重力場のエネルギー擬テンソル

中嶋 慧

2019 年 12 月 3 日 (2023 年 10 月 23 日修正・追加)

Abstract

本記事は数理物理 Advent Calendar 2019 の 4 日目の記事である。この記事では重力場のエネルギー擬テンソルとスーパー・ポテンシャルを解説する。主に内山龍雄の [1, 2, 3] を参考にした。

Contents

1　一般論

1.1　記号の導入とアインシュタイン方程式

この記事では D 次元時空を考え、計量 $g_{\mu\nu}$ の符号は $(-++\cdots+)$ とする。また、

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} := \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}), \tag{1.1}$$

$$R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta} := \partial_\alpha \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\alpha} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\alpha}, \tag{1.2}$$

$$R_{\mu\nu} := R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}, \tag{1.3}$$

$$R := g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{1.4}$$

とする。付録 A で示すように、

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}G + \partial_\mu \boldsymbol{D}^\mu, \tag{1.5}$$

$$G := g^{\mu\nu}\Big[\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} - \Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}\Big], \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{D}^\rho := \sqrt{-g}\Big[g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - g^{\mu\rho}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\nu}\Big] \tag{1.7}$$

となる。ここで $g := \det(g_{\mu\nu})$ である。以下、

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}} := \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}R, \tag{1.8}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_{\mathrm{G}} := \frac{1}{2\kappa}\boldsymbol{G}, \quad \boldsymbol{G} := \sqrt{-g}G \tag{1.9}$$

とする。κ はアインシュタイン定数である。今、

$$G_{\mu\nu} := \frac{1}{\sqrt{-g}}\Big[\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})}\Big] \tag{1.10}$$

とすると、

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{1.11}$$

となる。これは §B.2 で示す。また、

$$\boldsymbol{G}^{\mu\nu} := \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial(\partial_\lambda g_{\mu\nu})} \tag{1.12}$$

とすると、

$$\boldsymbol{G}^{\mu\nu} = -\sqrt{-g}G^{\mu\nu} \tag{1.13}$$

となる[1] 。

[1] §B.2 ではこの式を示す。この式から (1.11) が従う。それは、

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta}$$

から明かである。

重力場と物質場 (ゲージ場を含む) の合成系の作用は、

$$S = \int d^D x\ (\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}} + \sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathrm{mat}}) \tag{1.14}$$

である。$\mathcal{L}_{\mathrm{mat}}$ は物質場のラグランジアン密度である。アインシュタイン方程式は、

$$\boldsymbol{G}^{\mu\nu} = \kappa \boldsymbol{T}^{\mu\nu}, \tag{1.15}$$

$$\boldsymbol{T}^{\mu\nu} := -2\Big[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathrm{mat}})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathrm{mat}})}{\partial(\partial_\lambda g_{\mu\nu})}\Big] \tag{1.16}$$

となる。ここで、$T^{\mu\nu} := \boldsymbol{T}^{\mu\nu}/\sqrt{-g}$ はエネルギー・運動量テンソルである[2)]。

1.2 重力場のエネルギー擬テンソル

§1.3 で示すように、

$$\partial_\mu \boldsymbol{G}^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\partial_\nu g_{\alpha\beta}\boldsymbol{G}^{\alpha\beta} \equiv 0 \tag{1.17}$$

が示される。ここで、$\equiv$ は運動方程式の助けなしに成り立つ式を表す。同様に、

$$\partial_\mu \boldsymbol{T}^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\partial_\nu g_{\alpha\beta}\boldsymbol{T}^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.18}$$

となる。これはエネルギー・運動量保存則を表す。

さて、明らかに、

$$\partial_\mu \boldsymbol{T}^\mu{}_\nu \neq 0 \tag{1.19}$$

である。もし、

$$\partial_\mu[(\sqrt{-g})^\alpha(\boldsymbol{T}^\mu{}_\nu + \boldsymbol{t}^\mu{}_\nu)] = 0 \quad (\alpha = -1, 0, 1) \tag{1.20}$$

または

$$\partial_\mu[(\sqrt{-g})^\alpha(\boldsymbol{T}^{\mu\nu} + \boldsymbol{t}^{\mu\nu})] = 0 \quad (\alpha = -1, 0, 1) \tag{1.21}$$

となる量 $\boldsymbol{t}^\mu{}_\nu$ または $\boldsymbol{t}^{\mu\nu}$ が存在すれば、

$$P_\nu := \int_{V_t} d^{D-1}x\ (\sqrt{-g})^\alpha(\boldsymbol{T}^0{}_\nu + \boldsymbol{t}^0{}_\nu) \tag{1.22}$$

または

$$P^\nu := \int_{V_t} d^{D-1}x\ (\sqrt{-g})^\alpha(\boldsymbol{T}^{0\nu} + \boldsymbol{t}^{0\nu}) \tag{1.23}$$

は保存量となる (ことを以下で示す)。ここで、$t = x^0$ が時間と解釈できる座標系を選んだ。V_t は時刻が t となる超平面である。$d^{D-1}x = dx^1 dx^2 \cdots dx^{D-1}$ である。$\boldsymbol{t}^\mu{}_\nu$, $\boldsymbol{t}^{\mu\nu}$ を重力場のエネル

[2)] 多くの文献と符号が逆である。

ギー擬テンソルと呼ぶ[3] 。電話帳 (Wheeler, Misner, Thorne) では、$\alpha = -1$ に対して (1.21) が成立するエネルギー擬テンソルが解説されている。ランダウ・リフシッツ (『場の古典論』) のエネルギー擬テンソルは $\alpha = 1$ に対して (1.21) が成立する。本記事では、$\alpha = 0$ に対して (1.20) が成立する場合を扱う。

量 $\boldsymbol{J}^{\mu}{}_{r}$($r$ はラベルで、テンソルの添え字でも良いし、そうでなくても良い) が

$$\partial_\mu \boldsymbol{J}^{\mu}{}_{r} = 0 \tag{1.24}$$

を満たすとし、以下を仮定する：

- 時空は無限遠において漸近的にミンコフスキー時空に近づく。
- $\boldsymbol{J}^{\mu}{}_{r}$ は無限遠で十分早く 0 に収束する。

このとき、

$$Q_r := \int d^{D-1}x \ \boldsymbol{J}^{0}{}_{r} \tag{1.25}$$

の左辺は、積分

$$Q_r(\sigma) := \int_\sigma d\sigma_\mu \ \boldsymbol{J}^{\mu}{}_{r} \tag{1.26}$$

で曲面 σ を時刻 $t(= x^0)$ が一定の面 V_t と選んだものである。ただし、$d\sigma_\mu$ は面積素で、$d\sigma_0 = d^{D-1}x = dx^1 dx^2 \cdots dx^{D-1}$ である。時刻 t_1, t_2 が一定の面 V_{t_1}, V_{t_2} をつなぐ面 (無限遠にある側面) を σ_{12} とする。V_{t_1}, V_{t_2}, σ_{12} に囲まれる領域を Ω とし、$\partial\Omega = V_{t_1} + \sigma_{12} - V_{t_2}$ とする。このとき、

$$Q_r(\partial\Omega) = Q_r(V_{t_1}) - Q_r(V_{t_2}) + Q_r(\sigma_{12}) \tag{1.27}$$

である。一方、ストークスの定理 (ガウスの定理) より、

$$Q_r(\partial\Omega) = \int_\Omega d^D x \ \partial_\mu \boldsymbol{J}^{\mu}{}_{r} = 0 \tag{1.28}$$

である。よって、$Q_r(\sigma_{12}) = 0$ を仮定すれば、

$$Q_r(V_t) = \int_{V_t} d\sigma_\mu \ \boldsymbol{J}^{\mu}{}_{r} = \int_{V_t} d^{D-1}x \ \boldsymbol{J}^{0}{}_{r} \tag{1.29}$$

が時間によらない、つまり (1.25) が時間によらないことが分かる。

今、

$$(\sqrt{-g})^\alpha (\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{G}^{\mu}{}_{\nu} + \boldsymbol{t}^{\mu}{}_{\nu}) \equiv \partial_\lambda \boldsymbol{U}^{\lambda\mu}{}_{\nu} \tag{1.30}$$

を満たす量が存在し、

$$\partial_\mu \partial_\lambda \boldsymbol{U}^{\lambda\mu}{}_{\nu} = 0 \tag{1.31}$$

[3] エネルギー擬テンソルは一般座標変換に対してテンソルのように変換されないが、アフィン変換 (1.43) に対してはテンソルとして変換される。

であるとする。このとき、アインシュタイン方程式より、

$$(\sqrt{-g})^{\alpha}(\boldsymbol{T}^{\mu}{}_{\nu}+\boldsymbol{t}^{\mu}{}_{\nu}) = \partial_\lambda \boldsymbol{U}^{\lambda\mu}{}_{\nu} \tag{1.32}$$

となり、

$$\partial_\mu[(\sqrt{-g})^{\alpha}(\boldsymbol{T}^{\mu}{}_{\nu}+\boldsymbol{t}^{\mu}{}_{\nu})] = 0 \tag{1.33}$$

となる。もしも、

$$\boldsymbol{U}^{\lambda\mu}{}_{\nu} \equiv -\boldsymbol{U}^{\mu\lambda}{}_{\nu} \tag{1.34}$$

であれば、(1.31) も成立する。(1.30), (1.34) を満たす量をスーパー・ポテンシャルという。(1.30), (1.31) を満たす量を、ここでは仮に擬スーパー・ポテンシャルと呼ぶ。$\boldsymbol{t}^{\mu\nu}$ についても同様である (その場合、$\boldsymbol{U}$ の添え字は $\boldsymbol{U}^{\lambda\mu\nu}$ となる)。

スーパー・ポテンシャルが存在するとき、P_ν は、

$$\begin{aligned}P_\nu &= \int_{V_t} d^{D-1}x\ \partial_\lambda \boldsymbol{U}^{\lambda 0}{}_{\nu}\\ &= \int_{V_t} d^{D-1}x\ \partial_k \boldsymbol{U}^{k0}{}_{\nu}\\ &= \int_{S_t} dS_k\ \boldsymbol{U}^{k0}{}_{\nu}\end{aligned} \tag{1.35}$$

となり、表面積分で書ける。

§1.3 では、アインシュタインのエネルギー擬テンソル

$$\boldsymbol{t}^{\mu}{}_{\nu} := \frac{1}{2\kappa}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial(\partial_\mu g_{\alpha\beta})}\partial_\nu g_{\alpha\beta} - \delta^{\mu}_{\nu}\boldsymbol{G}\Big) \tag{1.36}$$

に対して、

$$\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{G}^{\mu}{}_{\nu}+\boldsymbol{t}^{\mu}{}_{\nu} \equiv \partial_\lambda \boldsymbol{U}^{\lambda\mu}{}_{\nu} \equiv \partial_\lambda {}^{(0)}\boldsymbol{C}^{\lambda\mu}{}_{\nu}, \tag{1.37}$$

$$\boldsymbol{U}^{\lambda\mu}{}_{\nu} \equiv -\boldsymbol{U}^{\lambda\mu}{}_{\nu}, \tag{1.38}$$

$$\partial_\mu\partial_\lambda {}^{(0)}\boldsymbol{C}^{\lambda\mu}{}_{\nu} \equiv 0, \tag{1.39}$$

$${}^{(0)}\boldsymbol{C}^{\lambda\mu}{}_{\nu} \neq -{}^{(0)}\boldsymbol{C}^{\mu\lambda}{}_{\nu} \tag{1.40}$$

を満たすスーパー・ポテンシャル $\boldsymbol{U}^{\lambda\mu}{}_{\nu}$ と、擬スーパー・ポテンシャル ${}^{(0)}\boldsymbol{C}^{\mu\lambda}{}_{\nu}$ を与える。

