アインシュタイン作用の導出

中嶋 慧

August 24, 2020

Abstract

このノートでは平坦時空での重力理論 [1] を考える。重力場は 2 階対称テンソル $h_{\mu\nu}$ で表される。$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ と $h_{\mu\nu}$ との和を、

$$g_{\mu\nu} := \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{0.1}$$

と書く。この逆行列を $g^{\mu\nu}$ と書く。重力場のラグランジアン密度の候補は、

$$g^{\mu_{a_1}\mu_{a_2}} g^{\mu_{a_3}\mu_{a_4}} g^{\mu_{a_5}\mu_{a_6}} \partial_{\mu_1} g_{\mu_2\mu_3} \partial_{\mu_4} g_{\mu_5\mu_6}\,, \quad \{a_k\}_{k=1}^{6} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \tag{0.2}$$

のタイプの項の線形結合である。第 2 章では、この中からアインシュタインのラグランジアン密度

$$g^{\mu\nu} \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\nu} - g^{\mu\nu} \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\rho} \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} \tag{0.3}$$

が選ばれることを示す。ここで、$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}$ はクリストッフェル記号である。

第 1 章では、アインシュタインのラグランジアン密度からアインシュタイン方程式が得られることを示す。

Contents

1　アインシュタイン方程式

1.1　準備

重力場は 2 階対称テンソル $h_{\mu\nu}$ である。計量テンソル

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1) \tag{1.1}$$

と $h_{\mu\nu}$ との和を、

$$g_{\mu\nu} := \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{1.2}$$

と書く。また、

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} := \frac{1}{2}\big[-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu}\big] \tag{1.3}$$

とする。なお、$g_{\mu\nu}$ の逆行列を $g^{\mu\nu}$ と書く。

質点と重力場と、ゲージ場などのその他の場との合成系のラグランジアン密度を、

$$S_{\mathrm{tot}} = S_{\mathrm{particle}} + \int d^4x\ \frac{1}{2} h_{\mu\nu}(x) \boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})}(x) + S_{\mathrm{Gravity}} + S_{\mathrm{matter}} \tag{1.4}$$

とする。S_{matter} の $h_{\mu\nu}$ についての変分を、

$$\delta S_{\mathrm{matter}} = \int d^4x\ \delta h_{\mu\nu}(x) \frac{1}{2} \boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{m})} \tag{1.5}$$

で定義し、

$$\boldsymbol{T}^{\mu\nu} := \boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})} + \boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{m})} \tag{1.6}$$

と置く。さて、質点の運動方程式より、質点のエネルギー・運動量テンソル $\boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})}$ は、

$$g_{\lambda\mu} \partial_\nu \boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})} = -\Gamma_{\lambda\mu\nu} \boldsymbol{T}^{\mu\nu}_{(\mathrm{p})} \tag{1.7}$$

を満たす [1]。そこで、$\boldsymbol{T}^{\mu\nu}$ も (1.7) を満たすと仮定する：

$$g_{\lambda\mu} \partial_\nu \boldsymbol{T}^{\mu\nu} = -\Gamma_{\lambda\mu\nu} \boldsymbol{T}^{\mu\nu}. \tag{1.8}$$

1.2　重力場の運動方程式

今、S_{Gravity} の $h_{\mu\nu}$ についての変分を、

$$\delta S_{\mathrm{Gravity}} = -\int d^4x\ \delta h_{\mu\nu}(x) \frac{1}{2\kappa} \boldsymbol{G}^{\mu\nu} \tag{1.9}$$

とすると、重力場の運動方程式は、

$$\boldsymbol{G}^{\mu\nu} = \kappa \boldsymbol{T}^{\mu\nu} \tag{1.10}$$

となる。κ は定数 (アインシュタイン定数) である。

1.3 重力場の作用の不変性

(1.8), (1.10) より、

$$g_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{G}^{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{G}^{\mu\nu} = 0 \tag{1.11}$$

が従う。

上式に ε^λ をかけて積分すると、

$$\begin{aligned}
0 &= \int d^4x\ \Big[g_{\lambda\mu}\partial_\nu \boldsymbol{G}^{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{G}^{\mu\nu}\Big]\varepsilon^\lambda \\
&= \int d^4x\ \Big[-\partial_\nu(g_{\lambda\mu}\varepsilon^\lambda)\boldsymbol{G}^{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda\mu\nu}\boldsymbol{G}^{\mu\nu}\varepsilon^\lambda\Big] \\
&= \int d^4x\ \boldsymbol{G}^{\mu\nu}\frac{1}{2}\Big[-\partial_\nu g_{\lambda\mu}\varepsilon^\lambda - \partial_\mu g_{\lambda\nu}\varepsilon^\lambda + 2\Gamma_{\lambda\mu\nu}\varepsilon^\lambda - g_{\lambda\mu}\partial_\nu\varepsilon^\lambda - g_{\lambda\nu}\partial_\mu\varepsilon^\lambda\Big] \\
&= \int d^4x\ \boldsymbol{G}^{\mu\nu}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big[\partial_\lambda g_{\mu\nu}\varepsilon^\lambda + g_{\lambda\mu}\partial_\nu\varepsilon^\lambda + g_{\lambda\nu}\partial_\mu\varepsilon^\lambda\Big] \\
&\equiv \int d^4x\ \boldsymbol{G}^{\mu\nu}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\delta^{(\varepsilon)}h_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

を得る。ε^μ は無限遠で 0 になるとした。ここで、

$$\delta^{(\varepsilon)}h_{\mu\nu} := \partial_\lambda g_{\mu\nu}\varepsilon^\lambda + g_{\lambda\mu}\partial_\nu\varepsilon^\lambda + g_{\lambda\nu}\partial_\mu\varepsilon^\lambda \tag{1.13}$$

である。(1.12) は、

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \delta^{(\varepsilon)}h_{\mu\nu} \tag{1.14}$$

で S_{Gravity} が不変であることを意味する。以下では、特に、ε^μ が無限小として、上の変換で不変な作用を探す。

1.4 $h_{\mu\nu}$ の微分を含まない作用

今、

$$g := \det(g_{\mu\nu}) \tag{1.15}$$

とすると、

$$\delta g = g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{1.16}$$

である。ここで、$g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の逆行列である。よって、

$$\begin{aligned}
\delta(-g)^\alpha &= \alpha(-g)^{\alpha-1}(-g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) \\
&= \alpha(-g)^\alpha g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

