial_\mu(\partial h)_\alpha \\
&\quad +\partial_\nu h^{\alpha\beta}\partial_\beta\partial^\nu h_{\mu\alpha} + h^{\alpha\beta}\partial_\beta\Box h_{\mu\alpha} \\
&= -\partial_\mu(\partial h)^\gamma(\partial h)_\gamma - \Box h_\mu{}^\gamma(\partial h)_\gamma - \partial^\nu h_\mu{}^\gamma\partial_\nu(\partial h)_\gamma \\
&\quad +3\partial_\nu(\partial h)_\mu(\partial h)^\nu + 2(\partial h)_\mu(\partial\partial h) + \partial_\nu h_\mu{}^\beta\partial_\beta(\partial h)^\nu + h_\mu{}^\beta\partial_\beta(\partial\partial h) \\
&\quad +h^{\nu\beta}\partial_\nu\partial_\beta(\partial h)_\mu + 2\partial_\nu\partial_\mu h^{\alpha\beta}\partial_\beta h^\nu{}_\alpha \\
&\quad +\Box h^{\alpha\beta}\partial_\beta h_{\mu\alpha} + 2\partial^\nu h^{\alpha\beta}\partial_\nu\partial_\beta h_{\mu\alpha} + h^{\alpha\beta}\partial_\beta\partial_\mu(\partial h)_\alpha \\
&\quad +h^{\alpha\beta}\partial_\beta\Box h_{\mu\alpha}, \qquad\qquad \text{(C.29)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[13]})_\mu &= 4(\partial h)^\alpha\partial_\mu(\partial h)_\alpha + 2\partial_\mu h^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\partial h)_\beta + 2h^{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\alpha(\partial h)_\beta \\
&\quad -\partial_\nu\partial_\mu h(\partial h)^\nu - \partial_\mu h(\partial\partial h) - \Box h(\partial h)_\mu - \partial^\nu h\partial_\nu(\partial h)_\mu \\
&\quad +\partial_\mu(\partial h)^\alpha\partial_\alpha h + \partial_\mu h^{\alpha\nu}\partial_\nu\partial_\alpha h + \Box h^\alpha{}_\mu\partial_\alpha h + \partial^\nu h^\alpha{}_\mu\partial_\nu\partial_\alpha h \\
&\quad +(\partial h)^\alpha\partial_\mu\partial_\alpha h + h^{\alpha\nu}\partial_\nu\partial_\mu\partial_\alpha h + \partial_\nu h^\alpha{}_\mu\partial^\nu\partial_\alpha h + h^\alpha{}_\mu\Box\partial_\alpha h \\
&= 4(\partial h)^\alpha\partial_\mu(\partial h)_\alpha + 2\partial_\mu h^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\partial h)_\beta + 2h^{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\alpha(\partial h)_\beta \\
&\quad -\partial_\nu\partial_\mu h(\partial h)^\nu - \partial_\mu h(\partial\partial h) - \Box h(\partial h)_\mu - \partial^\nu h\partial_\nu(\partial h)_\mu \\
&\quad +\partial_\mu(\partial h)^\alpha\partial_\alpha h + \partial_\mu h^{\alpha\nu}\partial_\nu\partial_\alpha h + \Box h^\alpha{}_\mu\partial_\alpha h + 2\partial^\nu h^\alpha{}_\mu\partial_\nu\partial_\alpha h \\