1.3 不変変分論：スーパー・ポテンシャルの導出

この節では、Noether の第 2 定理を応用して、スーパー・ポテンシャルを導入する。

Noether の定理には、大域的変換に対する第 1 定理と、局所的変換に対する第 2 定理がある。第 1 定理は場の理論の教科書で頻繁に使われる。第 2 定理の大きな応用例は、ゲージ理論と、ここで解説する重力場のエネルギーだと思う。ゲージ理論への応用は、[1] や私のノート「一般ゲー

ジ場論」http://physnakajima.html.xdomain.jp/gauge.pdf が詳しい。なお、論文 [4] はこの 2 つの応用について詳しい。

重力場のエネルギー擬テンソルの研究は、膨大な計算か、天才的なひらめきに関係するものが多いように思える。本記事では、そのどちらも (あまり) 必要ない部分を選んで解説する。Noether の第 2 定理の方法は、そのような方法だと思う。

さて、

$$S_{\mathrm{G}} := \int d^D x\ \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}}, \tag{1.41}$$

$$\tilde{S}_{\mathrm{G}} := \int d^D x\ \tilde{\boldsymbol{\mathcal{L}}}_{\mathrm{G}} \tag{1.42}$$

とする。S_{G} は一般座標変換で不変であり、$\tilde{S}_{\mathrm{G}}$ はアフィン変換

$$x^\mu \to x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu \tag{1.43}$$

で不変である。ここで、$a^\mu{}_\nu, b^\mu$ は定数で、行列 $a^\mu{}_\nu$ は逆を持つとする。さて、微小の一般座標変換

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) \tag{1.44}$$

を考える。この時、S_{G} の変化は、

$$\begin{aligned}\delta S_{\mathrm{G}} &= \int d^D x\ \left[\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\boldsymbol{\mathcal{L}}'_{\mathrm{G}}(x') - \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}}(x)\right] \\ &= \int d^D x\ (\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}}\partial_\mu \xi^\mu)\end{aligned} \tag{1.45}$$

である。ここで、

$$\delta F(x) := F'(x') - F(x) \tag{1.46}$$

である。今、

$$\bar{\delta} F(x) := F'(x')\big|_{x'=x} - F(x) \tag{1.47}$$

と置くと、

$$\begin{aligned}\delta F(x) &= F'(x') - F'(x')\big|_{x'=x} + F'(x')\big|_{x'=x} - F(x) \\ &= \partial_\mu F \delta x^\mu + \bar{\delta} F(x)\end{aligned} \tag{1.48}$$

であり、

$$\bar{\delta}(\partial_\mu F) = \partial_\mu(\bar{\delta} F), \tag{1.49}$$

$$\begin{aligned}\delta(\partial_\mu F) &= \bar{\delta}(\partial_\mu F) + \partial_\nu \partial_\mu F \delta x^\nu \\ &= \partial_\mu(\bar{\delta} F) + \partial_\nu \partial_\mu F \delta x^\nu \\ &= \partial_\mu(\delta F) - \partial_\nu F \partial_\mu(\delta x^\nu)\end{aligned} \tag{1.50}$$

が従う。第3等号で (1.48) を用いた。よって、

$$\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}}\partial_\mu\xi^\mu = \bar{\delta}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}} + \partial_\mu(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}}\xi^\mu) \tag{1.51}$$

である：

$$\delta S_{\mathrm{G}} = \int d^D x \,\Big[\bar{\delta}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}} + \partial_\mu(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}}\xi^\mu)\Big]. \tag{1.52}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
2\kappa\bar{\delta}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}} &= \bar{\delta}\boldsymbol{G} + \partial_\mu\bar{\delta}\boldsymbol{D}^\mu \\
&= \frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial g_{\alpha\beta}}\bar{\delta}g_{\alpha\beta} + \frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial(\partial_\gamma g_{\alpha\beta})}\partial_\gamma\bar{\delta}g_{\alpha\beta} \\
&\quad +\partial_\mu\Big[\frac{\partial\boldsymbol{D}^\mu}{\partial g_{\alpha\beta}}\bar{\delta}g_{\alpha\beta} + \frac{\partial\boldsymbol{D}^\mu}{\partial(\partial_\gamma g_{\alpha\beta})}\partial_\gamma\bar{\delta}g_{\alpha\beta}\Big] \\
&= \boldsymbol{G}^{\alpha\beta}\bar{\delta}g_{\alpha\beta} + \partial_\mu\Big[\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial(\partial_\mu g_{\alpha\beta})}\bar{\delta}g_{\alpha\beta} + \frac{\partial\boldsymbol{D}^\mu}{\partial g_{\alpha\beta}}\bar{\delta}g_{\alpha\beta} + \frac{\partial\boldsymbol{D}^\mu}{\partial(\partial_\gamma g_{\alpha\beta})}\partial_\gamma\bar{\delta}g_{\alpha\beta}\Big]
\end{aligned} \tag{1.53}$$

である。また、

$$\bar{\delta}g_{\alpha\beta} = -\partial_\alpha\xi^\lambda g_{\lambda\beta} - \partial_\beta\xi^\lambda g_{\lambda\alpha} - \xi^\mu\partial_\mu g_{\alpha\beta} \tag{1.54}$$

なので、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G}^{\alpha\beta}\bar{\delta}g_{\alpha\beta} &= -2\partial_\alpha\xi^\lambda\boldsymbol{G}^\alpha{}_\lambda - \xi^\mu\partial_\mu g_{\alpha\beta}\boldsymbol{G}^{\alpha\beta} \\
&= \partial_\mu[-2\xi^\lambda\boldsymbol{G}^\mu{}_\lambda] + 2\xi^\mu\partial_\alpha\boldsymbol{G}^\alpha{}_\mu - \xi^\mu\boldsymbol{G}^\alpha{}_\mu\partial_\mu g_{\alpha\beta}\boldsymbol{G}^{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{1.55}$$

となる。以上より、

$$2\kappa\Big[\bar{\delta}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}} + \partial_\mu(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{G}}\xi^\mu)\Big] = \xi^\mu(2\partial_\alpha\boldsymbol{G}^\alpha{}_\mu - \partial_\mu g_{\alpha\beta}\boldsymbol{G}^{\alpha\beta}) + \partial_\mu\boldsymbol{S}^\mu, \tag{1.56}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}^\mu &:= -2\xi^\lambda\boldsymbol{G}^\mu{}_\lambda + \frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial(\partial_\mu g_{\alpha\beta})}\bar{\delta}g_{\alpha\beta} + \frac{\partial\boldsymbol{D}^\mu}{\partial g_{\alpha\beta}}\bar{\delta}g_{\alpha\beta} + \frac{\partial\boldsymbol{D}^\mu}{\partial(\partial_\gamma g_{\alpha\beta})}\partial_\gamma\bar{\delta}g_{\alpha\beta} \\
&\quad +(\boldsymbol{G} + \partial_\alpha\boldsymbol{D}^\alpha)\xi^\mu
\end{aligned} \tag{1.57}$$

となる。これを (1.52) に代入して、

$$\begin{aligned}
2\kappa\delta S_{\mathrm{G}} &= \int_V d^D x\ \xi^\mu(2\partial_\alpha\boldsymbol{G}^\alpha{}_\mu - \partial_\mu g_{\alpha\beta}\boldsymbol{G}^{\alpha\beta}) \\
&\quad + \int_V d^D x\ \partial_\mu\boldsymbol{S}^\mu \equiv 0
\end{aligned} \tag{1.58}$$

を得る。第2項は ∂V での表面積分となり、これが0になるように ξ^μ を選ぶことが出来る。よって、第1項から、

$$\partial_\alpha\boldsymbol{G}^\alpha{}_\mu - \frac{1}{2}\partial_\mu g_{\alpha\beta}\boldsymbol{G}^{\alpha\beta} \equiv 0 \tag{1.59}$$

を得る。これは (1.17) であり、ビアンキ恒等式である。

(1.59) を (1.58) に代入して、

$$\partial_\mu \boldsymbol{S}^\mu \equiv 0 \tag{1.60}$$

という恒等式が得られる。今、

$$\frac{1}{2\kappa}\boldsymbol{S}^\mu = \boldsymbol{B}^\mu{}_\gamma \xi^\gamma + \boldsymbol{C}^{\mu,\alpha}{}_\gamma \partial_\alpha \xi^\gamma + \boldsymbol{F}^{\mu,\alpha\beta}{}_\gamma \partial_\alpha\partial_\beta \xi^\gamma \tag{1.61}$$

と置く ($\boldsymbol{F}^{\mu,\alpha\beta}{}_\gamma = \boldsymbol{F}^{\mu,\beta\alpha}{}_\gamma$ とする) と、ξ^γ, $\partial_\alpha\xi^\gamma$, $\partial_\alpha\partial_\beta\xi^\gamma$, $\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma\xi^\mu$ の係数をそれぞれ 0 と置くことで、

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \boldsymbol{B}^\mu{}_\gamma &\equiv 0, \qquad (1.62)\\
\boldsymbol{B}^\mu{}_\gamma + \partial_\alpha \boldsymbol{C}^{\alpha,\mu}{}_\gamma &\equiv 0, \qquad (1.63)\\
\boldsymbol{C}^{(\alpha,\beta)}{}_\gamma + \partial_\mu \boldsymbol{F}^{\mu,\alpha\beta}{}_\gamma &\equiv 0, \qquad (1.64)\\
\boldsymbol{F}^{(\gamma,\alpha\beta)}{}_\mu &\equiv 0 \qquad (1.65)
\end{aligned}$$

を得る。ここで、$(\cdots)$ は対称化記号であり、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C}^{(\alpha,\beta)}{}_\gamma &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{C}^{\alpha,\beta}{}_\gamma + \boldsymbol{C}^{\beta,\alpha}{}_\gamma), \qquad (1.66)\\
\boldsymbol{F}^{(\gamma,\alpha\beta)}{}_\mu &= \frac{1}{3}(\boldsymbol{F}^{\gamma,\alpha\beta}{}_\mu + \boldsymbol{F}^{\alpha,\beta\gamma}{}_\mu + \boldsymbol{F}^{\beta,\gamma\alpha}{}_\mu) \qquad (1.67)
\end{aligned}$$

である。さて、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}^\mu = {}& \xi^\lambda(-2\boldsymbol{G}^\mu{}_\lambda + \boldsymbol{G}\delta^\mu_\lambda + \partial_\alpha \boldsymbol{D}^\alpha \delta^\mu_\lambda) - \Big(\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial(\partial_\mu g_{\alpha\beta})} + \frac{\partial \boldsymbol{D}^\mu}{\partial g_{\alpha\beta}}\Big)(2\partial_\alpha\xi^\lambda g_{\lambda\beta} + \xi^\lambda\partial_\lambda g_{\alpha\beta})\\
& - \frac{\partial \boldsymbol{D}^\mu}{\partial(\partial_\gamma g_{\alpha\beta})}(2\partial_\gamma\partial_\alpha\xi^\lambda g_{\lambda\beta} + 2\partial_\alpha\xi^\lambda\partial_\gamma g_{\lambda\beta} + \partial_\gamma\xi^\lambda\partial_\lambda g_{\alpha\beta} + \xi^\lambda\partial_\gamma\partial_\lambda g_{\alpha\beta}) \qquad (1.68)
\end{aligned}$$