である。$\delta g_{\mu\nu} = \delta^{(\varepsilon)} g_{\mu\nu} = \delta^{(\varepsilon)} h_{\mu\nu}$ として、

$$
\begin{aligned}
\delta^{(\varepsilon)}(-g)^\alpha &= \alpha(-g)^\alpha g^{\mu\nu}(\partial_\lambda g_{\mu\nu}\varepsilon^\lambda + g_{\lambda\mu}\partial_\nu\varepsilon^\lambda + g_{\lambda\nu}\partial_\mu\varepsilon^\lambda) \\
&= \alpha(-g)^\alpha(g^{-1}\partial_\lambda g\varepsilon^\lambda + 2\partial_\mu\varepsilon^\mu) \\
&= \varepsilon^\mu\partial_\mu(-g)^\alpha + 2\alpha(-g)^\alpha\partial_\mu\varepsilon^\mu
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

を得る。よって、$\alpha = 1/2$ の時は、

$$
\delta^{(\varepsilon)}\sqrt{-g} = \partial_\mu(\varepsilon^\mu\sqrt{-g}) \tag{1.19}
$$

となる。従って、

$$
S_\Lambda := -\frac{\Lambda}{\kappa}\int d^4x\ \sqrt{-g} \tag{1.20}
$$

は作用の候補である。Λ は宇宙定数である。

1.5 $h_{\mu\nu}$ の 1 階微分の 2 次式からなる作用

$$
\begin{aligned}
\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} &:= g^{\lambda\sigma}\Gamma_{\sigma\mu\nu}, && (1.21)\\
B^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} &:= \partial_\alpha\Gamma^\mu{}_{\lambda\beta} - \partial_\beta\Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha}, && (1.22)\\
A^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} &:= \Gamma^\mu{}_{\rho\alpha}\Gamma^\rho{}_{\lambda\beta} - \Gamma^\mu{}_{\rho\beta}\Gamma^\rho{}_{\lambda\alpha}, && (1.23)\\
R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} &:= A^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} + B^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}, && (1.24)\\
C_{\mu\nu} &:= C^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}\ \ (C = A, B, R), && (1.25)\\
C &:= g^{\mu\nu}C_{\mu\nu}\ \ (C = A, B, R) && (1.26)
\end{aligned}
$$

と置く[1] と、

$$
\delta^{(\varepsilon)}R = \varepsilon^\mu\partial_\mu R \tag{1.27}
$$

となる (以下で示す)。よって、

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-g}R &\to \sqrt{-g}R + \partial_\mu(\varepsilon^\mu\sqrt{-g})R + \varepsilon^\mu\sqrt{-g}\partial_\mu R \\
&= \sqrt{-g}R + \partial_\mu(\varepsilon^\mu\sqrt{-g}R)
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

となる。また、

$$
\sqrt{-g}R \overset{\mathrm{w}}{=} -\sqrt{-g}A \tag{1.29}
$$

である。ここで、$\overset{\mathrm{w}}{=}$ は全微分項を無視する近似である。これより、

$$
S_{\mathrm{E}} := \int d^4x\ \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{E}},\quad \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{E}} := -\frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}A \tag{1.30}
$$

は作用の候補である。これをアインシュタイン作用と言い、$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathrm{E}}$ をアインシュタインのラグランジアン密度と言う[2]。

---

[1] $\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\big[-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu}\big]$ であった。

[2] A は一般相対論では (一般座標変換に対して) スカラーではないが、特殊相対論 (平坦時空での重力理論) では (ローレンツ変換に対して) スカラーである。

1.6 $\delta^{(\varepsilon)}R=\varepsilon^\mu\partial_\mu R$ の証明

さて、

$$\begin{aligned}\delta^{(\varepsilon)}\partial_\sigma g_{\mu\nu} &= \partial_\sigma g_{\mu\lambda}\partial_\nu\varepsilon^\lambda+\partial_\sigma g_{\lambda\nu}\partial_\mu\varepsilon^\lambda+g_{\mu\lambda}\partial_\sigma\partial_\nu\varepsilon^\lambda+g_{\lambda\nu}\partial_\sigma\partial_\mu\varepsilon^\lambda+\partial_\sigma\varepsilon^\lambda\partial_\lambda g_{\mu\nu}\\ &\quad+\varepsilon^\lambda\partial_\lambda\partial_\sigma g_{\mu\nu}\end{aligned}\tag{1.31}$$

より、

$$\delta^{(\varepsilon)}\Gamma_{\sigma\mu\nu}=\Gamma_{\sigma\mu\lambda}\partial_\nu\varepsilon^\lambda+\Gamma_{\sigma\lambda\nu}\partial_\mu\varepsilon^\lambda+\Gamma_{\lambda\mu\nu}\partial_\sigma\varepsilon^\lambda+\varepsilon^\lambda\partial_\lambda\Gamma_{\sigma\mu\nu}+g_{\sigma\lambda}\partial_\mu\partial_\nu\varepsilon^\lambda\tag{1.32}$$

である。また、

$$\delta^{(\varepsilon)}g^{\alpha\beta}=-\partial_\nu\varepsilon^\alpha g^{\nu\beta}-\partial_\nu\varepsilon^\beta g^{\alpha\nu}-\varepsilon^\lambda g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\partial_\lambda g_{\mu\nu}\tag{1.33}$$

なので、

$$\delta^{(\varepsilon)}\Gamma^\tau{}_{\mu\nu}=\Gamma^\tau{}_{\mu\lambda}\partial_\nu\varepsilon^\lambda+\Gamma^\tau{}_{\lambda\nu}\partial_\mu\varepsilon^\lambda-\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\partial_\lambda\varepsilon^\tau+\varepsilon^\lambda\partial_\lambda\Gamma^\tau{}_{\mu\nu}+\partial_\mu\partial_\nu\varepsilon^\tau\tag{1.34}$$

