アインシュタイン作用の変分

中嶋 慧

May 23, 2020

Abstract

アインシュタイン・ヒルベルトのラグランジアン密度は、

$$\sqrt{-g}\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}R = \frac{1}{2\kappa}(\boldsymbol{G} + \partial_\mu \boldsymbol{D}^\mu)$$

と書ける。$\boldsymbol{G}$ は $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ の 2 次式である。この記事では、

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\Big[\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})}\Big] = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

を示す。

Contents

1 目標

この記事では D 次元時空を考え、計量 $g_{\mu\nu}$ の符号は $(-++\cdots+)$ とする。また、

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} := \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}), \tag{1.1}$$

$$R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta} := \partial_\alpha \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\alpha} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\alpha}, \tag{1.2}$$

$$R_{\mu\nu} := R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}, \tag{1.3}$$

$$R := g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{1.4}$$

とする。まず、[1] より、

$$\sqrt{-g}R \ = \ \boldsymbol{G} + \partial_\mu \boldsymbol{D}^\mu, \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{G} := \sqrt{-g}G, \quad G := A - B, \tag{1.6}$$

$$A := g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho}, \tag{1.7}$$

$$B := g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}, \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{D}^\rho := \sqrt{-g}\Big[g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - g^{\mu\rho}\Gamma^{\nu}{}_{\mu\nu}\Big] \tag{1.9}$$

となる。ここで $g := \det(g_{\mu\nu})$ である。今、

$$G_{\mu\nu} := \frac{1}{\sqrt{-g}}\Big[\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})}\Big] \tag{1.10}$$

とする。以下では、

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{1.11}$$

を示したい。

2 方針

今、

$$G^{\sigma,\delta\tau} := \frac{\partial G}{\partial(\partial_\sigma g_{\delta\tau})} \tag{2.1}$$

置くと、

$$\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} = -\sqrt{-g}g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}G^{\lambda,\alpha\beta} \equiv -\sqrt{-g}H^{\lambda}{}_{\mu\nu} \tag{2.2}$$

となる。よって、

$$-\partial_\lambda \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} = \partial_\lambda(\sqrt{-g})H^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\partial_\lambda H^{\lambda}{}_{\mu\nu} \tag{2.3}$$

である。ここで、

$$\partial_\lambda\sqrt{-g} = \sqrt{-g}\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\alpha} \tag{2.4}$$

なので、

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} = \Gamma^\alpha{}_{\lambda\alpha} H^\lambda{}_{\mu\nu} + \partial_\lambda H^\lambda{}_{\mu\nu} \tag{2.5}$$

となる。

また、$\boldsymbol{G}$ の $g^{\mu\nu}$ についての変分は、

$$\delta \boldsymbol{G} = (\delta\sqrt{-g})G + \sqrt{-g}\delta G \tag{2.6}$$

である。ここで、

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \tag{2.7}$$

なので、

$$\delta \boldsymbol{G} = \sqrt{-g}\Big[\delta g^{\mu\nu}(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}G) + \delta G\Big] \tag{2.8}$$

である。今、A, B の $g^{\mu\nu}$ についての変分を、

$$\delta A = \delta g^{\mu\nu} A_{\mu\nu}, \quad \delta B = \delta g^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \tag{2.9}$$

とすると、

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}G + A_{\mu\nu} - B_{\mu\nu} \tag{2.10}$$

である。よって、

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}G + A_{\mu\nu} - B_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\alpha} H^\lambda{}_{\mu\nu} + \partial_\lambda H^\lambda{}_{\mu\nu} \tag{2.11}$$

である。

3 $H^\lambda{}_{\mu\nu}$ の計算

今、

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} := \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \tag{3.1}$$