なので、$\boldsymbol{B}^\mu{}_\gamma$, $\boldsymbol{C}^{\mu,\alpha}{}_\gamma$, $\boldsymbol{F}^{\mu,\alpha\beta}{}_\gamma$ は以下のようになる：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}^\mu{}_\gamma &= -\Big(\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{G}^\mu{}_\gamma + \boldsymbol{t}^\mu{}_\gamma\Big) + \frac{1}{2\kappa}\partial_\sigma(\boldsymbol{D}^\sigma\delta^\mu_\gamma - \boldsymbol{D}^\mu\delta^\sigma_\gamma), \qquad (1.69)\\
\boldsymbol{C}^{\mu,\alpha}{}_\gamma &= -\frac{1}{\kappa}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial(\partial_\mu g_{\alpha\beta})}g_{\gamma\beta} + \frac{\partial \boldsymbol{D}^\mu}{\partial g_{\alpha\beta}}g_{\gamma\beta} + \frac{\partial \boldsymbol{D}^\mu}{\partial(\partial_\lambda g_{\alpha\beta})}\partial_\lambda g_{\gamma\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{D}^\mu}{\partial(\partial_\alpha g_{\mu\nu})}\partial_\gamma g_{\mu\nu}\Big), \qquad (1.70)\\
\boldsymbol{F}^{\mu,\alpha\beta}{}_\gamma &= -\frac{1}{2\kappa}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{D}^\mu}{\partial(\partial_\beta g_{\alpha\delta})} + \frac{\partial \boldsymbol{D}^\mu}{\partial(\partial_\alpha g_{\beta\delta})}\Big)g_{\gamma\delta}. \qquad (1.71)
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{B}^\mu{}_\gamma$ の最後の項で、

$$\partial_\gamma \boldsymbol{D}^\mu = \frac{\partial \boldsymbol{D}^\mu}{\partial g_{\alpha\beta}}\partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \frac{\partial \boldsymbol{D}^\mu}{\partial(\partial_\delta g_{\alpha\beta})}\partial_\gamma\partial_\delta g_{\alpha\beta} \tag{1.72}$$

を用いた。なお、$\boldsymbol{t}^\mu{}_\gamma$ は (1.36) で定義される。$\boldsymbol{t}^\mu{}_\gamma$ はアフィン変換 (1.43) に対してテンソルとして振る舞う。

(1.62), (1.69) より、

$$\partial_\mu\Big(\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{G}^\mu{}_\gamma + \boldsymbol{t}^\mu{}_\gamma\Big) \equiv 0 \tag{1.73}$$

を得る。これとアインシュタイン方程式より、$\boldsymbol{t}^{\mu}{}_{\gamma}$ はエネルギー擬テンソルであることが分かる。

$\tilde{S}_{\mathrm{G}}$ に対しては、

$$\partial_\alpha \partial_\beta \xi^\gamma = 0 \tag{1.74}$$

となるような任意の微小な ξ^γ について同様の議論が成り立ち、

$$\partial_\mu {}^{(0)}\boldsymbol{S}^\mu \equiv 0 \tag{1.75}$$

となる。ここで、${}^{(0)}\boldsymbol{S}^\mu$ は $\boldsymbol{S}^\mu$ で $\boldsymbol{D}^\mu \to 0$ としたものである。よって、

$$\frac{1}{2\kappa}{}^{(0)}\boldsymbol{S}^\mu = {}^{(0)}\boldsymbol{B}^\mu{}_\gamma \xi^\gamma + {}^{(0)}\boldsymbol{C}^{\mu\alpha}{}_\gamma \partial_\alpha \xi^\gamma \tag{1.76}$$

と置くと、

$$\partial_\mu {}^{(0)}\boldsymbol{B}^\mu{}_\gamma \equiv 0, \tag{1.77}$$

$${}^{(0)}\boldsymbol{B}^\mu{}_\gamma + \partial_\alpha {}^{(0)}\boldsymbol{C}^{\alpha\mu}{}_\gamma \equiv 0 \tag{1.78}$$

を得る。${}^{(0)}\boldsymbol{B}^\mu{}_\gamma$, ${}^{(0)}\boldsymbol{C}^{\mu,\alpha}{}_\gamma$ は $\boldsymbol{B}^\mu{}_\gamma$, $\boldsymbol{C}^{\mu,\alpha}{}_\gamma$ で $\boldsymbol{D}^\mu \to 0$ としたものである：

$${}^{(0)}\boldsymbol{B}^\mu{}_\gamma = -\Big(\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{G}^\mu{}_\gamma + \boldsymbol{t}^\mu{}_\gamma\Big), \tag{1.79}$$

$${}^{(0)}\boldsymbol{C}^{\mu\alpha}{}_\gamma = -\frac{1}{\kappa}\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial(\partial_\mu g_{\alpha\beta})} g_{\gamma\beta}. \tag{1.80}$$

(1.78), (1.79), (1.80) より、${}^{(0)}\boldsymbol{C}^{\mu\alpha}{}_\gamma$ が擬スーパー・ポテンシャルだと分かる[4) 5)]。

さて、(1.62), (1.63), (1.69), (1.70) より、

$$\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{G}^\mu{}_\nu + \boldsymbol{t}^\mu{}_\nu \equiv \partial_\lambda\Big[-\frac{1}{\kappa}\delta^{[\lambda}_\nu \boldsymbol{D}^{\mu]} + \boldsymbol{C}^{\lambda,\mu}{}_\nu\Big] \tag{1.81}$$

である。ここで、$[\cdots]$ は反対称化記号で、

$$A^{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(A^{\mu\nu} - A^{\nu\mu}) \tag{1.82}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^{\lambda,\mu}{}_\nu &= \boldsymbol{C}^{[\lambda,\mu]}{}_\nu + \boldsymbol{C}^{(\lambda,\mu)}{}_\nu \\ &\equiv \boldsymbol{C}^{[\lambda,\mu]}{}_\nu - \partial_\rho \boldsymbol{F}^{\rho,\lambda\mu}{}_\nu\end{aligned} \tag{1.83}$$

である。(1.64) を用いた。よって、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{G}^\mu{}_\nu + \boldsymbol{t}^\mu{}_\nu \equiv \partial_\lambda\Big[-\frac{1}{\kappa}\delta^{[\lambda}_\nu \boldsymbol{D}^{\mu]} + \boldsymbol{C}^{[\lambda,\mu]}{}_\nu\Big] \\ -\frac{1}{2}\partial_\lambda\partial_\rho(\boldsymbol{F}^{\rho,\lambda\mu}{}_\nu + \boldsymbol{F}^{\lambda,\rho\mu}{}_\nu)\end{aligned} \tag{1.84}$$

[4)] (1.73) と (1.78), (1.79), (1.80) より、(1.39) が従う。

[5)] アインシュタインのエネルギー擬テンソルと対応する擬スーパー・ポテンシャルは、アインシュタインにより 1916 年に発見された。

となる。(1.65) より、

$$\boldsymbol{F}^{\rho,\lambda\mu}{}_{\nu} + \boldsymbol{F}^{\lambda,\rho\mu}{}_{\nu} \equiv -\boldsymbol{F}^{\mu,\lambda\rho}{}_{\nu} \tag{1.85}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}^{\rho,\lambda\mu}{}_{\nu} + \boldsymbol{F}^{\lambda,\rho\mu}{}_{\nu} &\equiv \frac{1}{3}\Big[\boldsymbol{F}^{\rho,\lambda\mu}{}_{\nu} + \boldsymbol{F}^{\lambda,\rho\mu}{}_{\nu} + 2(-\boldsymbol{F}^{\mu,\lambda\rho}{}_{\nu})\Big] \\ &= \frac{1}{3}\Big[(\boldsymbol{F}^{\rho,\lambda\mu}{}_{\nu} - \boldsymbol{F}^{\mu,\lambda\rho}{}_{\nu}) + (\boldsymbol{F}^{\lambda,\rho\mu}{}_{\nu} - \boldsymbol{F}^{\mu,\rho\lambda}{}_{\nu})\Big]\end{aligned} \tag{1.86}$$

であり、

$$-\frac{1}{2}\partial_{\lambda}\partial_{\rho}(\boldsymbol{F}^{\rho,\lambda\mu}{}_{\nu} + \boldsymbol{F}^{\lambda,\rho\mu}{}_{\nu}) \;\equiv\; \partial_{\lambda}\boldsymbol{u}^{\lambda\mu}{}_{\nu}, \tag{1.87}$$

$$\boldsymbol{u}^{\lambda\mu}{}_{\nu} := \partial_{\rho}\boldsymbol{v}^{\rho\lambda\mu}{}_{\nu} \equiv \boldsymbol{u}^{[\lambda\mu]}{}_{\nu}, \tag{1.88}$$

$$\boldsymbol{v}^{\rho\lambda\mu}{}_{\nu} := -\frac{1}{3}(\boldsymbol{F}^{\lambda,\rho\mu}{}_{\nu} - \boldsymbol{F}^{\mu,\rho\lambda}{}_{\nu}) = \boldsymbol{v}^{\rho[\lambda\mu]}{}_{\nu} \tag{1.89}$$

となる。以上より、

$$\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{G}^{\mu}{}_{\nu} + \boldsymbol{t}^{\mu}{}_{\nu} \;\equiv\; \partial_{\lambda}\boldsymbol{U}^{\lambda\mu}{}_{\nu}, \tag{1.90}$$

$$\boldsymbol{U}^{\lambda\mu}{}_{\nu} := -\frac{1}{\kappa}\delta^{[\lambda}_{\nu}\boldsymbol{D}^{\mu]} + \boldsymbol{C}^{[\lambda,\mu]}{}_{\nu} - \frac{1}{3}\partial_{\rho}(\boldsymbol{F}^{\lambda,\rho\mu}{}_{\nu} - \boldsymbol{F}^{\mu,\rho\lambda}{}_{\nu}) = \boldsymbol{U}^{[\lambda\mu]}{}_{\nu} \tag{1.91}$$

を得る。この $\boldsymbol{U}^{\lambda\mu}{}_{\nu}$ はスーパー・ポテンシャルである (この記事では内山のスーパーポテンシャルと呼ぶ)。

1.4 補足

$\boldsymbol{S}^{\mu}$ のことを $\boldsymbol{S}^{\mu}[\xi]$ と書く。ε を微小なスカラー, ξ^{μ} を任意のベクトル場とし、

$$\boldsymbol{S}^{\mu}[\varepsilon\xi] = \varepsilon\boldsymbol{B}^{\mu}[\xi] + \partial_{\alpha}\varepsilon\boldsymbol{C}^{\mu,\alpha}[\xi] + \partial_{\alpha}\partial_{\beta}\varepsilon\boldsymbol{F}^{\mu,\alpha\beta}[\xi] \tag{1.92}$$

と置くと、

$$\boldsymbol{B}^{\mu}[\xi] = \xi^{\gamma}\boldsymbol{B}^{\mu}{}_{\gamma} + \partial_{\alpha}\xi^{\gamma}\boldsymbol{C}^{\mu,\alpha}{}_{\gamma} + \partial_{\alpha}\partial_{\beta}\xi^{\gamma}\boldsymbol{F}^{\mu,\alpha\beta}{}_{\gamma}, \tag{1.93}$$

$$\boldsymbol{C}^{\mu,\alpha}[\xi] = \xi^{\gamma}\boldsymbol{C}^{\mu,\alpha}{}_{\gamma} + 2\partial_{\beta}\xi^{\gamma}\boldsymbol{F}^{\mu,\alpha\beta}{}_{\gamma}, \tag{1.94}$$

$$\boldsymbol{F}^{\mu,\alpha\beta}[\xi] = \xi^{\gamma}\boldsymbol{F}^{\mu,\alpha\beta}{}_{\gamma} \tag{1.95}$$