である。

よって、

$$\begin{aligned}-\delta^{(\varepsilon)}B^\tau{}_{\mu\nu\rho} &= \partial_\rho\Gamma^\tau{}_{\mu\lambda}\partial_\nu\varepsilon^\lambda+\partial_\rho\Gamma^\tau{}_{\lambda\nu}\partial_\mu\varepsilon^\lambda+\varepsilon^\lambda\partial_\rho\partial_\lambda\Gamma^\tau{}_{\mu\nu}+\partial_\lambda\Gamma^\tau{}_{\mu\nu}\partial_\rho\varepsilon^\lambda\\ &\quad-\partial_\rho\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\partial_\lambda\varepsilon^\tau+\Gamma^\tau{}_{\lambda\nu}\partial_\rho\partial_\mu\varepsilon^\lambda-\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\lambda\varepsilon^\tau\\ &\quad-(\rho\longleftrightarrow\nu)\\ &= -B^\tau{}_{\mu\lambda\rho}\partial_\nu\varepsilon^\lambda-B^\tau{}_{\lambda\nu\rho}\partial_\mu\varepsilon^\lambda+B^\lambda{}_{\mu\nu\rho}\partial_\lambda\varepsilon^\tau-B^\tau{}_{\mu\nu\lambda}\partial_\rho\varepsilon^\lambda-\varepsilon^\lambda\partial_\lambda B^\tau{}_{\mu\nu\rho}\\ &\quad+[\Gamma^\tau{}_{\lambda\nu}\partial_\rho\partial_\mu\varepsilon^\lambda-\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\lambda\varepsilon^\tau-(\rho\longleftrightarrow\nu)]\end{aligned}\tag{1.35}$$

である。

また、

$$\begin{aligned}\delta^{(\varepsilon)}A^\tau{}_{\mu\nu\rho} &= \delta^{(\varepsilon)}\Gamma^\tau{}_{\alpha\nu}\cdot\Gamma^\alpha{}_{\mu\rho}+\Gamma^\tau{}_{\alpha\nu}\delta^{(\varepsilon)}\Gamma^\alpha{}_{\mu\rho}-(\rho\longleftrightarrow\nu)\\ &= [\Gamma^\tau{}_{\alpha\lambda}\partial_\nu\varepsilon^\lambda+\Gamma^\tau{}_{\lambda\nu}\partial_\alpha\varepsilon^\lambda-\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}\partial_\lambda\varepsilon^\tau+\varepsilon^\lambda\partial_\lambda\Gamma^\tau{}_{\alpha\nu}+\partial_\alpha\partial_\nu\varepsilon^\tau]\Gamma^\alpha{}_{\mu\rho}\\ &\quad+\Gamma^\tau{}_{\alpha\nu}[\Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda}\partial_\rho\varepsilon^\lambda+\Gamma^\alpha{}_{\lambda\rho}\partial_\mu\varepsilon^\lambda-\Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}\partial_\lambda\varepsilon^\alpha+\varepsilon^\lambda\partial_\lambda\Gamma^\alpha{}_{\mu\rho}+\partial_\mu\partial_\rho\varepsilon^\alpha]\\ &\quad-(\rho\longleftrightarrow\nu)\\ &= A^\tau{}_{\mu\lambda\rho}\partial_\nu\varepsilon^\lambda+A^\tau{}_{\lambda\nu\rho}\partial_\mu\varepsilon^\lambda-A^\lambda{}_{\mu\nu\rho}\partial_\lambda\varepsilon^\tau+A^\tau{}_{\mu\nu\lambda}\partial_\rho\varepsilon^\lambda+\varepsilon^\lambda\partial_\lambda A^\tau{}_{\mu\nu\rho}\\ &\quad+[\Gamma^\tau{}_{\lambda\nu}\partial_\rho\partial_\mu\varepsilon^\lambda-\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\lambda\varepsilon^\tau-(\rho\longleftrightarrow\nu)]\end{aligned}\tag{1.36}$$

である。よって、

$$\delta^{(\varepsilon)}R^\tau{}_{\mu\nu\rho}=R^\tau{}_{\mu\lambda\rho}\partial_\nu\varepsilon^\lambda+R^\tau{}_{\lambda\nu\rho}\partial_\mu\varepsilon^\lambda-R^\lambda{}_{\mu\nu\rho}\partial_\lambda\varepsilon^\tau+R^\tau{}_{\mu\nu\lambda}\partial_\rho\varepsilon^\lambda+\varepsilon^\lambda\partial_\lambda R^\tau{}_{\mu\nu\rho}\tag{1.37}$$

を得る。

これより、

$$\delta^{(\varepsilon)}R_{\mu\rho}=\varepsilon^\lambda\partial_\lambda R_{\mu\rho}+\partial_\nu\varepsilon^\lambda R_{\mu\lambda}+\partial_\mu\varepsilon^\lambda R_{\nu\lambda}\tag{1.38}$$

となる。よって、

$$\delta^{(\varepsilon)}R=\varepsilon^\mu\partial_\mu R\tag{1.39}$$

を得る。

1.7　アインシュタイン方程式

作用

$$
\begin{aligned}
S_{\text{Gravity}} &= S_{\text{E}} + S_{\Lambda} \\
&= \int d^4x\ \frac{1}{\kappa}\sqrt{-g}\Big(-\frac{1}{2}A - \Lambda\Big)
\end{aligned}
\tag{1.40}
$$

に対する $\boldsymbol{G}^{\mu\nu}$ は、

$$
\boldsymbol{G}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\Big(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu}\Big) \tag{1.41}
$$

となる (§ 1.8)。よって、重力場の運動方程式 (1.10) は、

$$
R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu} = \kappa\frac{\boldsymbol{T}^{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} \tag{1.42}
$$

となる。これはアインシュタイン方程式である。

1.8　一般座標

一般座標では、$\eta_{\mu\nu}$ はもはや定数ではない。ただし、

$$
R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}[\eta] = 0 \tag{1.43}
$$

である。ここで、$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}[q]$ は $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ で $g_{\mu\nu}$ を $q_{\mu\nu}$ に置き換えたものである。領域 Ω で $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}[q] = 0$ であることと、Ω で $q_{\mu\nu}$ が定数となる座標系が存在することは同値である。