とすると、

$$\begin{aligned} G &= g^{\mu\nu} g^{\rho\alpha} g^{\gamma\beta}[\Gamma_{\alpha\gamma\nu}\Gamma_{\beta\mu\rho} - \Gamma_{\alpha\gamma\rho}\Gamma_{\beta\mu\nu}] \\ &= g^{\mu\nu} g^{\rho\alpha} g^{\gamma\beta}[\Gamma_{\alpha\gamma\nu}\Gamma_{\beta\mu\rho} - \frac{1}{2}\partial_\gamma g_{\alpha\rho}\Gamma_{\beta\mu\nu}] \end{aligned} \tag{3.2}$$

である。また、

$$\frac{\partial \Gamma_{\lambda\mu\nu}}{\partial(\partial_\sigma g_{\delta\tau})} = \frac{1}{2}(\delta^\sigma_\mu \delta^{\delta\tau}_{\lambda\nu} + \delta^\sigma_\nu \delta^{\delta\tau}_{\lambda\mu} - \delta^\sigma_\lambda \delta^{\delta\tau}_{\mu\nu}) \tag{3.3}$$

となる。ここで、

$$\delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = \delta^{(\alpha}_{\mu}\delta^{\beta)}_{\nu} \tag{3.4}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} G^{\sigma,\delta\tau} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\rho\alpha}g^{\gamma\beta}[(\delta^{\sigma}_{\gamma}\delta^{\delta\tau}_{\alpha\nu} + \delta^{\sigma}_{\nu}\delta^{\delta\tau}_{\alpha\gamma} - \delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\delta\tau}_{\gamma\nu})\Gamma_{\beta\mu\rho} + \Gamma_{\alpha\gamma\nu}(\delta^{\sigma}_{\mu}\delta^{\delta\tau}_{\beta\rho} + \delta^{\sigma}_{\rho}\delta^{\delta\tau}_{\beta\mu} - \delta^{\sigma}_{\beta}\delta^{\delta\tau}_{\mu\rho}) \\ -\delta^{\sigma}_{\gamma}\delta^{\delta\tau}_{\alpha\rho}\Gamma_{\beta\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\gamma\rho}(\delta^{\sigma}_{\mu}\delta^{\delta\tau}_{\beta\nu} + \delta^{\sigma}_{\nu}\delta^{\delta\tau}_{\beta\mu} - \delta^{\sigma}_{\beta}\delta^{\delta\tau}_{\mu\nu})] \end{aligned} \tag{3.5}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} G^{\sigma,\delta\tau} &= \frac{1}{2}[g^{\mu\nu}g^{\rho\alpha}(\delta^{\sigma}_{\gamma}\delta^{\delta\tau}_{\alpha\nu} + \delta^{\sigma}_{\nu}\delta^{\delta\tau}_{\alpha\gamma} - \delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\delta\tau}_{\gamma\nu})\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} + g^{\mu\nu}g^{\gamma\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}(\delta^{\sigma}_{\mu}\delta^{\delta\tau}_{\beta\rho} + \delta^{\sigma}_{\rho}\delta^{\delta\tau}_{\beta\mu} - \delta^{\sigma}_{\beta}\delta^{\delta\tau}_{\mu\rho}) \\ &\quad -g^{\mu\nu}g^{\rho\alpha}\delta^{\sigma}_{\gamma}\delta^{\delta\tau}_{\alpha\rho}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}g^{\gamma\beta}\Gamma_{\gamma}(\delta^{\sigma}_{\mu}\delta^{\delta\tau}_{\beta\nu} + \delta^{\sigma}_{\nu}\delta^{\delta\tau}_{\beta\mu} - \delta^{\sigma}_{\beta}\delta^{\delta\tau}_{\mu\nu})] \\ &=: (1) + (2) + (3) + (4) \end{aligned} \tag{3.6}$$

となる。ここで、

$$\Gamma_{\gamma} := \Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho} \tag{3.7}$$