となる。恒等式

$$\partial_{\mu}\boldsymbol{S}^{\mu}[\varepsilon\xi] \equiv 0 \tag{1.96}$$

の ε, $\partial_{\alpha}\varepsilon$, $\partial_{\alpha}\partial_{\beta}\varepsilon$ の係数より、

$$\partial_{\mu}\boldsymbol{B}^{\mu}[\xi] \equiv 0, \tag{1.97}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mu}[\xi] + \partial_{\alpha}\boldsymbol{C}^{\alpha,\mu}[\xi] \equiv 0, \tag{1.98}$$

$$\boldsymbol{C}^{(\alpha,\beta)}[\xi] + \partial_{\mu}\boldsymbol{F}^{\mu,\alpha\beta}[\xi] \equiv 0, \tag{1.99}$$

$$\boldsymbol{F}^{(\mu,\alpha\beta)}[\xi] \equiv 0 \tag{1.100}$$

を得る。

2　具体的な計算

本章の計算は [1, 2, 3] には載っていないが、[5] に計算結果が載っている。本章の計算結果は [5] と一致する。

2.1　前章に現れた量の計算

前章での記号は、

$$\boldsymbol{G} = \sqrt{-g}G, \quad G = g^{\mu\nu}\Big[\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} - \Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}\Big], \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{D}^{\rho} = \sqrt{-g}D^{\rho}, \quad D^{\rho} = g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - g^{\mu\rho}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\nu}, \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mu}{}_{\gamma} = -\Big(\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{G}^{\mu}{}_{\gamma} + \boldsymbol{t}^{\mu}{}_{\gamma}\Big) + \frac{1}{2\kappa}\partial_{\sigma}(\boldsymbol{D}^{\sigma}\delta^{\mu}_{\gamma} - \boldsymbol{D}^{\mu}\delta^{\sigma}_{\gamma}), \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{C}^{\mu,\alpha}{}_{\gamma} = -\frac{1}{\kappa}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial(\partial_{\mu}g_{\alpha\beta})}g_{\gamma\beta} + \frac{\partial\boldsymbol{D}^{\mu}}{\partial g_{\alpha\beta}}g_{\gamma\beta} + \frac{\partial\boldsymbol{D}^{\mu}}{\partial(\partial_{\lambda}g_{\alpha\beta})}\partial_{\lambda}g_{\gamma\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial\boldsymbol{D}^{\mu}}{\partial(\partial_{\alpha}g_{\mu\nu})}\partial_{\gamma}g_{\mu\nu}\Big), \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{F}^{\mu,\alpha\beta}{}_{\gamma} = -\frac{1}{2\kappa}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{D}^{\mu}}{\partial(\partial_{\beta}g_{\alpha\delta})} + \frac{\partial\boldsymbol{D}^{\mu}}{\partial(\partial_{\alpha}g_{\beta\delta})}\Big)g_{\gamma\delta}, \tag{2.5}$$

$${}^{(0)}\boldsymbol{C}^{\mu\alpha}{}_{\gamma} = -\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial(\partial_{\mu}g_{\alpha\beta})}g_{\gamma\beta}, \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{t}^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2\kappa}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial(\partial_{\mu}g_{\alpha\beta})}\partial_{\nu}g_{\alpha\beta} - \delta^{\mu}_{\nu}\boldsymbol{G}\Big) \tag{2.7}$$

であった。これらを具体的に計算する。

今、

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} := \frac{1}{2}(\partial_{\mu}g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}) \tag{2.8}$$

とすると、

$$\begin{aligned} G &= g^{\mu\nu}g^{\rho\alpha}g^{\gamma\beta}[\Gamma_{\alpha\gamma\nu}\Gamma_{\beta\mu\rho} - \Gamma_{\alpha\gamma\rho}\Gamma_{\beta\mu\nu}] \\ &= g^{\mu\nu}g^{\rho\alpha}g^{\gamma\beta}[\Gamma_{\alpha\gamma\nu}\Gamma_{\beta\mu\rho} - \frac{1}{2}\partial_{\gamma}g_{\alpha\rho}\Gamma_{\beta\mu\nu}] \end{aligned} \tag{2.9}$$

である。また、

$$\frac{\partial\Gamma_{\lambda\mu\nu}}{\partial(\partial_{\sigma}g_{\delta\tau})} = \frac{1}{2}(\delta^{\sigma}_{\mu}\delta^{\delta\tau}_{\lambda\nu} + \delta^{\sigma}_{\nu}\delta^{\delta\tau}_{\lambda\mu} - \delta^{\sigma}_{\lambda}\delta^{\delta\tau}_{\mu\nu}) \tag{2.10}$$

となる。ここで、

$$\delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = \delta^{(\alpha}_{\mu}\delta^{\beta)}_{\nu} \tag{2.11}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} G^{\sigma,\delta\tau} &:= \frac{\partial G}{\partial(\partial_{\sigma}g_{\delta\tau})} \\ &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\rho\alpha}g^{\gamma\beta}[(\delta^{\sigma}_{\gamma}\delta^{\delta\tau}_{\alpha\nu} + \delta^{\sigma}_{\nu}\delta^{\delta\tau}_{\alpha\gamma} - \delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\delta\tau}_{\gamma\nu})\Gamma_{\beta\mu\rho} + \Gamma_{\alpha\gamma\nu}(\delta^{\sigma}_{\mu}\delta^{\delta\tau}_{\beta\rho} + \delta^{\sigma}_{\rho}\delta^{\delta\tau}_{\beta\mu} - \delta^{\sigma}_{\beta}\delta^{\delta\tau}_{\mu\rho}) \\ &\quad -\delta^{\sigma}_{\gamma}\delta^{\delta\tau}_{\alpha\rho}\Gamma_{\beta\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\gamma\rho}(\delta^{\sigma}_{\mu}\delta^{\delta\tau}_{\beta\nu} + \delta^{\sigma}_{\nu}\delta^{\delta\tau}_{\beta\mu} - \delta^{\sigma}_{\beta}\delta^{\delta\tau}_{\mu\nu})] \end{aligned} \tag{2.12}$$

となる。これより、

$$
\begin{aligned}
G^{\sigma,\delta\tau} \ =\ & \frac{1}{2}[g^{\mu\nu}g^{\rho\alpha}(\delta^\sigma_\gamma\delta^{\delta\tau}_{\alpha\nu}+\delta^\sigma_\nu\delta^{\delta\tau}_{\alpha\gamma}-\delta^\sigma_\alpha\delta^{\delta\tau}_{\gamma\nu})\Gamma^\gamma{}_{\mu\rho}+g^{\mu\nu}g^{\gamma\beta}\Gamma^\rho{}_{\gamma\nu}(\delta^\sigma_\mu\delta^{\delta\tau}_{\beta\rho}+\delta^\sigma_\rho\delta^{\delta\tau}_{\beta\mu}-\delta^\sigma_\beta\delta^{\delta\tau}_{\mu\rho}) \\
& -g^{\mu\nu}g^{\rho\alpha}\delta^\sigma_\gamma\delta^{\delta\tau}_{\alpha\rho}\Gamma^\gamma{}_{\mu\nu}-g^{\mu\nu}g^{\gamma\beta}\Gamma_\gamma(\delta^\sigma_\mu\delta^{\delta\tau}_{\beta\nu}+\delta^\sigma_\nu\delta^{\delta\tau}_{\beta\mu}-\delta^\sigma_\beta\delta^{\delta\tau}_{\mu\nu})] \\
=:\ & (1)+(2)+(3)+(4)
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

となる。ここで、

$$
\Gamma_\gamma := \Gamma^\rho{}_{\gamma\rho} \tag{2.14}
$$

である。まず、

$$
\begin{aligned}
(1) &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\rho\alpha}(\delta^\sigma_\gamma\delta^{\delta\tau}_{\alpha\nu}+\delta^\sigma_\nu\delta^{\delta\tau}_{\alpha\gamma}-\delta^\sigma_\alpha\delta^{\delta\tau}_{\gamma\nu})\Gamma^\gamma{}_{\mu\rho} \\
&= \frac{1}{4}[\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho}(g^{\mu\tau}g^{\rho\delta}+g^{\mu\delta}g^{\rho\tau})+g^{\mu\sigma}(g^{\rho\delta}\Gamma^\tau{}_{\mu\rho}+g^{\rho\tau}\Gamma^\delta{}_{\mu\rho})-g^{\rho\sigma}(g^{\mu\tau}\Gamma^\delta{}_{\mu\rho}+g^{\mu\delta}\Gamma^\tau{}_{\mu\rho})] \\
&= \frac{1}{4}\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho}(g^{\mu\tau}g^{\rho\delta}+g^{\mu\delta}g^{\rho\tau})
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

である。次に、

$$
\begin{aligned}
(2) &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\gamma\beta}\Gamma^\rho{}_{\gamma\nu}(\delta^\sigma_\mu\delta^{\delta\tau}_{\beta\rho}+\delta^\sigma_\rho\delta^{\delta\tau}_{\beta\mu}-\delta^\sigma_\beta\delta^{\delta\tau}_{\mu\rho}) \\
&= \frac{1}{4}[g^{\sigma\nu}(g^{\gamma\delta}\Gamma^\tau{}_{\gamma\nu}+g^{\gamma\tau}\Gamma^\delta{}_{\gamma\nu})+\Gamma^\sigma{}_{\gamma\nu}(g^{\tau\nu}g^{\gamma\delta}+g^{\delta\nu}g^{\gamma\tau})-g^{\gamma\sigma}(g^{\delta\nu}\Gamma^\tau{}_{\gamma\nu}+g^{\tau\nu}\Gamma^\delta{}_{\gamma\nu})] \\
&= \frac{1}{4}\Gamma^\sigma{}_{\gamma\nu}(g^{\tau\nu}g^{\gamma\delta}+g^{\delta\nu}g^{\gamma\tau})
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

であり、

$$
\begin{aligned}
(3) &= -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\rho\alpha}\delta^\sigma_\gamma\delta^{\delta\tau}_{\alpha\rho}\Gamma^\gamma{}_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{4}(-2g^{\mu\nu}g^{\delta\tau}\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}),
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

$$
\begin{aligned}
(4) &= -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\gamma\beta}\Gamma_\gamma(\delta^\sigma_\mu\delta^{\delta\tau}_{\beta\nu}+\delta^\sigma_\nu\delta^{\delta\tau}_{\beta\mu}-\delta^\sigma_\beta\delta^{\delta\tau}_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{4}[-2(g^{\sigma\tau}g^{\gamma\delta}+g^{\sigma\delta}g^{\gamma\tau})\Gamma_\gamma+2g^{\delta\tau}g^{\sigma\gamma}\Gamma_\gamma]
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

となる。よって、

$$
\begin{aligned}
G^{\sigma,\delta\tau} &= \frac{1}{4}\Big[2\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho}(g^{\mu\tau}g^{\rho\delta}+g^{\mu\delta}g^{\rho\tau})-2g^{\mu\nu}g^{\delta\tau}\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}-2(g^{\sigma\tau}g^{\gamma\delta}+g^{\sigma\delta}g^{\gamma\tau})\Gamma_\gamma+2g^{\delta\tau}g^{\sigma\gamma}\Gamma_\gamma\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho}(2g^{\mu\tau}g^{\rho\delta}-g^{\mu\rho}g^{\delta\tau})+(g^{\delta\tau}g^{\sigma\gamma}-g^{\sigma\tau}g^{\gamma\delta}-g^{\sigma\delta}g^{\gamma\tau})\Gamma_\gamma\Big]
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

となる。これより、

$$
\begin{aligned}
{}^{(0)}\boldsymbol{C}^{\sigma\delta}{}_\alpha &= -\frac{1}{\kappa}\sqrt{-g}G^{\sigma,\delta\tau}g_{\tau\alpha} \\
&= -\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\Big[\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho}(2\delta^\mu_\alpha g^{\rho\delta}-g^{\mu\rho}\delta^\delta_\alpha)+(\delta^\delta_\alpha g^{\sigma\gamma}-\delta^\sigma_\alpha g^{\gamma\delta}-g^{\sigma\delta}\delta^\gamma_\alpha)\Gamma_\gamma\Big] \\
&= -\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\Big[(2\Gamma^\sigma{}_{\alpha\rho}g^{\rho\delta}-\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho}g^{\mu\rho}\delta^\delta_\alpha)+(\delta^\delta_\alpha g^{\sigma\gamma}\Gamma_\gamma-\delta^\sigma_\alpha g^{\gamma\delta}\Gamma_\gamma-g^{\sigma\delta}\Gamma_\alpha)\Big] \\
&= \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\Big[\delta^\delta_\alpha(\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho}g^{\mu\rho}-\Gamma_\gamma g^{\sigma\gamma})+\delta^\sigma_\alpha\Gamma_\gamma g^{\gamma\delta}+\Gamma_\alpha g^{\sigma\delta}-2\Gamma^\sigma{}_{\alpha\rho}g^{\rho\delta}\Big]
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