一般座標では、アインシュタインのラグランジアン密度において、

$$
\partial_\lambda g_{\mu\nu} \to \nabla^{(0)}_\lambda g_{\mu\nu} \tag{1.44}
$$

の置き換えをすれば良い。ここで、$\nabla^{(0)}_\lambda$ は共変微分で、その接続は $\eta_{\mu\nu}$ に対するリーマン接続である。上の置き換えで、

$$
\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \to C^{\lambda}{}_{\mu\nu} := \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \tag{1.45}
$$

となる。$\gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ は $\eta_{\mu\nu}$ に対するリーマン接続である。すなわち、$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ を $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}[g]$ と書くと、

$$
\gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}[\eta] \tag{1.46}
$$

である。

以下、

$$
\begin{aligned}
h &:= \sqrt{-g}, && (1.47) \\
\boldsymbol{D} &:= hg^{\mu\nu}C^{\rho}{}_{\gamma\nu}C^{\gamma}{}_{\mu\rho}, && (1.48) \\
\boldsymbol{E} &:= hg^{\mu\nu}C^{\rho}{}_{\gamma\rho}C^{\gamma}{}_{\mu\nu} && (1.49)
\end{aligned}
$$

と置く。このとき、

$$\sqrt{-g}(-A) \to \boldsymbol{G} := \boldsymbol{D} - \boldsymbol{E} \tag{1.50}$$

である。

$\boldsymbol{G}$ の変分を取る。

まず、

$$\begin{aligned}\delta \boldsymbol{D} &= \delta(hg^{\mu\nu})C^{\rho}{}_{\gamma\nu}C^{\gamma}{}_{\mu\rho} + 2hg^{\mu\nu}\delta C^{\rho}{}_{\gamma\nu}C^{\gamma}{}_{\mu\rho} \\ &= -\delta(hg^{\mu\nu})C^{\rho}{}_{\gamma\nu}C^{\gamma}{}_{\mu\rho} + 2\delta(hg^{\mu\nu}C^{\rho}{}_{\gamma\nu})C^{\gamma}{}_{\mu\rho}\end{aligned} \tag{1.51}$$

である。ここで、

$$\partial_\lambda g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\lambda} - g^{\nu\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\lambda} \tag{1.52}$$

なので、

$$\delta \boldsymbol{D} = -\delta(hg^{\mu\nu})C^{\rho}{}_{\gamma\nu}C^{\gamma}{}_{\mu\rho} + [-\delta(\partial_\gamma g^{\mu\rho}h) - 2\delta(hg^{\mu\nu})\gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}]C^{\gamma}{}_{\mu\rho} \tag{1.53}$$

となる。

また、

$$\begin{aligned}\delta \boldsymbol{E} &= \delta(hg^{\mu\nu}C_\gamma)C^{\gamma}{}_{\mu\nu} + hg^{\mu\nu}C_\gamma\delta C^{\gamma}{}_{\mu\nu} \\ &= \delta(hg^{\mu\nu}C_\gamma)C^{\gamma}{}_{\mu\nu} + C_\gamma\delta(hg^{\mu\nu}C^{\gamma}{}_{\mu\nu}) - \delta(hg^{\mu\nu})C_\gamma C^{\gamma}{}_{\mu\nu} \\ &= \delta(g^{\mu\nu}\partial_\gamma h)C^{\gamma}{}_{\mu\nu} - \delta(hg^{\mu\nu})\gamma_\gamma C^{\gamma}{}_{\mu\nu} + C_\gamma\delta(hg^{\mu\nu}C^{\gamma}{}_{\mu\nu}) - \delta(hg^{\mu\nu})C_\gamma C^{\gamma}{}_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{1.54}$$

である。ここで、$\bullet_\gamma := \bullet^{\rho}{}_{\gamma\rho}(\bullet = C, \Gamma, \gamma)$ である。ところで、(1.52) より、

$$\partial_\lambda(hg^{\mu\nu}) = h(-g^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\lambda} - g^{\nu\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\lambda} + g^{\mu\nu}\Gamma_\lambda) \tag{1.55}$$

である。$\lambda = \nu$ として、

$$\partial_\nu(hg^{\mu\nu}) = -hg^{\nu\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} \tag{1.56}$$

なので、これを (1.54) の第 2 項に代入して、

$$\begin{aligned}\delta \boldsymbol{E} &= \delta(g^{\mu\nu}\partial_\gamma h)C^{\gamma}{}_{\mu\nu} - \delta(hg^{\mu\nu})\gamma_\gamma C^{\gamma}{}_{\mu\nu} - C_\gamma\delta[\partial_\beta(hg^{\gamma\beta})] \\ &\quad -C_\gamma\delta(hg^{\mu\nu})\gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu} - \delta(hg^{\mu\nu})C_\gamma C^{\gamma}{}_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{1.57}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned}\delta \boldsymbol{G} &= \delta(hg^{\mu\nu})C_\gamma C^{\gamma}{}_{\mu\nu} - \delta(hg^{\mu\nu})C^{\rho}{}_{\gamma\nu}C^{\gamma}{}_{\mu\rho} \\ &\quad -\delta[\partial_\gamma(g^{\mu\rho}h)]C^{\gamma}{}_{\mu\rho} + C_\gamma\delta[\partial_\beta(hg^{\gamma\beta})] \\ &\quad +\delta(hg^{\mu\nu})[\gamma_\gamma C^{\gamma}{}_{\mu\nu} + C_\gamma\gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu} - 2\gamma^{\rho}{}_{\gamma\nu}C^{\gamma}{}_{\mu\rho}]\end{aligned} \tag{1.58}$$

である。第 2 行は、

$$\delta(g^{\mu\nu}h)[\partial_\gamma C^{\gamma}{}_{\mu\nu} - \partial_\nu C_\mu] + \partial_\rho \boldsymbol{F}^\rho \tag{1.59}$$