&\quad +(\partial h)^\alpha\partial_\mu\partial_\alpha h + h^{\alpha\nu}\partial_\nu\partial_\mu\partial_\alpha h + h^\alpha{}_\mu\Box\partial_\alpha h, \qquad\qquad \text{(C.30)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[14]})_\mu &= 2(\partial h)_\mu(\partial\partial h) + 2h_\mu{}^\nu\partial_\nu(\partial\partial h) + 2\partial_\nu\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\nu h^{\alpha\beta} + 2\partial_\mu h_{\alpha\beta}\Box h^{\alpha\beta} \\
&\quad +2\partial_\nu h_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial^\nu h^{\alpha\beta} + 2h_{\alpha\beta}\partial_\mu\Box h^{\alpha\beta} \\
&= 2(\partial h)_\mu(\partial\partial h) + 2h_\mu{}^\nu\partial_\nu(\partial\partial h) + 4\partial^\nu h^{\alpha\beta}\partial_\nu\partial_\mu h_{\alpha\beta} + 2\partial_\mu h_{\alpha\beta}\Box h^{\alpha\beta} \\
&\quad +2h_{\alpha\beta}\partial_\mu\Box h^{\alpha\beta}, \qquad\qquad \text{(C.31)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[15]})_\mu &= -4(\partial h)_\alpha\partial_\mu(\partial h)^\alpha + 2\partial_\nu\partial_\mu h(\partial h)^\nu + 2\partial_\mu h(\partial\partial h) \\
&\quad +2\Box h(\partial h)_\mu + 2\partial^\nu h\partial_\nu(\partial h)_\mu + 2\partial_\nu h\partial_\mu(\partial h)^\nu + 2h\partial_\mu(\partial\partial h) \\
&\quad +2\partial_\nu h\partial^\nu(\partial h)_\mu + 2h\Box(\partial h)_\mu \\
&= -4(\partial h)_\alpha\partial_\mu(\partial h)^\alpha + 2\partial_\nu\partial_\mu h(\partial h)^\nu + 2\partial_\mu h(\partial\partial h) \\
&\quad +2\Box h(\partial h)_\mu + 4\partial^\nu h\partial_\nu(\partial h)_\mu + 2\partial_\nu h\partial_\mu(\partial h)^\nu + 2h\partial_\mu(\partial\partial h) \\
&\quad +2h\Box(\partial h)_\mu, \qquad\qquad \text{(C.32)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\partial\boldsymbol{\chi}_{[16]})_\mu &= -2\partial_\nu(\partial h)_\mu(\partial h)^\nu - 2(\partial h)_\mu(\partial\partial h) + 2\partial_\mu(\partial h)^\alpha(\partial h)_\alpha + 2\partial_\mu h^{\nu\alpha}\partial_\nu(\partial h)_\alpha \\
&\quad +2\Box h_\mu{}^\alpha(\partial h)_\alpha + 2\partial^\nu h_\mu{}^\alpha\partial_\nu(\partial h)_\alpha + 2(\partial h)^\alpha\partial_\mu(\partial h)_\alpha + 2h^{\nu\alpha}\partial_\nu\partial_\mu(\partial h)_\alpha \\
&\quad +2\partial_\nu h_\mu{}^\alpha\partial^\nu(\partial h)_\alpha + 2h_\mu{}^\alpha\Box(\partial h)_\alpha \\
&= -2\partial_\nu(\partial h)_\mu(\partial h)^\nu - 2(\partial h)_\mu(\partial\partial h) + 2\partial_\mu h^{\nu\alpha}\partial_\nu(\partial h)_\alpha \\
&\quad +2\Box h_\mu{}^\alpha(\partial h)_\alpha + 4\partial^\nu h_\mu{}^\alpha\partial_\nu(\partial h)_\alpha + 4(\partial h)^\alpha\partial_\mu(\partial h)_\alpha + 2h^{\nu\alpha}\partial_\nu\partial_\mu(\partial h)_\alpha \\
&\quad +2h_\mu{}^\alpha\Box(\partial h)_\alpha \qquad\qquad \text{(C.33)}
\end{aligned}$$