となる。
　次に、

$$D^{\mu\sigma,\alpha\beta} := \frac{\partial D^\mu}{\partial(\partial_\sigma g_{\alpha\beta})} \tag{2.21}$$

を調べる。まず、

$$D^\kappa = (g^{\mu\nu}g^{\kappa\rho} - g^{\mu\kappa}g^{\nu\rho})\Gamma_{\rho\mu\nu} \tag{2.22}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} D^{\kappa\sigma,\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(g^{\mu\nu}g^{\kappa\rho} - g^{\mu\kappa}g^{\nu\rho})(\delta^\sigma_\mu\delta^{\alpha\beta}_{\rho\nu} + \delta^\sigma_\nu\delta^{\alpha\beta}_{\rho\mu} - \delta^\sigma_\rho\delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{4}(2g^{\sigma\beta}g^{\kappa\alpha} + 2g^{\sigma\alpha}g^{\kappa\beta} - 2g^{\alpha\beta}g^{\kappa\sigma} \\ &\quad -2g^{\sigma\kappa}g^{\beta\alpha} - g^{\beta\kappa}g^{\sigma\alpha} - g^{\alpha\kappa}g^{\sigma\beta} + g^{\alpha\kappa}g^{\beta\sigma} + g^{\beta\kappa}g^{\alpha\sigma}) \\ &= \frac{1}{2}(g^{\sigma\beta}g^{\kappa\alpha} + g^{\sigma\alpha}g^{\kappa\beta} - 2g^{\alpha\beta}g^{\kappa\sigma}) \end{aligned} \tag{2.23}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}^{\kappa,\alpha\beta}{}_\gamma &= -\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\Big(D^{\kappa\beta,\alpha\delta} + D^{\kappa\alpha,\beta\delta}\Big)g_{\gamma\delta} \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{4\kappa}\Big(-g^{\beta\delta}g^{\kappa\alpha} - g^{\beta\alpha}g^{\kappa\delta} + 2g^{\alpha\delta}g^{\kappa\beta} - g^{\alpha\delta}g^{\kappa\beta} - g^{\alpha\beta}g^{\kappa\delta} + 2g^{\beta\delta}g^{\kappa\alpha}\Big)g_{\gamma\delta} \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{4\kappa}\Big(-2g^{\alpha\beta}g^{\kappa\delta} + g^{\alpha\delta}g^{\kappa\beta} + g^{\beta\delta}g^{\kappa\alpha}\Big)g_{\gamma\delta} \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{4\kappa}\Big(-2\delta^\kappa_\gamma g^{\alpha\beta} + \delta^\alpha_\gamma g^{\kappa\beta} + \delta^\beta_\gamma g^{\kappa\alpha}\Big) \end{aligned} \tag{2.24}$$

を得る。
　次に、$\boldsymbol{C}^{\mu,\alpha}{}_\gamma$ を調べる。今、

$$^{(1)}\boldsymbol{c}^{\mu,\alpha}{}_\gamma := \frac{\partial \boldsymbol{D}^\mu}{\partial g_{\alpha\beta}}g_{\gamma\beta}, \tag{2.25}$$

$$^{(2)}\boldsymbol{c}^{\mu,\alpha}{}_\gamma := \frac{\partial \boldsymbol{D}^\mu}{\partial(\partial_\lambda g_{\alpha\beta})}\partial_\lambda g_{\gamma\beta}, \tag{2.26}$$

$$^{(3)}\boldsymbol{c}^{\mu,\alpha}{}_\gamma := \frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{D}^\mu}{\partial(\partial_\alpha g_{\mu\nu})}\partial_\gamma g_{\mu\nu}, \tag{2.27}$$

$$^{(0)}\boldsymbol{c}^{\mu,\alpha}{}_\gamma := -\kappa \cdot {}^{(0)}\boldsymbol{C}^{\mu\alpha}{}_\gamma = \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial(\partial_\mu g_{\alpha\beta})}g_{\gamma\beta} \tag{2.28}$$

とすると、

$$\boldsymbol{C}^{\mu,\alpha}{}_\gamma = -\frac{1}{\kappa}\sum_{n=0}^{3}{}^{(n)}\boldsymbol{c}^{\mu,\alpha}{}_\gamma \tag{2.29}$$

である。まず $^{(1)}\boldsymbol{c}^{\mu,\alpha}{}_\gamma$ を調べる。今、

$$d^{\kappa,\alpha\beta} := \frac{\partial D^\kappa}{\partial g_{\alpha\beta}} \tag{2.30}$$

と置く。関係式

$$\delta g^{\sigma\lambda} = -g^{\sigma(\alpha}g^{\beta)\lambda}\delta g_{\alpha\beta} \tag{2.31}$$

より、

$$\begin{aligned}
d^{\kappa,\alpha\beta} &= (-g^{\mu(\alpha}g^{\beta)\nu}g^{\kappa\rho} - g^{\mu\nu}g^{\kappa(\alpha}g^{\beta)\rho} + g^{\mu(\alpha}g^{\beta)\kappa}g^{\nu\rho} + g^{\mu\kappa}g^{\nu(\alpha}g^{\beta)\rho})\Gamma_{\rho\mu\nu} \\
&= -g^{\mu\alpha}g^{\beta\nu}\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g^{\alpha\kappa}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} + g^{\beta\kappa}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}) \\
&\quad +\frac{1}{2}(g^{\mu\alpha}g^{\beta\kappa} + g^{\mu\beta}g^{\alpha\kappa})\Gamma_{\mu} + \frac{1}{2}g^{\mu\kappa}(g^{\nu\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} + g^{\nu\beta}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu})
\end{aligned} \tag{2.32}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{D}^{\kappa}}{\partial g_{\alpha\beta}} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\boldsymbol{D}^{\kappa} + \sqrt{-g}d^{\kappa,\alpha\beta} \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{2}\Big[g^{\alpha\beta}(g^{\mu\nu}\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu} - g^{\mu\kappa}\Gamma_{\mu}) - 2g^{\mu\alpha}g^{\beta\nu}\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}(g^{\alpha\kappa}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} + g^{\beta\kappa}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}) \\
&\quad +(g^{\mu\alpha}g^{\beta\kappa} + g^{\mu\beta}g^{\alpha\kappa})\Gamma_{\mu} + g^{\mu\kappa}(g^{\nu\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} + g^{\nu\beta}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu})\Big]
\end{aligned} \tag{2.33}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}\boldsymbol{c}^{\kappa,\alpha}{}_{\gamma} &= \frac{\partial \boldsymbol{D}^{\kappa}}{\partial g_{\alpha\beta}}g_{\gamma\beta} \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{2}\Big[\delta^{\alpha}_{\gamma}(g^{\mu\nu}\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu} - g^{\mu\kappa}\Gamma_{\mu}) - 2g^{\mu\alpha}\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\gamma} - g^{\mu\nu}(g^{\alpha\kappa}g_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} + \delta^{\kappa}_{\gamma}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}) \\
&\quad +(g^{\mu\alpha}\delta^{\kappa}_{\gamma}\Gamma_{\mu} + g^{\alpha\kappa}\Gamma_{\gamma}) + g^{\mu\kappa}(g^{\nu\alpha}g_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\gamma})\Big]
\end{aligned} \tag{2.34}$$

となる。

次に、${}^{(2)}\boldsymbol{c}^{\mu,\alpha}{}_{\gamma}$, ${}^{(3)}\boldsymbol{c}^{\mu,\alpha}{}_{\gamma}$ を調べる。関係式

$$\partial_{\lambda}g_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} + g_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu} \tag{2.35}$$

より、

$$\begin{aligned}
{}^{(2)}\boldsymbol{c}^{\kappa,\alpha}{}_{\gamma} &= \frac{\partial \boldsymbol{D}^{\kappa}}{\partial(\partial_{\lambda}g_{\alpha\beta})}\partial_{\lambda}g_{\gamma\beta} \\
&= \sqrt{-g}D^{\kappa\lambda,\alpha\beta}(g_{\gamma\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\lambda} + g_{\beta\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\gamma}) \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{2}(g^{\lambda\beta}g^{\kappa\alpha} + g^{\lambda\alpha}g^{\kappa\beta} - 2g^{\alpha\beta}g^{\kappa\lambda})(g_{\gamma\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda} + g_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\gamma}) \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{2}(g^{\lambda\beta}g^{\kappa\alpha}g_{\gamma\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda} + g^{\kappa\alpha}\Gamma_{\gamma} + g^{\lambda\alpha}g^{\kappa\beta}g_{\gamma\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda} + g^{\lambda\alpha}\Gamma^{\kappa}{}_{\lambda\gamma} \\
&\quad -2g^{\alpha\beta}g^{\kappa\lambda}g_{\gamma\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda} - 2g^{\kappa\lambda}\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\gamma})
\end{aligned} \tag{2.36}$$

となる。また、

$$
\begin{aligned}
{}^{(3)}\boldsymbol{c}^{\kappa,\alpha}{}_{\gamma} &:= \frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{D}^{\kappa}}{\partial(\partial_\alpha g_{\mu\nu})}\partial_\gamma g_{\mu\nu} \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{2}\boldsymbol{D}^{\kappa\alpha,\mu\nu}\partial_\gamma g_{\mu\nu} \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{2}\boldsymbol{D}^{\kappa\alpha,\mu\nu}(g_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\gamma} + g_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\mu}) \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{2}(g^{\alpha\nu}g^{\kappa\mu} + g^{\alpha\mu}g^{\kappa\nu} - 2g^{\mu\nu}g^{\kappa\alpha})g_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\gamma} \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{2}(g^{\alpha\nu}\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\gamma} + g^{\kappa\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\gamma} - 2g^{\kappa\alpha}\Gamma_{\gamma})
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

である。なお、

$$
{}^{(0)}\boldsymbol{c}^{\kappa,\alpha}{}_{\gamma} = \frac{\sqrt{-g}}{2}\Big[\delta^{\alpha}_{\gamma}(-g^{\mu\rho}\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\rho} + g^{\kappa\lambda}\Gamma_\lambda) - \delta^{\kappa}_{\gamma}g^{\lambda\alpha}\Gamma_\lambda - g^{\kappa\alpha}\Gamma_\gamma + 2g^{\rho\alpha}\Gamma^{\kappa}{}_{\gamma\rho}\Big] \tag{2.38}
$$

であった。

よって、

$$
\begin{aligned}
-\kappa\boldsymbol{C}^{\kappa,\alpha}{}_{\gamma} &= \sum_{n=0}^{3}{}^{(n)}\boldsymbol{c}^{\kappa,\alpha}{}_{\gamma} \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{2}\Big[\delta^{\alpha}_{\gamma}(-g^{\mu\rho}\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\rho} + g^{\kappa\lambda}\Gamma_\lambda) - \delta^{\kappa}_{\gamma}g^{\lambda\alpha}\Gamma_\lambda - g^{\kappa\alpha}\Gamma_\gamma + 2g^{\rho\alpha}\Gamma^{\kappa}{}_{\gamma\rho} \\
&\quad +\delta^{\alpha}_{\gamma}(g^{\mu\nu}\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu} - g^{\mu\kappa}\Gamma_\mu) - 2g^{\mu\alpha}\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\gamma} - g^{\mu\nu}(g^{\alpha\kappa}g_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} + \delta^{\kappa}_{\gamma}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}) \\
&\quad +(g^{\mu\alpha}\delta^{\kappa}_{\gamma}\Gamma_\mu + g^{\alpha\kappa}\Gamma_\gamma) + g^{\mu\kappa}(g^{\nu\alpha}g_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\gamma}) \\
&\quad +g^{\lambda\beta}g^{\kappa\alpha}g_{\gamma\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda} + g^{\kappa\alpha}\Gamma_\gamma + g^{\lambda\alpha}g^{\kappa\beta}g_{\gamma\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda} + g^{\lambda\alpha}\Gamma^{\kappa}{}_{\lambda\gamma} \\
&\quad -2g^{\alpha\beta}g^{\kappa\lambda}g_{\gamma\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda} - 2g^{\kappa\lambda}\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\gamma} \\
&\quad +g^{\alpha\nu}\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\gamma} + g^{\kappa\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\gamma} - 2g^{\kappa\alpha}\Gamma_\gamma\Big]
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