の形に書ける。よって、

$$\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{G} &= \delta(g^{\mu\nu}h)\Big([\partial_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - \partial_\nu C_\mu + C_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - C^\rho{}_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\mu\rho}] + [\gamma_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} + C_\gamma \gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - 2\gamma^\rho{}_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\mu\rho}]\Big) \\
&\quad +\partial_\rho \boldsymbol{F}^\rho \\
&= \delta(g^{\mu\nu}h)\Big([\partial_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - \partial_\nu C_\mu + C_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - C^\rho{}_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\mu\rho}] \\
&\quad +[\gamma_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} + C_\gamma \gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \gamma^\rho{}_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\mu\rho} - C^\rho{}_{\gamma\nu}\gamma^\gamma{}_{\mu\rho}]\Big) + \partial_\rho \boldsymbol{F}^\rho \\
&\equiv \delta(g^{\mu\nu}h)\mathcal{R}_{\mu\nu} + \partial_\rho \boldsymbol{F}^\rho
\end{aligned} \tag{1.60}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\mu\nu} &= [\partial_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - \partial_\nu C_\mu + C_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} - C^\rho{}_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\mu\rho}] \\
&\quad +[\gamma_\gamma C^\gamma{}_{\mu\nu} + C_\gamma \gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \gamma^\rho{}_{\gamma\nu}C^\gamma{}_{\mu\rho} - C^\rho{}_{\gamma\nu}\gamma^\gamma{}_{\mu\rho}] \\
&= \partial_\gamma \Gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma_\mu + \Gamma_\gamma \Gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\gamma\nu}\Gamma^\gamma{}_{\mu\rho} \\
&\quad -(\partial_\gamma \gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \gamma_\mu + \gamma_\gamma \gamma^\gamma{}_{\mu\nu} - \gamma^\rho{}_{\gamma\nu}\gamma^\gamma{}_{\mu\rho})
\end{aligned} \tag{1.61}$$

である。第1行目は $g_{\mu\nu}$ に対するリッチテンソル $R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu}[g]$ であり、第2行目は $(-1)R_{\mu\nu}[\eta] = 0$ である。また、

$$\delta(g^{\mu\nu}h) = h\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}hg^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \tag{1.62}$$

なので、

$$\delta\boldsymbol{G} = \delta g^{\mu\nu}\cdot h\Big(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\Big) + \partial_\rho \boldsymbol{F}^\rho \tag{1.63}$$

となる。

2　アインシュタインのラグランジアン密度の導出

2.1　候補

H を、

$$g^{\mu_{a_1}\mu_{a_2}}g^{\mu_{a_3}\mu_{a_4}}g^{\mu_{a_5}\mu_{a_6}}\Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3}\Gamma_{\mu_4\mu_5\mu_6}\,,\quad \{a_k\}_{k=1}^{6}=\{1,2,3,4,5,6\} \tag{2.1}$$

のタイプの項の線形結合とすると、

$$\begin{aligned} H =\, & A_1 g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\nu}+A_2 g^{\mu\nu}\Gamma_{\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}+A_3 g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} \\ & +A_4 g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\mu}\Gamma^{\beta}{}_{\delta\nu}+A_5 g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\delta}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.2}$$

が一般的な形である。ここで、$\Gamma_{\mu}:=\Gamma^{\rho}{}_{\mu\rho}$ である。また、

$$\begin{aligned} H =\, & g^{\mu\nu}\Big[A_1\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\nu}+A_2\Gamma_{\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}+A_3\Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} \\ & \qquad +A_4 g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\mu}\Gamma^{\beta}{}_{\delta\nu}+A_5 g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\delta}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu}\Big] \\ \equiv\, & g^{\mu\nu}\sum_{k=1}^{5}A_k H^{(k)}_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.3}$$

と置く。また、

$$H^{(k)}:=g^{\mu\nu}H^{(k)}_{\mu\nu} \tag{2.4}$$

と置く。

今、

$$D^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta,\gamma\delta}:=\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\nu}{}_{\gamma\delta} \tag{2.5}$$

と置くと、

$$H^{(1)}_{\mu\nu} = D^{\alpha\beta}{}_{\mu\beta,\alpha\nu}, \tag{2.6}$$
$$H^{(2)}_{\mu\nu} = D^{\rho\alpha}{}_{\alpha\rho,\mu\nu}, \tag{2.7}$$
$$H^{(3)}_{\mu\nu} = D^{\alpha\beta}{}_{\alpha\mu,\beta\nu}, \tag{2.8}$$
$$H^{(4)}_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}D^{\alpha\beta}{}_{\gamma\mu,\delta\nu}, \tag{2.9}$$
$$H^{(5)}_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}D^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta,\mu\nu} \tag{2.10}$$

である。

2.2　不変性

今、

$$\begin{aligned} \delta A^{\mu_1\cdots\mu_n}{}_{\nu_1\cdots\nu_m} =\, & -\partial_{\lambda}\varepsilon^{\mu_1}A^{\lambda\mu_2\cdots\mu_n}{}_{\nu_1\cdots\nu_m}-\cdots-\partial_{\lambda}\varepsilon^{\mu_n}A^{\mu_1\cdots\mu_{n-1}\lambda}{}_{\nu_1\cdots\nu_m} \\ & +\partial_{\nu_1}\varepsilon^{\lambda}A^{\mu_1\cdots\mu_n}{}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_m}+\partial_{\nu_m}\varepsilon^{\lambda}A^{\mu_1\cdots\mu_n}{}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_{m-1}\lambda} \end{aligned} \tag{2.11}$$

とすると、

$$\delta^{(\varepsilon)}\Gamma^{\tau}{}_{\mu\nu} = \delta\Gamma^{\tau}{}_{\mu\nu} + \varepsilon^{\lambda}\partial_{\lambda}\Gamma^{\tau}{}_{\mu\nu} + \partial_{\mu}\partial_{\nu}\varepsilon^{\tau} \tag{2.12}$$

である。よって、

$$\delta^{(\varepsilon)}D^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \delta B^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta,\gamma\delta} + \varepsilon^{\lambda}\partial_{\lambda}B^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta,\gamma\delta} + \partial_{\alpha}\partial_{\beta}\varepsilon^{\mu}\Gamma^{\nu}{}_{\gamma\delta} + \partial_{\gamma}\partial_{\delta}\varepsilon^{\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \tag{2.13}$$

である。ここで、

$$\delta^{(\varepsilon)}H^{(k)}_{\mu\nu} = \delta H^{(k)}_{\mu\nu} + \varepsilon^{\lambda}\partial_{\lambda}H^{(k)}_{\mu\nu} + \tilde{\delta}H^{(k)}_{\mu\nu} \tag{2.14}$$