である。まず、

$$\begin{aligned} (1) &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\rho\alpha}(\delta^{\sigma}_{\gamma}\delta^{\delta\tau}_{\alpha\nu} + \delta^{\sigma}_{\nu}\delta^{\delta\tau}_{\alpha\gamma} - \delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\delta\tau}_{\gamma\nu})\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} \\ &= \frac{1}{4}[\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho}(g^{\mu\tau}g^{\rho\delta} + g^{\mu\delta}g^{\rho\tau}) + g^{\mu\sigma}(g^{\rho\delta}\Gamma^{\tau}{}_{\mu\rho} + g^{\rho\tau}\Gamma^{\delta}{}_{\mu\rho}) - g^{\rho\sigma}(g^{\mu\tau}\Gamma^{\delta}{}_{\mu\rho} + g^{\mu\delta}\Gamma^{\tau}{}_{\mu\rho})] \\ &= \frac{1}{4}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho}(g^{\mu\tau}g^{\rho\delta} + g^{\mu\delta}g^{\rho\tau}) \end{aligned} \tag{3.8}$$

である。次に、

$$\begin{aligned} (2) &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\gamma\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}(\delta^{\sigma}_{\mu}\delta^{\delta\tau}_{\beta\rho} + \delta^{\sigma}_{\rho}\delta^{\delta\tau}_{\beta\mu} - \delta^{\sigma}_{\beta}\delta^{\delta\tau}_{\mu\rho}) \\ &= \frac{1}{4}[g^{\sigma\nu}(g^{\gamma\delta}\Gamma^{\tau}{}_{\gamma\nu} + g^{\gamma\tau}\Gamma^{\delta}{}_{\gamma\nu}) + \Gamma^{\sigma}{}_{\gamma\nu}(g^{\tau\nu}g^{\gamma\delta} + g^{\delta\nu}g^{\gamma\tau}) - g^{\gamma\sigma}(g^{\delta\nu}\Gamma^{\tau}{}_{\gamma\nu} + g^{\tau\nu}\Gamma^{\delta}{}_{\gamma\nu})] \\ &= \frac{1}{4}\Gamma^{\sigma}{}_{\gamma\nu}(g^{\tau\nu}g^{\gamma\delta} + g^{\delta\nu}g^{\gamma\tau}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

であり、

$$\begin{aligned} (3) &= -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\rho\alpha}\delta^{\sigma}_{\gamma}\delta^{\delta\tau}_{\alpha\rho}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{4}(-2g^{\mu\nu}g^{\delta\tau}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}), \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} (4) &= -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\gamma\beta}\Gamma_{\gamma}(\delta^{\sigma}_{\mu}\delta^{\delta\tau}_{\beta\nu} + \delta^{\sigma}_{\nu}\delta^{\delta\tau}_{\beta\mu} - \delta^{\sigma}_{\beta}\delta^{\delta\tau}_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{4}[-2(g^{\sigma\tau}g^{\gamma\delta} + g^{\sigma\delta}g^{\gamma\tau})\Gamma_{\gamma} + 2g^{\delta\tau}g^{\sigma\gamma}\Gamma_{\gamma}] \end{aligned} \tag{3.11}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} G^{\sigma,\delta\tau} &= \frac{1}{4}\Big[2\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho}(g^{\mu\tau}g^{\rho\delta} + g^{\mu\delta}g^{\rho\tau}) - 2g^{\mu\nu}g^{\delta\tau}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} - 2(g^{\sigma\tau}g^{\gamma\delta} + g^{\sigma\delta}g^{\gamma\tau})\Gamma_{\gamma} + 2g^{\delta\tau}g^{\sigma\gamma}\Gamma_{\gamma}\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho}(2g^{\mu\tau}g^{\rho\delta} - g^{\mu\rho}g^{\delta\tau}) + (g^{\delta\tau}g^{\sigma\gamma} - g^{\sigma\tau}g^{\gamma\delta} - g^{\sigma\delta}g^{\gamma\tau})\Gamma_{\gamma}\Big] \end{aligned} \tag{3.12}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}
H^{\lambda}{}_{\mu\nu} &= g_{\mu\delta}g_{\nu\tau}G^{\lambda,\delta\tau} \\
&= \frac{1}{2}g_{\mu\delta}g_{\nu\tau}\Big[\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho}(2g^{\sigma\tau}g^{\rho\delta} - g^{\sigma\rho}g^{\delta\tau}) + (g^{\delta\tau}g^{\lambda\gamma} - g^{\lambda\tau}g^{\gamma\delta} - g^{\lambda\delta}g^{\gamma\tau})\Gamma_{\gamma}\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[2\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho}g^{\sigma\rho} + g_{\mu\nu}g^{\lambda\gamma}\Gamma_{\gamma} - \delta^{\lambda}_{\nu}\Gamma_{\mu} - \delta^{\lambda}_{\mu}\Gamma_{\nu}\Big] \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