である。整理すると、

$$
\boldsymbol{C}^{\kappa,\alpha}{}_{\gamma} = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\Big[\delta^{\kappa}_{\gamma}g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} + g^{\kappa\alpha}\Gamma_\gamma - 2g^{\rho\alpha}\Gamma^{\kappa}{}_{\gamma\rho}\Big] \tag{2.40}
$$

となる。

2.2 名前の付いたスーパー・ポテンシャル

今、

$$
\boldsymbol{W}^{\kappa\rho,\alpha}{}_{\gamma} := \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}(g^{\alpha\kappa}\delta^{\rho}_{\gamma} - g^{\alpha\rho}\delta^{\kappa}_{\gamma}) = \frac{4}{3}\boldsymbol{F}^{[\kappa,\rho]\alpha}{}_{\gamma} = \boldsymbol{W}^{[\kappa\rho],\alpha}{}_{\gamma} \tag{2.41}
$$

とし、

$$
\boldsymbol{f}^{\kappa\rho}{}_{\gamma} := {}^{(0)}\boldsymbol{C}^{\kappa\rho}{}_{\gamma} - \partial_\rho\boldsymbol{W}^{\kappa\rho,\alpha}{}_{\gamma} = \boldsymbol{f}^{[\kappa\rho]}{}_{\gamma}, \tag{2.42}
$$

$$
\boldsymbol{m}^{\kappa\rho}{}_{\gamma} := \boldsymbol{C}^{\kappa,\rho}{}_{\gamma} - \partial_\rho\boldsymbol{W}^{\kappa\rho,\alpha}{}_{\gamma} = \boldsymbol{m}^{[\kappa\rho]}{}_{\gamma} \tag{2.43}
$$

とする。$\boldsymbol{f}^{\kappa\rho}{}_{\gamma}$ はFreudのスーパー・ポテンシャルとなり、$\boldsymbol{m}^{\kappa\rho}{}_{\gamma}$ はメラーのスーパー・ポテンシャルとなる [5]。これらは、

$$\partial_\kappa \boldsymbol{f}^{\kappa\rho}{}_{\gamma} = \partial_\kappa {}^{(0)}\boldsymbol{C}^{\kappa\rho}{}_{\gamma}, \tag{2.44}$$

$$\partial_\kappa \boldsymbol{m}^{\kappa\rho}{}_{\gamma} = \partial_\kappa \boldsymbol{C}^{\kappa,\rho}{}_{\gamma} \tag{2.45}$$

を満たす。Freudのスーパー・ポテンシャルはアインシュタインのエネルギー擬テンソルを与え、メラーのスーパー・ポテンシャルはエネルギー擬テンソル

$${}^{(M)}\boldsymbol{t}^{\mu}{}_{\nu} := \boldsymbol{t}^{\mu}{}_{\nu} + \frac{1}{\kappa}\partial_\lambda \delta_\nu^{[\lambda}\boldsymbol{D}^{\mu]} \tag{2.46}$$

を与える。

さて、$\boldsymbol{f}^{\kappa\rho}{}_{\gamma}$ の表式を求めよう。まず、

$$\partial_\rho\sqrt{-g} = \sqrt{-g}\Gamma_\rho \tag{2.47}$$

なので、

$$\partial_\rho \boldsymbol{W}^{\kappa\rho,\alpha}{}_{\gamma} = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\Big[g^{\alpha\kappa}\Gamma_\gamma - \Gamma_\rho g^{\alpha\rho}\delta_\gamma^\kappa + \partial_\gamma g^{\alpha\kappa} - \partial_\rho g^{\alpha\rho}\delta_\gamma^\kappa\Big] \tag{2.48}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda g^{\alpha\beta} &= -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\partial_\lambda g_{\mu\nu} \\
&= -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}(g_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} + g_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}) \\
&= -(g^{\nu\beta}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda} + g^{\mu\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\lambda\mu}),
\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\partial_\lambda g^{\alpha\lambda} = -(g^{\nu\lambda}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda} + g^{\mu\alpha}\Gamma_\mu) \tag{2.50}$$

より、

$$\begin{aligned}
\partial_\rho \boldsymbol{W}^{\kappa\rho,\alpha}{}_{\gamma} &= \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\Big[g^{\alpha\kappa}\Gamma_\gamma - \Gamma_\rho g^{\alpha\rho}\delta_\gamma^\kappa - g^{\nu\kappa}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\gamma} - g^{\mu\alpha}\Gamma^{\kappa}{}_{\gamma\mu} + (g^{\nu\lambda}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda} + g^{\mu\alpha}\Gamma_\mu)\delta_\gamma^\kappa\Big] \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\Big[g^{\alpha\kappa}\Gamma_\gamma - g^{\nu\kappa}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\gamma} - g^{\mu\alpha}\Gamma^{\kappa}{}_{\gamma\mu} + g^{\nu\lambda}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda}\delta_\gamma^\kappa\Big]
\end{aligned} \tag{2.51}$$

なので、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}^{\kappa\alpha}{}_{\gamma} &= \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\Big[\delta_\gamma^\alpha(g^{\mu\rho}\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\rho} - g^{\kappa\lambda}\Gamma_\lambda) + \delta_\gamma^\kappa g^{\lambda\alpha}\Gamma_\lambda + g^{\kappa\alpha}\Gamma_\gamma - 2g^{\rho\alpha}\Gamma^{\kappa}{}_{\gamma\rho} \\
&\quad - g^{\alpha\kappa}\Gamma_\gamma + g^{\nu\kappa}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\gamma} + g^{\mu\alpha}\Gamma^{\kappa}{}_{\gamma\mu} - g^{\nu\lambda}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda}\delta_\gamma^\kappa\Big] \\
&= \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\Big[\delta_\gamma^\alpha(g^{\mu\rho}\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\rho} - g^{\kappa\lambda}\Gamma_\lambda) + \delta_\gamma^\kappa(g^{\lambda\alpha}\Gamma_\lambda - g^{\nu\lambda}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda}) - g^{\rho\alpha}\Gamma^{\kappa}{}_{\gamma\rho} + g^{\nu\kappa}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\gamma}\Big]
\end{aligned} \tag{2.52}$$

となる。

$\boldsymbol{m}^{\kappa\rho}{}_{\gamma}$ の表式は、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{m}^{\kappa\rho}{}_{\gamma} &= \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\Big[\delta_\gamma^\kappa g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} + g^{\kappa\alpha}\Gamma_\gamma - 2g^{\rho\alpha}\Gamma^{\kappa}{}_{\gamma\rho} \\
&\quad - g^{\alpha\kappa}\Gamma_\gamma + g^{\nu\kappa}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\gamma} + g^{\mu\alpha}\Gamma^{\kappa}{}_{\gamma\mu} - g^{\nu\lambda}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda}\delta_\gamma^\kappa\Big] \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\Big[g^{\nu\kappa}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\gamma} - g^{\rho\alpha}\Gamma^{\kappa}{}_{\gamma\rho}\Big]
\end{aligned} \tag{2.53}$$

となる。

また、メラーのスーパー・ポテンシャルに対応して、

$$\boldsymbol{m}^{\kappa\rho}[\xi] := \boldsymbol{C}^{\kappa,\rho}[\xi] - \partial_\rho\Big[\xi^\gamma \boldsymbol{W}^{\kappa\rho,\alpha}{}_\gamma\Big] = \boldsymbol{m}^{[\kappa\rho]}[\xi] \tag{2.54}$$

を考えることができる。$\boldsymbol{m}^{\kappa\rho}[\xi]$ は Komar のスーパー・ポテンシャルと呼ばれる [5]。

本記事で解説できなかった、重力場のエネルギーについての進んだ議論は、論文 [4] が詳しい。

2.3 内山のスーパーポテンシャル $\boldsymbol{U}^{\lambda\mu}{}_\nu$ の表式

$\boldsymbol{U}^{\lambda\mu}{}_\nu$ を求める。

まず、(1.91) は、

$$\boldsymbol{U}^{\lambda\mu}{}_\nu := -\frac{1}{\kappa}\delta^{[\lambda}_\nu \boldsymbol{D}^{\mu]} + \boldsymbol{C}^{[\lambda,\mu]}{}_\nu - \frac{1}{3}\partial_\rho(\boldsymbol{F}^{\lambda,\rho\mu}{}_\nu - \boldsymbol{F}^{\mu,\rho\lambda}{}_\nu) \tag{2.55}$$

であった。(2.40) より、

$$\boldsymbol{C}^{[\kappa,\alpha]}{}_\gamma = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\Big[\frac{1}{2}\delta^\kappa_\gamma g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\gamma g^{\mu\nu}\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} - g^{\rho\alpha}\Gamma^\kappa{}_{\gamma\rho} + g^{\rho\kappa}\Gamma^\alpha{}_{\gamma\rho}\Big] \tag{2.56}$$

である。(2.24) より、

$$\boldsymbol{F}^{\kappa,\rho\alpha}{}_\gamma = \frac{\sqrt{-g}}{4\kappa}\Big(-2\delta^\kappa_\gamma g^{\rho\alpha} + \delta^\rho_\gamma g^{\kappa\alpha} + \delta^\alpha_\gamma g^{\kappa\rho}\Big) \tag{2.57}$$

なので、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}^{\kappa,\rho\alpha}{}_\gamma - \boldsymbol{F}^{\alpha,\rho\kappa}{}_\gamma &= \frac{\sqrt{-g}}{4\kappa}\Big(-2\delta^\kappa_\gamma g^{\rho\alpha} + 2\delta^\alpha_\gamma g^{\rho\kappa} + \delta^\alpha_\gamma g^{\kappa\rho} - \delta^\kappa_\gamma g^{\alpha\rho}\Big)\\ &= \frac{3}{4\kappa}\sqrt{-g}\Big(-\delta^\kappa_\gamma g^{\rho\alpha} + \delta^\alpha_\gamma g^{\rho\kappa}\Big)\end{aligned} \tag{2.58}$$

であり、

$$-\frac{1}{3}\partial_\rho(\boldsymbol{F}^{\kappa,\rho\alpha}{}_\gamma - \boldsymbol{F}^{\alpha,\rho\kappa}{}_\gamma) = \frac{1}{4\kappa}[\delta^\kappa_\gamma\partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\rho\alpha}) - \delta^\alpha_\gamma\partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\rho\kappa})] \tag{2.59}$$

である。ここで、

$$\partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\rho\alpha}) = \sqrt{-g}(\Gamma_\rho g^{\rho\alpha} + \partial_\rho g^{\rho\alpha}) \tag{2.60}$$

であり、

$$\begin{aligned}\partial_\rho g^{\beta\alpha} &= -g^{\beta\mu}g^{\alpha\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu}\\ &= -g^{\beta\mu}g^{\alpha\nu}(g_{\mu\delta}\Gamma^\delta{}_{\nu\rho} + g_{\nu\delta}\Gamma^\delta{}_{\rho\mu})\end{aligned} \tag{2.61}$$

なので、

$$\begin{aligned}\partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\rho\alpha}) &= \sqrt{-g}(\Gamma_\rho g^{\rho\alpha} - g^{\rho\mu}g^{\alpha\nu}g_{\mu\delta}\Gamma^\delta{}_{\nu\rho} - g^{\rho\mu}g^{\alpha\nu}g_{\nu\delta}\Gamma^\delta{}_{\rho\mu})\\ &= \sqrt{-g}(\Gamma_\rho g^{\rho\alpha} - g^{\alpha\nu}\Gamma^\rho{}_{\nu\rho} - g^{\rho\mu}\Gamma^\alpha{}_{\rho\mu})\\ &= -\sqrt{-g}g^{\rho\mu}\Gamma^\alpha{}_{\rho\mu}\end{aligned} \tag{2.62}$$