と置くと、

$$\tilde{\delta}H^{(1)}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\partial_{\beta}\varepsilon^{\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\nu}\varepsilon^{\beta}, \tag{2.15}$$

$$\tilde{\delta}H^{(2)}_{\mu\nu} = \partial_{\rho}\partial_{\alpha}\varepsilon^{\rho}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\varepsilon^{\alpha}, \tag{2.16}$$

$$\tilde{\delta}H^{(3)}_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}\partial_{\mu}\varepsilon^{\alpha}\Gamma_{\nu} + \Gamma_{\mu}\partial_{\alpha}\partial_{\nu}\varepsilon^{\alpha}, \tag{2.17}$$

$$\tilde{\delta}H^{(4)}_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}(\partial_{\gamma}\partial_{\mu}\varepsilon^{\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\delta\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\mu}\partial_{\delta}\partial_{\nu}\varepsilon^{\beta}), \tag{2.18}$$

$$\tilde{\delta}H^{(5)}_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}(\partial_{\gamma}\partial_{\delta}\varepsilon^{\alpha}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\delta}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\varepsilon^{\beta}) \tag{2.19}$$

であり、

$$\delta^{(\varepsilon)}H^{(k)} = \varepsilon^{\lambda}\partial_{\lambda}H^{(k)} + g^{\mu\nu}\tilde{\delta}H^{(k)}_{\mu\nu}, \tag{2.20}$$

$$\delta^{(\varepsilon)}[hH^{(k)}] = \partial_{\lambda}(h\varepsilon^{\lambda}H^{(k)}) + hg^{\mu\nu}\tilde{\delta}H^{(k)}_{\mu\nu} \tag{2.21}$$

$$\overset{\mathrm{w}}{=} hg^{\mu\nu}\tilde{\delta}H^{(k)}_{\mu\nu} \tag{2.22}$$

である。ここで、

$$h := \sqrt{-g} \tag{2.23}$$

である。よって、

$$\sum_{k=1}^{5} A_k \cdot hg^{\mu\nu}\tilde{\delta}H^{(k)}_{\mu\nu} \overset{\mathrm{w}}{=} -\partial_{\beta}\varepsilon^{\alpha}hI^{\beta}{}_{\alpha} \tag{2.24}$$

と置くと、$I^{\beta}{}_{\alpha}$ は、テンソルであり、

$$I^{\beta}{}_{\alpha} = 0 \tag{2.25}$$

である。

まず、

$$\partial_{\gamma}(hg^{\mu\nu}) = h(-g^{\mu\lambda}\Gamma^{\nu}{}_{\lambda\gamma} - g^{\nu\lambda}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\gamma} + g^{\mu\nu}\Gamma_{\gamma}), \tag{2.26}$$

$$\partial_{\nu}(hg^{\mu\nu}) = -hg^{\lambda\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\lambda} \tag{2.27}$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
hg^{\mu\nu}\tilde{\delta}H^{(1)}_{\mu\nu} &= hg^{\mu\nu}(\partial_\mu\partial_\beta\varepsilon^\alpha\Gamma^\beta{}_{\alpha\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\partial_\alpha\partial_\nu\varepsilon^\beta) \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} -\partial_\beta\varepsilon^\alpha[\partial_\mu(hg^{\mu\nu})\Gamma^\beta{}_{\alpha\nu} + hg^{\mu\nu}\partial_\mu\Gamma^\beta{}_{\alpha\nu}] \\
&\quad\ -\partial_\nu\varepsilon^\beta[\partial_\alpha(hg^{\mu\nu})\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} + hg^{\mu\nu}\partial_\alpha\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}] \\
&= -hg^{\mu\nu}\partial_\beta\varepsilon^\alpha[-\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\Gamma^\beta{}_{\alpha\lambda} + \partial_\mu\Gamma^\beta{}_{\alpha\nu}] \\
&\quad\ -\partial_\nu\varepsilon^\beta[h(-g^{\mu\lambda}\Gamma^\nu{}_{\lambda\alpha} - g^{\nu\lambda}\Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha} + g^{\mu\nu}\Gamma_\alpha)\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} + hg^{\mu\nu}\partial_\alpha\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}] \\
&= -hg^{\mu\nu}\partial_\beta\varepsilon^\alpha[-\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\Gamma^\beta{}_{\alpha\lambda} + \partial_\mu\Gamma^\beta{}_{\alpha\nu}] \\
&\quad\ -\partial_\beta\varepsilon^\alpha[h(-g^{\mu\lambda}\Gamma^\beta{}_{\lambda\rho} - g^{\beta\lambda}\Gamma^\mu{}_{\lambda\rho} + g^{\mu\beta}\Gamma_\rho)\Gamma^\rho{}_{\mu\alpha} + hg^{\mu\beta}\partial_\rho\Gamma^\rho{}_{\mu\alpha}]
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

である。また、

$$
\begin{aligned}
hg^{\mu\nu}\tilde{\delta}H^{(2)}_{\mu\nu} &= hg^{\mu\nu}(\partial_\rho\partial_\alpha\varepsilon^\rho\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} + \Gamma_\alpha\partial_\mu\partial_\nu\varepsilon^\alpha) \\
&\overset{\mathrm{w}}{=} -\partial_\alpha\varepsilon^\rho[\partial_\rho(hg^{\mu\nu})\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} + hg^{\mu\nu}\partial_\rho\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}] - \partial_\mu\varepsilon^\alpha[\partial_\nu(hg^{\mu\nu})\Gamma_\alpha + hg^{\mu\nu}\partial_\nu\Gamma_\alpha] \\
&= -\partial_\alpha\varepsilon^\rho[h(-g^{\mu\alpha}\Gamma^\nu{}_{\alpha\rho} - g^{\nu\alpha}\Gamma^\mu{}_{\alpha\rho} + g^{\mu\nu}\Gamma_\rho)\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} + hg^{\mu\nu}\partial_\rho\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}] \\
&\quad\ -\partial_\mu\varepsilon^\alpha[-hg^{\lambda\alpha}\Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}\Gamma_\alpha + hg^{\mu\nu}\partial_\nu\Gamma_\alpha] \\
&= -\partial_\alpha\varepsilon^\rho[h(-g^{\mu\alpha}\Gamma^\nu{}_{\alpha\rho} - g^{\nu\alpha}\Gamma^\mu{}_{\alpha\rho})\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} + hg^{\mu\nu}\partial_\rho\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}] - \partial_\mu\varepsilon^\alpha[hg^{\mu\nu}\partial_\nu\Gamma_\alpha] \\
&= -\partial_\beta\varepsilon^\alpha[-2hg^{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\nu\alpha}\Gamma^\beta{}_{\mu\lambda} + hg^{\mu\nu}\partial_\alpha\Gamma^\beta{}_{\mu\nu} + hg^{\beta\nu}\partial_\nu\Gamma_\alpha]
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