である。

$\bullet$ を項とし、

$$\sum_{i=1}^{16} g_i(\partial \boldsymbol{\chi}_{[i]})_\mu = \sum_{\bullet} C(\bullet)\bullet \tag{C.34}$$

と置く。$C(\bullet)$ は係数である。34 種類の項があるが、そのうち 20 種類について係数を調べてみる：

$$\begin{aligned}
C(\partial_\mu h_{\alpha\beta}\Box h^{\alpha\beta}) &= -2g_5 + 2g_{10} + 2g_{14} = -2g, && \text{(C.35)}\\
C(h_{\alpha\beta}\partial_\mu\Box h^{\alpha\beta}) &= 2g_{10} + 2g_{14} = 0, && \text{(C.36)}\\
C(\partial_\mu h\Box h) &= 4g_1 - 2g_4 + 2g_{11} = 2g, && \text{(C.37)}\\
C(h\partial_\mu\Box h) &= 4g_1 + 2g_{11} = 0, && \text{(C.38)}\\
C((\partial h)_\mu\Box h) &= g_9 + 2g_{10} - g_{13} + 2g_{15} = -4g, && \text{(C.39)}\\
C(\partial_\alpha h_{\mu\beta}\Box h^{\alpha\beta}) &= -g_6 + 2g_7 + 2g_8 + g_{12} = 4g, && \text{(C.40)}\\
C(\partial_\alpha h\Box h^{\alpha}{}_{\mu}) &= 4g_2 + 2g_3 - g_9 + g_{13} = 0, && \text{(C.41)}\\
C(h\Box(\partial h)_\mu) &= 4g_2 + 2g_3 + 2g_{15} = 0, && \text{(C.42)}\\
C((\partial h)_\mu(\partial\partial h)) &= 2g_{12} + 2g_{14} - 2g_{16} = 4g, && \text{(C.43)}\\
C(\partial_\mu h(\partial\partial h)) &= g_9 + 2g_{11} - g_{13} + 2g_{15} = -2g, && \text{(C.44)}\\
C(\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\alpha(\partial h)^\beta) &= 2g_8 + 2g_9 + 2g_{13} + 2g_{16} = 4g, && \text{(C.45)}\\
C(\partial_\alpha h_{\mu\beta}\partial^\alpha(\partial h)^\beta) &= g_6 + 2g_7 + 2g_8 - g_{12} + 4g_{16} = -4g, && \text{(C.46)}\\
C(\partial_\beta h_{\mu\alpha}\partial^\alpha(\partial h)^\beta) &= 4g_5 + 3g_6 - 2g_8 + g_{12} = -4g, && \text{(C.47)}\\
C((\partial h)^\alpha\partial_\mu(\partial h)_\alpha) &= g_6 + 2g_8 - g_{12} + 4g_{13} - 4g_{15} + 4g_{16} = 0, && \text{(C.48)}\\
C(h\partial_\mu(\partial\partial h)) &= 2g_3 + 2g_{11} + 2g_{15} = 0, && \text{(C.49)}\\
C(\partial_\mu h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta h) &= 2g_3 + 4g_4 - g_9 + g_{13} = -2g, && \text{(C.50)}\\
C(\partial^\alpha h^{\beta}{}_{\mu}\partial_\alpha\partial_\beta h) &= 4g_2 + 2g_3 + 2g_{13} = 4g, && \text{(C.51)}\\
C(\partial_\alpha h\partial^\alpha\partial_\mu h) &= 4g_1 - 2g_4 + 4g_{11} = 0, && \text{(C.52)}\\
C(\partial^\alpha h\partial_\alpha(\partial h)_\mu) &= 4g_2 + 2g_3 + g_9 - g_{13} + 4g_{15} = 0, && \text{(C.53)}\\
C(h^{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\alpha\partial_\beta h) &= 4g_4 + g_9 + g_{13} = 0. && \text{(C.54)}
\end{aligned}$$

アインシュタイン・ヒルベルト作用から求めたラグランジアン密度 (B.42) と [9] のラグランジアン密度 (B.53) は、これらを全て満たす。ファインマンの結果 (B.50), (B.51) は、これらのうち 6 つを満たさない。

金星人の立場では、上の連立方程式を解く必要があるが、この記事ではその作業は省略する。

References

[1] ファインマン, モリニーゴ, ワーグナー (著), 和田純夫 (訳)『ファインマン講義重力の理論』(岩波書店, 1999 年).

[2] 和田純夫『今度こそわかる重力理論』(講談社, 2018 年).

[3] 高橋康, 表實『古典場から量子場への道 増補第 2 版』(講談社, 2006 年).

[4] 内山龍雄『相対性理論』(岩波書店, 1977 年).

[5] 中嶋慧「Parametrized post newtonian(PPN) 展開：入門」
`http://physnakajima.html.xdomain.jp/PPN.pdf`

[6] 中嶋慧「惑星による近日点移動」
`http://physnakajima.html.xdomain.jp/perihelion_planet.pdf`

[7] Marc H. Goroff, Augusto Sagnotti, "The ultraviolet behavior of Einstein gravity", Nuclear Physics B **266**,709 (1986). [`https://www.researchgate.net/publication/256600623_The_ultraviolet_behavior_of_Einstein_gravity`]

[8] Bert Janssen, "From Fierz-Pauli to Einstein-Hilbert:Gravity as a special relativistic field theory", `http://www.ugr.es/~bjanssen/text/fierz-pauli.pdf`

[9] Antonio Lopez-Pinto, "Nonstandard spin 2 field theory", arXiv:gr-qc/0410069.

[10] Toshiei Kimura, "Note on the Gravitational Interaction", Prog. Theor. Phys. **36**, 394 (1966).