

ラグランジアン密度の不定性

中嶋 慧

2026年4月13日

概要

ラグランジアン密度 \mathcal{L} のオイラー・ラグランジュ微分が0であれば、 \mathcal{L} は全微分 $\partial_\mu K^\mu$ の形に書けることを示す。

1 証明

ラグランジアン密度 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi^A, \partial_\mu \psi^A; x)$ に対して、 $0 \leq s \leq 1$ に対して、

$$\mathcal{L}_A(s) := \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A} \right)_s - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} \right)_s = 0 \quad (1.1)$$

を仮定する。ここで、

$$(X)_s := X \Big|_{\psi^A \rightarrow s\psi^A, \partial_\mu \psi^A \rightarrow s\partial_\mu \psi^A} \quad (1.2)$$

である。いま、

$$\mathcal{L}_s := \mathcal{L}(s\psi^A, s\partial_\mu \psi^A; x) \quad (1.3)$$

を s で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}_s}{ds} &= \psi^A \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A} \right)_s + \partial_\mu \psi^A \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} \right)_s \\ &= \psi^A \mathcal{L}_A(s) + \partial_\mu \left[\psi^A \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} \right)_s \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

であり、これと仮定 (1.1) より、

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(0, 0; x) + \partial_\mu K^\mu, \quad (1.5)$$

$$K^\mu := \psi^A \int_0^1 ds \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} \right)_s \quad (1.6)$$

を得る。 $\mathcal{L}(0, 0; x) = 0$ ならこれで証明終わり。

$\mathcal{L}(0, 0; x) \neq 0$ なら、

$$f(x) := \mathcal{L}(0, 0; x) \quad (1.7)$$

とすると、

$$f(x) = \partial_\mu R^\mu(x), \quad R^\mu := x^\mu \int_0^1 ds s^{D-1} f(sx) \quad (1.8)$$

である。 D は時空次元である。実際、

$$\begin{aligned}\partial_\mu R^\mu &= \int_0^1 ds \left[Ds^{D-1} f(sx) + x^\mu s^D f_\mu(sx) \right] \\ &= \int_0^1 ds \left[Ds^{D-1} f(sx) + s^D \frac{d}{ds} f(sx) \right] \\ &= \left[s^D f(sx) \right]_0^1 \\ &= f(x)\end{aligned}\tag{1.9}$$

である。よって、

$$\mathcal{L} = \partial_\mu (K^\mu + R^\mu)\tag{1.10}$$

となる。