である。

これより、

$$\begin{aligned}
\partial_{\lambda}H^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}(-\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho}g^{\sigma\rho} + g^{\lambda\gamma}\Gamma_{\gamma}) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho}\partial_{\lambda}g^{\sigma\rho} - \partial_{\lambda}g^{\lambda\gamma}\Gamma_{\gamma}) \\
-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial_{\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho}g^{\sigma\rho} - g^{\lambda\gamma}\partial_{\lambda}\Gamma_{\gamma}) - \frac{1}{2}(\partial_{\nu}\Gamma_{\mu} + \partial_{\mu}\Gamma_{\nu}) \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\partial_{\lambda}g_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda} + g_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda}, \qquad (3.15)$$

$$\partial_{\lambda}g^{\sigma\rho} = -(g^{\rho\alpha}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\alpha} + g^{\sigma\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\alpha}), \qquad (3.16)$$

$$\partial_{\lambda}g^{\lambda\gamma} = -(g^{\gamma\alpha}\Gamma_{\alpha} + g^{\lambda\alpha}\Gamma^{\gamma}{}_{\lambda\alpha}) = -(g^{\gamma\alpha}\Gamma_{\alpha} + c^{\gamma}) \qquad (3.17)$$

である。ただし、

$$c^{\delta} := g^{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}{}_{\alpha\beta} \qquad (3.18)$$

である。よって、

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho}\partial_{\lambda}g^{\sigma\rho} - \partial_{\lambda}g^{\lambda\gamma}\Gamma_{\gamma} = -2g^{\rho\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\alpha} + g^{\gamma\alpha}\Gamma_{\alpha}\Gamma_{\gamma} + \Gamma_{\gamma}c^{\gamma} \qquad (3.19)$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
\partial_{\lambda}H^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}(-c^{\lambda} + g^{\lambda\gamma}\Gamma_{\gamma}) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(-2g^{\rho\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\alpha} + g^{\gamma\alpha}\Gamma_{\alpha}\Gamma_{\gamma} + \Gamma_{\gamma}c^{\gamma}) \\
-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial_{\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho}g^{\sigma\rho} - g^{\lambda\gamma}\partial_{\lambda}\Gamma_{\gamma}) - \frac{1}{2}(\partial_{\nu}\Gamma_{\mu} + \partial_{\mu}\Gamma_{\nu}) \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