である。よって、

$$-\frac{1}{3}\partial_\rho(\boldsymbol{F}^{\kappa,\rho\alpha}{}_\gamma - \boldsymbol{F}^{\alpha,\rho\kappa}{}_\gamma) = \frac{\sqrt{-g}}{4\kappa}[-\delta^\kappa_\gamma g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} + \delta^\alpha_\gamma g^{\mu\nu}\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}] \tag{2.63}$$

である。これより、

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}^{[\kappa,\alpha]}{}_\gamma - \frac{1}{3}\partial_\rho(\boldsymbol{F}^{\kappa,\rho\alpha}{}_\gamma - \boldsymbol{F}^{\alpha,\rho\kappa}{}_\gamma) \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{4\kappa}\Big[\delta^\kappa_\gamma g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \delta^\alpha_\gamma g^{\mu\nu}\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} - 2g^{\rho\alpha}\Gamma^\kappa{}_{\gamma\rho} + 2g^{\rho\kappa}\Gamma^\alpha{}_{\gamma\rho} \\
&\qquad -\delta^\kappa_\gamma g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} + \delta^\alpha_\gamma g^{\mu\nu}\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}\Big] \\
&= \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\Big[-g^{\rho\alpha}\Gamma^\kappa{}_{\gamma\rho} + g^{\rho\kappa}\Gamma^\alpha{}_{\gamma\rho}\Big]
\end{aligned} \tag{2.64}$$

を得る。よって、

$$\boldsymbol{U}^{\kappa\alpha}{}_\gamma = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\Big[-g^{\rho\alpha}\Gamma^\kappa{}_{\gamma\rho} + g^{\rho\kappa}\Gamma^\alpha{}_{\gamma\rho} - \delta^\kappa_\gamma(g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\Gamma_\mu) + \delta^\alpha_\gamma(g^{\mu\nu}\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} - g^{\mu\kappa}\Gamma_\mu)\Big] \tag{2.65}$$

である。これは Freud のスーパー・ポテンシャル $\boldsymbol{f}^{\kappa\alpha}_\gamma$ と一致している。

2.4 アインシュタインのエネルギー擬テンソル $\boldsymbol{t}^\mu{}_\nu$ の表式

最後に $\boldsymbol{t}^\mu{}_\nu$ を計算しよう。これは、

$$\boldsymbol{t}^\mu{}_\nu = \frac{1}{2\kappa}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial(\partial_\mu g_{\alpha\beta})}\partial_\nu g_{\alpha\beta} - \delta^\mu_\nu\boldsymbol{G}\Big) \tag{2.66}$$

であった。いま、

$$t^\mu{}_\nu := \frac{\boldsymbol{t}^\mu{}_\nu}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2\kappa}(s^\mu{}_\nu - \delta^\mu_\nu G) \tag{2.67}$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
s^\mu{}_\nu &= \frac{\partial G}{\partial(\partial_\mu g_{\alpha\beta})}\partial_\nu g_{\alpha\beta} \\
&= G^{\mu,\alpha\beta}\partial_\nu g_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{2.68}$$

である。(2.19), (2.35) より、

$$s^\sigma{}_\nu = \frac{1}{2}\Big[\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho}(2g^{\mu\tau}g^{\rho\delta} - g^{\mu\rho}g^{\delta\tau}) + (g^{\delta\tau}g^{\sigma\gamma} - g^{\sigma\tau}g^{\gamma\delta} - g^{\sigma\delta}g^{\gamma\tau})\Gamma_\gamma\Big](g_{\delta\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\tau\nu} + g_{\tau\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\nu\delta}) \tag{2.69}$$

である。よって、

$$s^{\sigma\beta} := g^{\beta\nu}s^\sigma{}_\nu = {}^{(1)}s^{\sigma\beta} + {}^{(2)}s^{\sigma\beta}, \tag{2.70}$$

$${}^{(1)}s^{\sigma\beta} = \frac{1}{2}\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho}(2g^{\mu\tau}g^{\rho\delta} - g^{\mu\rho}g^{\delta\tau})g^{\beta\nu}(g_{\delta\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\tau\nu} + g_{\tau\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\nu\delta}), \tag{2.71}$$

$${}^{(2)}s^{\sigma\beta} = \frac{1}{2}(g^{\delta\tau}g^{\sigma\gamma} - g^{\sigma\tau}g^{\gamma\delta} - g^{\sigma\delta}g^{\gamma\tau})\Gamma_\gamma g^{\beta\nu}(g_{\delta\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\tau\nu} + g_{\tau\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\nu\delta}) \tag{2.72}$$

となる。まず、

$$
\begin{aligned}
2^{(1)}s^{\sigma\beta} &= 2\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\tau\nu}g^{\mu\tau}g^{\beta\nu} + 2\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\delta}g^{\beta\nu}g^{\rho\delta} \\
&\quad -\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho}\Gamma_{\nu}g^{\mu\rho}g^{\beta\nu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho}\Gamma_{\nu}g^{\mu\rho}g^{\beta\nu}, \qquad (2.73) \\
{}^{(1)}s^{\sigma\beta} &= 2\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\tau\nu}g^{\mu\tau}g^{\beta\nu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho}\Gamma_{\nu}g^{\mu\rho}g^{\beta\nu} \qquad (2.74)
\end{aligned}
$$

である。また、

$$
\begin{aligned}
2^{(2)}s^{\sigma\beta} &= \Gamma_{\gamma}\Gamma_{\nu}g^{\sigma\gamma}g^{\beta\nu} + \Gamma_{\gamma}\Gamma_{\nu}g^{\sigma\gamma}g^{\beta\nu} \\
&\quad -\Gamma_{\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{\tau\nu}g^{\sigma\tau}g^{\beta\nu} - \Gamma_{\gamma}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\delta}g^{\beta\nu}g^{\gamma\delta} \\
&\quad -\Gamma_{\gamma}\Gamma^{\sigma}{}_{\tau\nu}g^{\gamma\tau}g^{\beta\nu} - \Gamma_{\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{\nu\delta}g^{\sigma\delta}g^{\beta\nu} \qquad (2.75)
\end{aligned}
$$

なので、

$$
{}^{(2)}s^{\sigma\beta} = \Gamma_{\gamma}\Gamma_{\nu}g^{\sigma\gamma}g^{\beta\nu} - \Gamma_{\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{\tau\nu}g^{\sigma\tau}g^{\beta\nu} - \Gamma_{\gamma}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\delta}g^{\beta\nu}g^{\gamma\delta} \qquad (2.76)
$$

である。よって、

$$
s^{\sigma\beta} = 2\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\tau\nu}g^{\mu\tau}g^{\beta\nu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho}\Gamma_{\nu}g^{\mu\rho}g^{\beta\nu} - \Gamma_{\gamma}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\delta}g^{\beta\nu}g^{\gamma\delta} + \Gamma_{\gamma}\Gamma_{\nu}g^{\sigma\gamma}g^{\beta\nu} - \Gamma_{\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{\tau\nu}g^{\sigma\tau}g^{\beta\nu} \qquad (2.77)
$$

を得る。最初の 3 項は σ, β について対称ではない。

A　アインシュタイン・ヒルベルト作用の変形

この章では、一般のアフィン接続[6] についての $\sqrt{-g}R$ を変形する。
一般のアフィン接続は、

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^{\sigma}{}_{\mu\nu} + K^{\sigma}{}_{\mu\nu} \tag{A.1}$$

で与えられる。ここで、

$$\tilde{\Gamma}^{\sigma}{}_{\mu\nu} := \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \tag{A.2}$$

はクリストッフェルの 3 指記号で、§1 の $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ である。また、

$$K^{\sigma}{}_{\mu\nu} := \frac{1}{2}(C^{\sigma}{}_{\mu\nu} + C_{\nu\mu}{}^{\sigma} + C_{\mu\nu}{}^{\sigma}) \tag{A.3}$$

は contortion と呼ばれ、最初の 2 つの添え字について反対称

$$K_{\sigma\mu\nu} = -K_{\mu\sigma\nu} \tag{A.4}$$

である。なお、

$$C^{\sigma}{}_{\mu\nu} := \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\mu} \tag{A.5}$$

は捩率テンソルである。
さて、$\sqrt{-g}R$ は次のように書き換えられる：

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g}R &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Big[\partial_\rho \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}{}_{\mu\rho} + \Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho}\Big] \\
&= \partial_\rho\Big[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \sqrt{-g}g^{\mu\rho}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\nu}\Big] \\
&\quad -\partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\rho})\Gamma^{\nu}{}_{\mu\nu} \\
&\quad -\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Big[\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} - \Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}\Big] \\
&= \partial_\rho \boldsymbol{\mathcal{D}}^\rho - \partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\rho})\Gamma^{\nu}{}_{\mu\nu} - \sqrt{-g}\mathcal{G},
\end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\mathcal{G} := g^{\mu\nu}\Big[\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} - \Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}\Big], \tag{A.7}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}^\rho := \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \sqrt{-g}g^{\mu\rho}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\nu}. \tag{A.8}$$

まず、(A.6) の右辺第 2 項を計算する。その計算に、

$$\partial_\lambda \sqrt{-g} = \sqrt{-g}\tilde{\Gamma}^{\mu}{}_{\lambda\mu} \tag{A.9}$$

を用いると、

$$-\partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = -\sqrt{-g}\Big(g^{\mu\nu}\tilde{\Gamma}^{\alpha}{}_{\rho\alpha} + \partial_\rho g^{\mu\nu}\Big)\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} \tag{A.10}$$

[6] ただし、$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ を仮定している。

となる。ここで、

$$0 = \nabla_\rho g^{\mu\nu} = \partial_\rho g^{\mu\nu} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\rho} g^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu{}_{\alpha\rho} g^{\mu\alpha} \tag{A.11}$$

を用いると、

$$\begin{aligned} &-\partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \\ &= \sqrt{-g}\Big(- g^{\mu\nu}\tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\rho\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\rho}g^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu{}_{\alpha\rho}g^{\mu\alpha}\Big)\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \\ &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Big[- \tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\rho\alpha}\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\rho}\Gamma^\rho{}_{\alpha\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\nu\rho}\Gamma^\rho{}_{\mu\alpha}\Big] \\ &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Big[- \tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\rho\alpha}\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} + 2\Gamma^\alpha{}_{\mu\rho}\Gamma^\rho{}_{(\alpha\nu)}\Big] \\ &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Big[- \tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\rho\alpha}\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\rho}(2\Gamma^\rho{}_{\alpha\nu} - C^\rho{}_{\alpha\nu})\Big] \end{aligned} \tag{A.12}$$

を得る。ここで、$2\Gamma^\rho{}_{[\alpha\nu]} = C^\rho{}_{\alpha\nu}$ を用いた。また、(A.6) の右辺第 3 項は、

$$\begin{aligned} &\partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\rho})\Gamma^\nu{}_{\mu\nu} \\ &= \sqrt{-g}\Big(g^{\mu\rho}\tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\rho\alpha} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\rho}g^{\alpha\rho} - \Gamma^\rho{}_{\alpha\rho}g^{\mu\alpha}\Big)\Gamma^\gamma{}_{\mu\gamma} \\ &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Big[\tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\nu\alpha}\Gamma^\gamma{}_{\mu\gamma} - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\Gamma^\gamma{}_{\rho\gamma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\rho}\Gamma^\gamma{}_{\mu\gamma}\Big] \\ &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Big[- \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\Gamma^\gamma{}_{\rho\gamma} - K^\rho{}_{\nu\rho}\Gamma^\gamma{}_{\mu\gamma}\Big] \end{aligned} \tag{A.13}$$

