2重共変解析力学

中嶋 慧

January 8, 2021

Abstract

この記事は、数理物理 Advent Calendar 2020 の 14 日目の記事である。まず、ゲージ理論における共変微分を解説する。次に共変微分を使って書かれたオイラー・ラグランジュ方程式を解説する。最後に、共変解析力学と 2020 年の論文 [2] で提案された 2 重共変解析力学を解説する。2 重共変解析力学の正準方程式は、

$$D\phi^{\mathcal{A}} = (-1)^{(p+1)q}\frac{\partial H}{\partial \pi_{\mathcal{A}}}, \tag{0.1}$$

$$D\pi_{\mathcal{A}} = -(-1)^{p}\frac{\partial H}{\partial \phi^{\mathcal{A}}} \tag{0.2}$$

である。ここで、$\phi^{\mathcal{A}}$ は p 形式であり、

$$\pi_{\mathcal{A}} := \frac{\partial L(\phi, D\phi)}{\partial D\phi^{\mathcal{A}}} \tag{0.3}$$

は q 形式である ($q := D - p - 1$, D は時空の次元)。$L(\phi, D\phi)$ はラグランジアン密度に体積形式をかけたものであり、ラグランジアン形式と呼ばれる。$D\phi^{\mathcal{A}}$, $D\pi_{\mathcal{A}}$ は共変微分である。また、

$$H(\phi, \pi) := D\phi^{\mathcal{A}} \wedge \pi_{\mathcal{A}} - L(\phi, D\phi) \tag{0.4}$$

はラグランジアン形式 $L(\phi, D\phi)$ のルジャンドル変換である。

Contents

1 共変微分

この章は [1] を参考にした。

1.1 導入

ラグランジアン密度 $\mathcal{L}_0(\psi, \partial_\mu \psi)$ が、場の量の組 $\{\psi^A\}_{A=1}^N$ の大域的変換

$$\psi'(x) = T(\varepsilon)\psi(x), \quad \psi = {}^t(\psi^1, \cdots, \psi^N) \tag{1.1}$$

で不変だと仮定する。$T(\varepsilon)$ はある線形リー群 G の表現である。ただし、$\varepsilon = \{\varepsilon^r\}_{r=1,\cdots,n}$ は実パラメーターの組で、すべての r に対して $\varepsilon^r = 0$ のときが恒等変換に対応する。微小変換は、

$$\delta\psi := \psi' - \psi = \varepsilon^r G_r \psi \tag{1.2}$$

である。ただし、G_r は群 G のリー代数の基底の表現である。G_r の交換関係は、

$$[G_r, G_s] = f^t{}_{rs} G_t \tag{1.3}$$

となる。$f^t{}_{rs}(= -f^t{}_{sr})$ は構造定数と呼ばれる実定数である。
このとき、

$$D_\mu \psi := \partial_\mu \psi + \boldsymbol{A}_\mu \psi \tag{1.4}$$

という量を導入する。これを共変微分と呼ぶ。$\boldsymbol{A}_\mu$ は以下の変換則が成り立つように決める：

$$D'_\mu \psi' := \partial_\mu \psi' + \boldsymbol{A}'_\mu \psi' = T(\varepsilon(x)) D_\mu \psi. \tag{1.5}$$

ここで、$\psi' = T(\varepsilon(x))\psi$ である。このとき、$\mathcal{L}_0(\psi, D_\mu \psi)$ はゲージ不変である。
(1.5) より、

$$\boldsymbol{A}'_\mu = T \boldsymbol{A}_\mu T^{-1} - \partial_\mu T \cdot T^{-1} \tag{1.6}$$

を得る。ところで、上式の右辺第 2 項は、

$$-\partial_\mu T \cdot T^{-1} = a^r{}_\mu G_r \tag{1.7}$$

と書ける [1]。$a^r{}_\mu$ は実数である。いま、

$$\boldsymbol{A}^{(0)}_\mu := A^r{}_\mu G_r, \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{A}^{(1)}_\mu := \boldsymbol{A}_\mu - \boldsymbol{A}^{(0)}_\mu \tag{1.9}$$

とおく。$\boldsymbol{A}^{(1)}_\mu$ は $\boldsymbol{G}_r$ の線形結合では書けない部分である。これらはそれぞれ、

$$\boldsymbol{A}^{(0)\prime}_\mu = T \boldsymbol{A}^{(0)}_\mu T^{-1} - \partial_\mu T \cdot T^{-1}, \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{A}^{(1)\prime}_\mu = T \boldsymbol{A}^{(1)}_\mu T^{-1} \tag{1.11}$$

と変換する。$\boldsymbol{A}^{(1)}_\mu$ は、(1.5) を満たすためには不要であり、0 であっても困ることはない。よって、$\boldsymbol{A}^{(1)}_\mu = 0$ とおく。このとき、

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + A^r{}_\mu G_r \psi \tag{1.12}$$

となる。$A^r{}_\mu$ がゲージ場である。

1.2 一般の共変微分

一般に、微小変換 (1.2) に伴い場の組 $\{\phi^{\mathcal{A}}\}$ が、

$$\phi'^{\mathcal{A}} = \phi^{\mathcal{A}} + \varepsilon^r (G_r)^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}}\phi^{\mathcal{B}} \tag{1.13}$$

と変換するとき、共変微分を、

$$(D_\mu\phi)^{\mathcal{A}} := \partial_\mu\phi^{\mathcal{A}} + A^r{}_\mu (G_r)^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}}\phi^{\mathcal{B}} \tag{1.14}$$