である。

よって、

$$
\begin{aligned}
hg^{\mu\nu}\tilde{\delta}(H^{(1)}_{\mu\nu} - H^{(2)}_{\mu\nu}) &\overset{\mathrm{w}}{=} -\partial_\beta\varepsilon^\alpha h\Big[g^{\mu\nu}\partial_\mu\Gamma^\beta{}_{\alpha\nu} + g^{\mu\beta}\partial_\rho\Gamma^\rho{}_{\mu\alpha} - g^{\mu\nu}\partial_\alpha\Gamma^\beta{}_{\mu\nu} - g^{\beta\mu}\partial_\mu\Gamma^\rho{}_{\alpha\rho} \\
&\qquad -g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\Gamma^\beta{}_{\alpha\lambda} + (-g^{\mu\lambda}\Gamma^\beta{}_{\lambda\rho} - g^{\beta\lambda}\Gamma^\mu{}_{\lambda\rho} + g^{\mu\beta}\Gamma_\rho)\Gamma^\rho{}_{\mu\alpha} \\
&\qquad +2g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\nu\alpha}\Gamma^\beta{}_{\mu\lambda}\Big] \\
&= -\partial_\beta\varepsilon^\alpha h\Big[g^{\mu\nu}(\partial_\mu\Gamma^\beta{}_{\alpha\nu} - \partial_\alpha\Gamma^\beta{}_{\mu\nu}) + g^{\mu\beta}(\partial_\rho\Gamma^\rho{}_{\mu\alpha} - \partial_\mu\Gamma^\rho{}_{\alpha\rho}) \\
&\qquad -g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\Gamma^\beta{}_{\alpha\lambda} + (g^{\mu\lambda}\Gamma^\beta{}_{\lambda\rho} - g^{\beta\lambda}\Gamma^\mu{}_{\lambda\rho} + g^{\mu\beta}\Gamma_\rho)\Gamma^\rho{}_{\mu\alpha}\Big]
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

となる。ところで、

$$
B^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} = \partial_\alpha\Gamma^\mu{}_{\lambda\beta} - \partial_\beta\Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha}, \tag{2.31}
$$

$$
A^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} = \Gamma^\mu{}_{\rho\alpha}\Gamma^\rho{}_{\lambda\beta} - \Gamma^\mu{}_{\rho\beta}\Gamma^\rho{}_{\lambda\alpha}, \tag{2.32}
$$

$$
R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} = A^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} + B^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} \tag{2.33}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
hg^{\mu\nu}\tilde{\delta}(H^{(1)}_{\mu\nu} - H^{(2)}_{\mu\nu}) &\overset{\mathrm{w}}{=} -\partial_\beta\varepsilon^\alpha h\Big[g^{\mu\nu}B^\beta{}_{\nu\mu\alpha} + g^{\mu\beta}B^\rho{}_{\alpha\rho\mu} \\
&\qquad +g^{\mu\nu}A^\beta{}_{\mu\nu\alpha} + g^{\beta\lambda}(-\Gamma^\mu{}_{\lambda\rho}\Gamma^\rho{}_{\mu\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\rho\mu}\Gamma^\rho{}_{\lambda\alpha})\Big] \\
&= -\partial_\beta\varepsilon^\alpha h\Big[g^{\mu\nu}B^\beta{}_{\nu\mu\alpha} + g^{\mu\beta}B^\rho{}_{\alpha\rho\mu} \\
&\qquad +g^{\mu\nu}A^\beta{}_{\mu\nu\alpha} + g^{\beta\lambda}A^\mu{}_{\lambda\mu\alpha}\Big] \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

を得る。

今、$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ を 0 と置く近似を $\stackrel{\bullet}{=}$ と書くと、

$$I^{\beta}{}_{\alpha} \stackrel{\bullet}{=} 0 \tag{2.35}$$

である。また、

$$hg^{\mu\nu}\tilde{\delta}H^{(1)}_{\mu\nu} \stackrel{\bullet}{=} -h\partial_\beta\varepsilon^\alpha[g^{\mu\nu}\partial_\mu\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\nu} + g^{\mu\beta}\partial_\rho\Gamma^{\rho}{}_{\mu\alpha}], \tag{2.36}$$

$$hg^{\mu\nu}\tilde{\delta}H^{(2)}_{\mu\nu} \stackrel{\bullet}{=} -h\partial_\beta\varepsilon^\alpha[g^{\mu\nu}\partial_\alpha\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} + g^{\beta\nu}\partial_\nu\Gamma_\alpha] \tag{2.37}$$

である。

さて、

$$\begin{aligned} hg^{\mu\nu}\tilde{\delta}H^{(3)}_{\mu\nu} &= hg^{\mu\nu}(\partial_\alpha\partial_\mu\varepsilon^\alpha\Gamma_\nu + \Gamma_\mu\partial_\alpha\partial_\nu\varepsilon^\alpha) \\ &\stackrel{\mathrm{w}}{=} -2\partial_\beta\varepsilon^\alpha\partial_\alpha(hg^{\mu\beta}\Gamma_\mu) \\ &\stackrel{\bullet}{=} -2\partial_\beta\varepsilon^\alpha hg^{\mu\beta}\partial_\alpha\Gamma_\mu \end{aligned} \tag{2.38}$$