である。また、

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\alpha}H^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \Gamma_{\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\Gamma_{\lambda}c^{\lambda} - g^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha}\Gamma_{\beta}) - \Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} \qquad (3.21)$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\alpha}H^{\lambda}{}_{\mu\nu}+\partial_\lambda H^{\lambda}{}_{\mu\nu} &= \partial_\lambda\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu}(-c^\lambda+g^{\lambda\gamma}\Gamma_\gamma)\\
&\quad -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(-2g^{\rho\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\alpha}+2\Gamma_\gamma c^\gamma)\\
&\quad -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial_\lambda\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho}g^{\sigma\rho}-g^{\lambda\gamma}\partial_\lambda\Gamma_\gamma)-\frac{1}{2}(\partial_\nu\Gamma_\mu+\partial_\mu\Gamma_\nu)+\Gamma_\lambda\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}-\Gamma_\mu\Gamma_\nu\\
&= \partial_\lambda\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu}(-c^\lambda+g^{\lambda\gamma}\Gamma_\gamma)\\
&\quad -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R+\Gamma_\lambda c^\lambda-g^{\rho\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\alpha})\\
&\quad +\Gamma_\lambda\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}-\Gamma_\mu\Gamma_\nu-\frac{1}{2}(\partial_\nu\Gamma_\mu+\partial_\mu\Gamma_\nu)\\
&= R_{\mu\nu}-\Gamma_\mu\Gamma_\nu+\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho}+\frac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu}(-c^\lambda+g^{\lambda\gamma}\Gamma_\gamma)\\
&\quad -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R+\Gamma_\lambda c^\lambda-g^{\rho\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\alpha})+\frac{1}{2}(\partial_\nu\Gamma_\mu-\partial_\mu\Gamma_\nu)
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

となる。

ここで、

$$
\begin{aligned}
\partial_\nu\Gamma_\mu &= \partial_\nu(g^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta\mu})\\
&= \partial_\nu g^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta\mu}+g^{\alpha\beta}\partial_\nu\Gamma_{\alpha\beta\mu}\\
&= -(g^{\beta\sigma}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma}+g^{\alpha\sigma}\Gamma^{\beta}{}_{\nu\sigma})\Gamma_{\alpha\beta\mu}+g^{\alpha\beta}\partial_\nu\Gamma_{\alpha\beta\mu}\\
&= -2g_{\alpha\tau}g^{\beta\sigma}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\tau}{}_{\beta\mu}+g^{\alpha\beta}\partial_\nu\Gamma_{\alpha\beta\mu}
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

なので、

$$
\partial_\nu\Gamma_\mu-\partial_\mu\Gamma_\nu = g^{\alpha\beta}(\partial_\nu\Gamma_{\alpha\beta\mu}-\partial_\mu\Gamma_{\alpha\beta\nu})=0 \tag{3.24}
$$

となる。よって、

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\alpha}H^{\lambda}{}_{\mu\nu}+\partial_\lambda H^{\lambda}{}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu}-\Gamma_\mu\Gamma_\nu+\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho}+\frac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu}(-c^\lambda+g^{\lambda\gamma}\Gamma_\gamma)\\
&\quad -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R+\Gamma_\lambda c^\lambda-g^{\rho\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\alpha})
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

である。これより、

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\alpha}H^{\lambda}{}_{\mu\nu}+\partial_\lambda H^{\lambda}{}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}G &= R_{\mu\nu}-\Gamma_\mu\Gamma_\nu+\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho}+\frac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu}(-c^\lambda+g^{\lambda\gamma}\Gamma_\gamma)\\
&\quad -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

である。よって、

$$
\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\alpha}H^{\lambda}{}_{\mu\nu}+\partial_\lambda H^{\lambda}{}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}G = R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+\Delta_{\mu\nu}, \tag{3.27}
$$

$$
\Delta_{\mu\nu} := -\Gamma_\mu\Gamma_\nu+\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho}+\frac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu}(-c^\lambda+g^{\lambda\gamma}\Gamma_\gamma) \tag{3.28}
$$

である。

4　$B_{\mu\nu}$ の計算

$$B = c^\lambda \Gamma_\lambda \tag{4.1}$$

であるから、

$$\delta B = \delta c^\lambda \Gamma_\lambda + \Gamma_\lambda \delta c^\lambda \tag{4.2}$$

である。また、

$$\Gamma_\lambda = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \partial_\lambda g^{\alpha\beta} \tag{4.3}$$

なので、

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_\lambda &= -\frac{1}{2}\delta g_{\alpha\beta}\partial_\lambda g^{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \partial_\lambda g^{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\partial_\lambda g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{4.4}$$