となる。ここで (A.1) を用いた。よって、(A.6) の右辺第 2,3 項の和は、

$$\begin{aligned} &-\partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} + \partial_\rho(\sqrt{-g}g^{\mu\rho})\Gamma^\nu{}_{\mu\nu} \\ &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Big\{ - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\Big[\tilde{\Gamma}^\gamma{}_{\rho\gamma} + \Gamma^\gamma{}_{\rho\gamma}\Big] + 2\Gamma^\alpha{}_{\mu\rho}\Gamma^\rho{}_{\alpha\nu} \\ &\qquad -\Gamma^\alpha{}_{\mu\rho}C^\rho{}_{\alpha\nu} - K^\rho{}_{\nu\rho}\Gamma^\gamma{}_{\mu\gamma}\Big\} \\ &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Big\{ - 2\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\Gamma^\gamma{}_{\rho\gamma} + \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}K^\gamma{}_{\rho\gamma} + 2\Gamma^\alpha{}_{\mu\rho}\Gamma^\rho{}_{\alpha\nu} \\ &\qquad -\Gamma^\alpha{}_{\mu\rho}C^\rho{}_{\alpha\nu} - K^\rho{}_{\nu\rho}\Gamma^\gamma{}_{\mu\gamma}\Big\} \\ &= 2\sqrt{-g}\mathcal{G} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Big\{\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}K^\gamma{}_{\rho\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\rho}C^\rho{}_{\alpha\nu} - K^\rho{}_{\nu\rho}\Gamma^\gamma{}_{\mu\gamma}\Big\} \\ &= 2\sqrt{-g}\mathcal{G} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}L_{(\mu\nu)} \end{aligned} \tag{A.14}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &:= \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}K^\gamma{}_{\rho\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\rho}C^\rho{}_{\alpha\nu} - K^\rho{}_{\nu\rho}\Gamma^\gamma{}_{\mu\gamma} \\ &= \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}C_\rho - \Gamma^\alpha{}_{\mu\rho}C^\rho{}_{\alpha\nu} - C_\nu\Gamma^\gamma{}_{\mu\gamma} \quad (C_\mu := C^\sigma{}_{\mu\sigma}) \end{aligned} \tag{A.15}$$

である。第 2 等号で、$K^\sigma{}_{\mu\sigma} = C_\mu$ を用いた。よって、

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}\mathcal{G} + \partial_\mu\boldsymbol{\mathcal{D}}^\mu + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}L_{(\mu\nu)} \tag{A.16}$$

となる。特に、リーマン接続の場合 (捩率がない場合)、上式は (1.5) となる。

B　G から得られる量

B.1　G の微分

(2.12) より、

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial(\partial_\sigma g_{\delta\tau})} &= \frac{1}{2}[(g^{\mu\tau}g^{\rho\delta}g^{\sigma\beta}+g^{\mu\sigma}g^{\rho\delta}g^{\tau\beta}-g^{\mu\tau}g^{\rho\sigma}g^{\delta\beta})\Gamma_{\beta\mu\rho}\\ &\quad+(g^{\sigma\nu}g^{\tau\alpha}g^{\gamma\delta}+g^{\tau\nu}g^{\sigma\alpha}g^{\gamma\delta}-g^{\delta\nu}g^{\tau\alpha}g^{\gamma\sigma})\Gamma_{\alpha\gamma\nu}\\ &\quad-g^{\mu\nu}g^{\tau\delta}g^{\sigma\beta}\Gamma_{\beta\mu\nu}-\frac{1}{2}(g^{\sigma\tau}g^{\rho\alpha}g^{\gamma\delta}+g^{\tau\sigma}g^{\rho\alpha}g^{\gamma\delta}-g^{\delta\tau}g^{\rho\alpha}g^{\gamma\sigma})\partial_\gamma g_{\alpha\rho}]\\ &= \frac{1}{4}\Big[(g^{\mu\tau}g^{\rho\delta}g^{\sigma\beta}+g^{\mu\sigma}g^{\rho\delta}g^{\tau\beta}-g^{\mu\tau}g^{\rho\sigma}g^{\delta\beta})(\partial_\mu g_{\beta\rho}+\partial_\rho g_{\beta\mu}-\partial_\beta g_{\mu\rho})\\ &\quad+(g^{\sigma\nu}g^{\tau\alpha}g^{\gamma\delta}+g^{\tau\nu}g^{\sigma\alpha}g^{\gamma\delta}-g^{\delta\nu}g^{\tau\alpha}g^{\gamma\sigma})(\partial_\gamma g_{\alpha\nu}+\partial_\nu g_{\alpha\gamma}-\partial_\alpha g_{\gamma\nu})\\ &\quad-g^{\mu\nu}g^{\tau\delta}g^{\sigma\beta}(\partial_\mu g_{\beta\nu}+\partial_\nu g_{\beta\mu}-\partial_\beta g_{\mu\nu})\\ &\quad-(g^{\sigma\tau}g^{\rho\alpha}g^{\gamma\delta}+g^{\tau\sigma}g^{\rho\alpha}g^{\gamma\delta}-g^{\delta\tau}g^{\rho\alpha}g^{\gamma\sigma})\partial_\gamma g_{\alpha\rho}\Big]\end{aligned} \tag{B.1}$$

となる。第 n 項 $(n=1,2,3,4)$ からの寄与を $(n)/4$ と書くと、

$$\begin{aligned}(1) &= P^{\tau,\delta\sigma}+P^{\sigma,\delta\tau}-P^{\tau,\delta\sigma}+P^{\delta,\tau\sigma}+P^{\delta,\tau\sigma}-P^{\sigma,\delta\tau}-P^{\sigma,\delta\tau}-P^{\tau,\delta\sigma}+P^{\delta,\tau\sigma}\\ &= -P^{\tau,\delta\sigma}-P^{\sigma,\delta\tau}+3P^{\delta,\tau\sigma}.\end{aligned} \tag{B.2}$$

ここで、

$$P^{\alpha,\beta\gamma} := g^{\alpha\lambda}g^{\beta\mu}g^{\gamma\nu}\partial_\lambda g_{\mu\nu} \tag{B.3}$$

である。

$$\begin{aligned}(2) &= P^{\delta,\tau\sigma}+P^{\delta,\tau\sigma}-P^{\sigma,\delta\tau}+P^{\sigma,\delta\tau}+P^{\tau,\delta\sigma}-P^{\delta,\tau\sigma}-P^{\tau,\delta\sigma}-P^{\sigma,\delta\tau}+P^{\tau,\delta\sigma}\\ &= P^{\tau,\delta\sigma}-P^{\sigma,\delta\tau}+P^{\delta,\tau\sigma}.\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$(3) = g^{\delta\tau}(-2P^{\bullet,\bullet\sigma}+P^{\sigma,\bullet\bullet}). \tag{B.5}$$

ここで、

$$P^{\alpha,\bullet\bullet} := g^{\alpha\lambda}g^{\mu\nu}\partial_\lambda g_{\mu\nu}, \tag{B.6}$$
$$P^{\bullet,\bullet\beta} := g^{\lambda\mu}g^{\beta\nu}\partial_\lambda g_{\mu\nu}. \tag{B.7}$$

$$(4) = -2g^{\sigma\tau}P^{\delta,\bullet\bullet}+g^{\delta\tau}P^{\sigma,\bullet\bullet} \tag{B.8}$$

よって、

$$\frac{\partial G}{\partial\partial_\sigma g_{\delta\tau}} = \frac{1}{2}\Big[-P^{\sigma,\delta\tau}+2P^{(\delta,\tau)\sigma}+g^{\delta\tau}(-P^{\bullet,\bullet\sigma}+P^{\sigma,\bullet\bullet})-g^{\sigma(\delta}P^{\tau),\bullet\bullet}\Big]. \tag{B.9}$$

B.2 アインシュタイン・テンソル

局所ローレンツ系[7] で考える。この時、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}^{\delta\tau} &= \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial g_{\delta\tau}} - \partial_\sigma \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \partial_\sigma g_{\delta\tau}} \\ &= -\partial_\sigma \frac{\partial G}{\partial \partial_\sigma g_{\delta\tau}} \end{aligned} \tag{B.10}$$

である。また、

$$\partial_\sigma \frac{\partial G}{\partial \partial_\sigma g_{\delta\tau}} = \frac{1}{2}\Big[- P_\sigma{}^{\sigma,\delta\tau} + P_\sigma{}^{\delta,\tau\sigma} + P_\sigma{}^{\tau,\delta\sigma} - P^{\delta\tau,\bullet\bullet} + g^{\delta\tau}(-P_\sigma{}^{\bullet,\bullet\sigma} + P_\sigma{}^{\sigma,\bullet\bullet})\Big] \tag{B.11}$$

である。ここで、

$$P_\sigma{}^{\sigma,\delta\tau} = \eta^{\sigma\alpha}\eta^{\delta\beta}\eta^{\tau\gamma}\partial_\sigma\partial_\alpha g_{\beta\gamma} \tag{B.12}$$

などである。一方、

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(P_\alpha{}^{\mu,\alpha\nu} - P_\alpha{}^{\alpha,\mu\nu} - P^{\mu\nu,\bullet\bullet} + P^{\nu\bullet,\bullet\mu}) \\ &= \frac{1}{2}(P_\alpha{}^{\mu,\nu\alpha} - P_\alpha{}^{\alpha,\mu\nu} - P^{\mu\nu,\bullet\bullet} + P_\alpha{}^{\nu,\mu\alpha}) \end{aligned} \tag{B.13}$$

および、

$$R = -P_\alpha{}^{\alpha,\bullet\bullet} + P_\alpha{}^{\bullet,\bullet\alpha} \tag{B.14}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \partial_\sigma \frac{\partial G}{\partial \partial_\sigma g_{\delta\tau}} &= R^{\delta\tau} - \frac{1}{2} g^{\delta\tau} R \\ &= G^{\delta\tau} \end{aligned} \tag{B.15}$$

となる。これより、

$$\boldsymbol{G}^{\delta\tau} = -\sqrt{-g}\,G^{\delta\tau} \tag{B.16}$$

が示された。

B.3 擬スーパー・ポテンシャル ${}^{(0)}\boldsymbol{C}^{\sigma\delta}{}_\rho$

擬スーパー・ポテンシャル ${}^{(0)}\boldsymbol{C}^{\sigma\delta}{}_\rho$ は、

$$\begin{aligned} {}^{(0)}\boldsymbol{C}^{\sigma\delta}{}_\rho &= -\frac{1}{\kappa}\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial(\partial_\sigma g_{\delta\tau})} g_{\tau\rho} \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\Big[P^{\sigma,\delta}{}_\rho - P^{\delta,\sigma}{}_\rho - P_\rho{}^{\delta\sigma} + \delta^\delta_\rho(P^{\bullet,\bullet\sigma} - P^{\sigma,\bullet\bullet}) + \frac{1}{2}g^{\sigma\delta}P_\rho{}^{\bullet\bullet} + \frac{1}{2}\delta^\sigma_\rho P^{\delta,\bullet\bullet}\Big] \\ &\neq -{}^{(0)}\boldsymbol{C}^{\delta\sigma}{}_\rho \end{aligned} \tag{B.17}$$

となる。[3] には ${}^{(0)}\boldsymbol{C}^{\sigma\delta}{}_\rho = -{}^{(0)}\boldsymbol{C}^{\delta\sigma}{}_\rho$ という記述があるが、間違いである。

[7] その座標系の原点では、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} := \mathrm{diag}(-1, 1, 1, \cdots, 1)\,, \quad \partial_\lambda g_{\mu\nu} = 0$$

となる。

References

[1] 内山龍雄『一般ゲージ場論序説』(岩波書店, 1987 年).

[2] 内山龍雄『一般相対性理論』(裳華房, 1978 年).

[3] 内山龍雄『相対性理論』(岩波書店, 1977 年).

[4] Chiang-Mei Chen, J. M. Nester and Roh-Suan Tung, "Gravitational energy for GR and Poincaré gauge theories: a covariant Hamiltonian approach", Int. J. Mod. Phys. D **24**, 1530026 (2015). [arXiv:1507.07300]

[5] B. Julia, S. Silva, "Currents and Superpotentials in classical gauge invariant theories I. Local results with applications to Perfect Fluids and General Relativity", Class. Quant. Grav. **15**, 2173 (1998).[arXiv:gr-qc/9804029v2]