である。また、

$$\begin{aligned} hg^{\mu\nu}\tilde{\delta}H^{(4)}_{\mu\nu} &= hg^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}(\partial_\gamma\partial_\mu\varepsilon^\alpha\Gamma^{\beta}{}_{\delta\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\mu}\partial_\delta\partial_\nu\varepsilon^\beta) \\ &\stackrel{\mathrm{w}}{=} -\partial_\gamma\varepsilon^\alpha\partial_\mu(hg^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\Gamma^{\beta}{}_{\delta\nu}) - \partial_\nu\varepsilon^\beta\partial_\delta(hg^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\mu}) \\ &\stackrel{\bullet}{=} -\partial_\gamma\varepsilon^\alpha hg^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\partial_\mu\Gamma^{\beta}{}_{\delta\nu} - \partial_\nu\varepsilon^\beta hg^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\partial_\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\mu} \\ &= -\partial_\beta\varepsilon^\alpha h(g^{\mu\nu}g_{\alpha\lambda}g^{\beta\delta}\partial_\mu\Gamma^{\lambda}{}_{\delta\nu} + g^{\mu\beta}g_{\lambda\alpha}g^{\gamma\delta}\partial_\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\gamma\mu}) \end{aligned} \tag{2.39}$$

であり、

$$\begin{aligned} hg^{\mu\nu}\tilde{\delta}H^{(5)}_{\mu\nu} &= hg^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}(\partial_\gamma\partial_\delta\varepsilon^\alpha\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\delta}\partial_\mu\partial_\nu\varepsilon^\beta) \\ &\stackrel{\mathrm{w}}{=} -\partial_\gamma\varepsilon^\alpha\partial_\delta(hg^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu}) - \partial_\nu\varepsilon^\beta\partial_\mu(hg^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\delta}) \\ &\stackrel{\bullet}{=} -\partial_\gamma\varepsilon^\alpha hg^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\partial_\delta\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} - \partial_\nu\varepsilon^\beta hg^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\partial_\mu\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\delta} \\ &= -\partial_\beta\varepsilon^\alpha h(g^{\mu\nu}g_{\alpha\lambda}g^{\beta\delta}\partial_\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + g^{\mu\beta}g_{\lambda\alpha}g^{\gamma\delta}\partial_\mu\Gamma^{\lambda}{}_{\gamma\delta}) \end{aligned} \tag{2.40}$$

となる。さて、

$$\mathcal{C}^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta} := \partial_\alpha\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\beta} \tag{2.41}$$

とすると、

$$B^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta} = \mathcal{C}^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta} - \mathcal{C}^{\mu}{}_{\lambda\beta\alpha} \stackrel{\bullet}{=} R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta} \tag{2.42}$$

である。今、

$$hg^{\mu\nu}\tilde{\delta}H^{(k)}_{\mu\nu} \stackrel{\mathrm{w}}{=} -h\partial_\beta\varepsilon^{\alpha\,(k)}I^{\beta}{}_{\alpha} \tag{2.43}$$

と書くと、

$${}^{(1)}I^{\beta}{}_{\alpha} \stackrel{\bullet}{=} g^{\mu\nu}\mathcal{C}^{\beta}{}_{\nu\mu\alpha} + g^{\mu\beta}\mathcal{C}^{\rho}{}_{\alpha\rho\mu}, \tag{2.44}$$

$${}^{(2)}I^{\beta}{}_{\alpha} \stackrel{\bullet}{=} g^{\mu\nu}\mathcal{C}^{\beta}{}_{\nu\alpha\mu} + g^{\mu\beta}\mathcal{C}^{\rho}{}_{\alpha\mu\rho}, \tag{2.45}$$

$${}^{(3)}I^{\beta}{}_{\alpha} \stackrel{\bullet}{=} 2g^{\mu\beta}\mathcal{C}^{\rho}{}_{\mu\alpha\rho}, \tag{2.46}$$

$${}^{(4)}I^{\beta}{}_{\alpha} \stackrel{\bullet}{=} g^{\mu\nu}g_{\alpha\lambda}g^{\beta\delta}\mathcal{C}^{\lambda}{}_{\mu\nu\delta} + g^{\mu\beta}g_{\lambda\alpha}g^{\gamma\delta}\mathcal{C}^{\lambda}{}_{\gamma\delta\mu}, \tag{2.47}$$

$${}^{(5)}I^{\beta}{}_{\alpha} \stackrel{\bullet}{=} g^{\mu\nu}g_{\alpha\lambda}g^{\beta\delta}\mathcal{C}^{\lambda}{}_{\mu\delta\nu} + g^{\mu\beta}g_{\lambda\alpha}g^{\gamma\delta}\mathcal{C}^{\lambda}{}_{\gamma\mu\delta} \tag{2.48}$$

となる。特に、

$$ {}^{(1)}I^{\beta}{}_{\alpha} - {}^{(2)}I^{\beta}{}_{\alpha} \doteq 0, \tag{2.49} $$

$$ {}^{(4)}I^{\beta}{}_{\alpha} - {}^{(5)}I^{\beta}{}_{\alpha} \doteq -2R_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta} \tag{2.50} $$

である。さて、

$$ I^{\beta}{}_{\alpha} = \sum_{k=1} A_k {}^{(k)}I^{\beta}{}_{\alpha} \tag{2.51} $$

がテンソルであるためには、

$$ A_2 = -A_1, \tag{2.52} $$

$$ A_3 = 0, \tag{2.53} $$

$$ A_5 = -A_4 \tag{2.54} $$

である：

$$ I^{\beta}{}_{\alpha} = A_1({}^{(1)}I^{\beta}{}_{\alpha} - {}^{(2)}I^{\beta}{}_{\alpha}) + A_4({}^{(4)}I^{\beta}{}_{\alpha} - {}^{(5)}I^{\beta}{}_{\alpha}). \tag{2.55} $$

さらに、

$$ I^{\beta}{}_{\alpha} \doteq 0 \tag{2.56} $$

より、

$$ A_4 = 0 \tag{2.57} $$

を得る。

よって、

$$ H = A_1(g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\nu} - g^{\mu\nu}\Gamma_{\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}) \tag{2.58} $$

が重力場のラグランジアン密度である。

References

[1] 中嶋慧「平坦時空での重力」
http://physnakajima.html.xdomain.jp/Feynman_Gravity_2.pdf