である。また、

$$\nabla_\lambda g^{\alpha\beta} = \partial_\lambda g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\gamma}\Gamma^\beta{}_{\gamma\lambda} + g^{\beta\gamma}\Gamma^\alpha{}_{\gamma\lambda} = 0 \tag{4.5}$$

より、

$$0 = \partial_\alpha g^{\alpha\beta} + c^\beta + g^{\beta\gamma}\Gamma_\gamma, \tag{4.6}$$

$$c^\lambda = -\partial_\alpha g^{\alpha\lambda} - g^{\lambda\gamma}\Gamma_\gamma \tag{4.7}$$

であり、

$$\begin{aligned} \delta c^\lambda &= -\delta g^{\lambda\gamma}\Gamma_\gamma - g^{\lambda\gamma}\delta\Gamma_\gamma \\ &= -\delta g^{\mu\nu}\frac{1}{2}(\delta^\lambda_\mu\Gamma_\nu + \delta^\lambda_\nu\Gamma_\mu) - g^{\lambda\gamma}(-\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\partial_\gamma g_{\mu\nu}) \\ &= \delta g^{\mu\nu}\Big[\frac{1}{2}g^{\lambda\gamma}\partial_\gamma g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\delta^\lambda_\mu\Gamma_\nu + \delta^\lambda_\nu\Gamma_\mu)\Big] \end{aligned} \tag{4.8}$$

となる。よって、

$$\delta B = \delta g^{\mu\nu}\Big\{\frac{1}{2}\Gamma_\lambda g^{\lambda\gamma}\partial_\gamma g_{\mu\nu} - \Gamma_\mu\Gamma_\nu - \frac{1}{2}c^\lambda\partial_\lambda g_{\mu\nu}\Big\}, \tag{4.9}$$

$$B_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\lambda g_{\mu\nu}(\Gamma_\gamma g^{\lambda\gamma} - c^\lambda) - \Gamma_\mu\Gamma_\nu \tag{4.10}$$

を得る。これより、

$$\Delta_{\mu\nu} - B_{\mu\nu} = \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu}\Gamma^\gamma{}_{\mu\rho} \tag{4.11}$$

を得る。

5 $A_{\mu\nu}$ の計算

$$A = g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} \tag{5.1}$$

より、

$$\delta A = \delta g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} + g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} + g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\delta\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} \tag{5.2}$$

であり、

$$g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} = \delta(g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu})\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} - \delta g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho}, \tag{5.3}$$

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\delta\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} = \delta(g^{\mu\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho})\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu} - \delta g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} \tag{5.4}$$

なので、

$$\begin{aligned}\delta A &= -\delta g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} + \delta(g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu})\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} + \delta(g^{\mu\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho})\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu} \\ &= -\delta g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} + \delta(g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu} + g^{\rho\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\gamma\nu})\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho}\end{aligned} \tag{5.5}$$

である。ここで、(4.5) より、

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu} + g^{\rho\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\gamma\nu} = -\partial_{\gamma}g^{\mu\rho} \tag{5.6}$$

なので、

$$A_{\mu\nu} = -\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} \tag{5.7}$$

を得る。よって、

$$\Delta_{\mu\nu} + A_{\mu\nu} - B_{\mu\nu} = 0 \tag{5.8}$$

を得る。これは、

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{5.9}$$

を意味する。

$A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ の計算は [2] を参考にした。$A_{\mu\nu}$ の計算はややトリッキーである。なお、$A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ を求めるのと同様にして、簡単に $\partial G/\partial(\partial_{\lambda}g^{\mu\nu})$ を求めることができる。

6 ディラックの方法

本節ではディラックの方法 [3] を紹介する。これはワイルの『空間・時間・物質』(1918) の方法に近い[1)]。

以下、

$$h := \sqrt{-g}, \tag{6.1}$$

$$\boldsymbol{A} := hA, \quad \boldsymbol{B} := hB \tag{6.2}$$

と置く。

まず、

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{A} &= \delta(hg^{\mu\nu})\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} + 2hg^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} \\ &= -\delta(hg^{\mu\nu})\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} + 2\delta(hg^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu})\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho}\end{aligned} \tag{6.3}$$

である。ここで、

$$\partial_\lambda g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\lambda} - g^{\nu\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\lambda} \tag{6.4}$$

なので、

$$\delta\boldsymbol{A} = -\delta(hg^{\mu\nu})\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} - \delta(\partial_\gamma g^{\mu\rho}h)\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} \tag{6.5}$$

となる。

また、

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{B} &= \delta(hg^{\mu\nu}\Gamma_\gamma)\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu} + hg^{\mu\nu}\Gamma_\gamma\delta\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu} \\ &= \delta(hg^{\mu\nu}\Gamma_\gamma)\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu} + \Gamma_\gamma\delta(hg^{\mu\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}) - \delta(hg^{\mu\nu})\Gamma_\gamma\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu} \\ &= \delta(g^{\mu\nu}\partial_\gamma h)\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu} + \Gamma_\gamma\delta(hg^{\mu\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}) - \delta(hg^{\mu\nu})\Gamma_\gamma\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{6.6}$$

である。ところで、(6.4) より、

$$\partial_\lambda(hg^{\mu\nu}) = h(-g^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\lambda} - g^{\nu\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\lambda} + g^{\mu\nu}\Gamma_\lambda) \tag{6.7}$$

である。$\lambda = \nu$ として、

$$\partial_\nu(hg^{\mu\nu}) = -hg^{\nu\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} \tag{6.8}$$

なので、これを (6.6) の第 2 項に代入して、

$$\delta\boldsymbol{B} = \delta(g^{\mu\nu}\partial_\gamma h)\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu} - \Gamma_\gamma\delta[\partial_\beta(hg^{\gamma\beta})] - \delta(hg^{\mu\nu})\Gamma_\gamma\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu} \tag{6.9}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{G} = \delta(hg^{\mu\nu})\Gamma_\gamma\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu} - \delta(hg^{\mu\nu})\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} \\ -\delta[\partial_\gamma(g^{\mu\rho}h)]\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\rho} + \Gamma_\gamma\delta[\partial_\beta(hg^{\gamma\beta})]\end{aligned} \tag{6.10}$$

---

1) ワイルの本の第 2 版 (1919) まではこの方法が載っている。第 3,4 版は未確認だが、第 5 版には載っていないようである。内山龍雄による翻訳は第 5 版である。

である。第 2 行は、

$$\delta(g^{\mu\nu}h)[\partial_\gamma \Gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma_\mu] + \partial_\rho \boldsymbol{E}^\rho \tag{6.11}$$

の形に書ける。よって、

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{G} &= \delta(g^{\mu\nu}h)[\partial_\gamma \Gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma_\mu + \Gamma_\gamma \Gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu}\Gamma^\gamma{}_{\mu\rho}] + \partial_\rho \boldsymbol{E}^\rho \\ &= \delta(g^{\mu\nu}h)R_{\mu\nu} + \partial_\rho \boldsymbol{E}^\rho \end{aligned} \tag{6.12}$$

である。ここで、

$$\delta(g^{\mu\nu}h) = h\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}hg^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \tag{6.13}$$

なので、

$$\delta\boldsymbol{G} = \delta g^{\mu\nu} \cdot h\Big(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\Big) + \partial_\rho \boldsymbol{E}^\rho \tag{6.14}$$

となる。よって、

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{6.15}$$

を得る。

References

[1] 中嶋慧「重力場のエネルギー擬テンソル」
http://physnakajima.html.xdomain.jp/Energy_complex.pdf

[2] C. メラー (著), 永田 恒夫・伊藤 大介 (訳)『相対性理論』(みすず書房, 1959 年)(p.380, p.381).

[3] ディラック (著), 江沢 洋 (訳)『一般相対性理論』(ちくま学芸文庫, 2005 年).