と定める。

さて、$\{\psi^A\}$ が微分形式で、微小変換 (1.2) に伴い

$$\psi'^A = \psi^A + \varepsilon^r (G_r)^A{}_B\psi^B \tag{1.15}$$

と変換するとき、微分形式で書いた共変微分は、

$$D\psi^A := d\psi^A + A^r (G_r)^A{}_B \wedge \psi^B \tag{1.16}$$

である。ここで、

$$A^r = A^r{}_\mu dx^\mu \tag{1.17}$$

はゲージ場を表す 1 形式である。

1.3 共役形式の共変微分

微分 p 形式 β $(p = 0, 1, \cdots, D)$ が微分形式の組 $\{\alpha^i\}_{i=1,\cdots,k}$ で表されていると仮定する。もし変分 $\delta\alpha^i$ の下で β の変分が

$$\delta\beta = \delta\alpha^i \wedge \omega_i \tag{1.18}$$

のように書けるとき、ω_i を β の α^i による微分と言い、

$$\frac{\partial\beta}{\partial\alpha^i} := \omega_i \tag{1.19}$$

と書く [1]。すなわち、

$$\delta\beta = \delta\alpha^i \wedge \frac{\partial\beta}{\partial\alpha^i} \tag{1.20}$$

である。

オイラー・ラグランジュ方程式は、

$$\frac{\partial L}{\partial\psi} - (-1)^p d\frac{\partial L}{\partial d\psi} = 0 \tag{1.21}$$

である。ただし、L はラグランジアン形式 (ラグランジアン密度に体積形式をかけたものであり、p 形式 ψ とその外微分 $d\psi$ とで表される) である。

ψ^A に対して、

$$\pi_A := \frac{\partial L}{\partial d\psi^A} \tag{1.22}$$

を共役形式と呼ぶ。

$\phi^{\mathcal{A}}$ を p 形式とする。p はラベル $\mathcal{A}$ に依存してもよい。今、場の変換

$$\phi'^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{A}}(\phi^{\mathcal{B}}) \tag{1.23}$$

を考える。ただし、

$$J^{\mathcal{A}}_{\ \mathcal{B}} := \frac{\partial f^{\mathcal{A}}}{\partial \phi^{\mathcal{B}}} \tag{1.24}$$

が存在し、0 でない成分は 0 形式と仮定する。つまり、変換後の p 形式の場が、変換前の p 形式の場だけで表されると仮定する。$J^{\mathcal{A}}_{\ \mathcal{B}}$ は場に依存しても良いとする。更に、$J^{\mathcal{A}}_{\ \mathcal{B}}$ の逆行列 $K^{\mathcal{A}}_{\ \mathcal{B}}$ が存在し、外微分可能と仮定する。また、ラグランジアン形式 L は場の変換で不変だと仮定する。例えば、ゲージ変換はこの条件を満たす。このとき、

$$\pi'_{\mathcal{A}} = K^{\mathcal{B}}_{\ \mathcal{A}}\pi_{\mathcal{B}} \tag{1.25}$$

であることを以下で示す。ここで、$\pi_{\mathcal{B}}$ は $\phi^{\mathcal{B}}$ の、$\pi_{\mathcal{A}}$ は $\phi'^{\mathcal{A}}$ の共役形式である。

さて、仮定より、

$$\delta\phi'^{\mathcal{A}} = J^{\mathcal{A}}_{\ \mathcal{B}}\delta\phi^{\mathcal{B}} \tag{1.26}$$

である。この式を外微分して、

$$d\delta\phi'^{\mathcal{A}} = dJ^{\mathcal{A}}_{\ \mathcal{B}} \wedge \delta\phi^{\mathcal{B}} + J^{\mathcal{A}}_{\ \mathcal{B}} d\delta\phi^{\mathcal{B}} \tag{1.27}$$

を得る。これより、

$$\delta\psi^{\mathcal{A}} = K^{\mathcal{A}}_{\ \mathcal{B}}\delta\psi'^{\mathcal{B}}, \tag{1.28}$$

$$\delta d\psi^{\mathcal{A}} = K^{\mathcal{A}}_{\ \mathcal{B}}\delta d\psi'^{\mathcal{B}} + (-1)^p \delta\psi'^{\mathcal{B}} \wedge dK^{\mathcal{A}}_{\ \mathcal{B}} \tag{1.29}$$

を得る[1)]。ここで、$dK^{\mathcal{A}}_{\ \mathcal{B}} = -K^{\mathcal{A}}_{\ \mathcal{C}} dJ^{\mathcal{C}}_{\ \mathcal{D}} K^{\mathcal{D}}_{\ \mathcal{A}}$ および $\delta d\psi^{\mathcal{A}} = d\delta\psi^{\mathcal{A}}$ を用いた。上 2 式を、

$$\delta L = \delta\phi^{\mathcal{A}} \wedge \frac{\partial L}{\partial \phi^{\mathcal{A}}} + d\delta\phi^{\mathcal{A}} \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi^{\mathcal{A}}} \tag{1.30}$$

に代入し、

$$\delta L = \delta\phi'^{\mathcal{A}} \wedge \frac{\partial L}{\partial \phi'^{\mathcal{A}}} + d\delta\phi'^{\mathcal{A}} \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi'^{\mathcal{A}}} \tag{1.31}$$

と比べることで、

$$\frac{\partial L}{\partial \phi'^{\mathcal{A}}} = K^{\mathcal{B}}_{\ \mathcal{A}}\frac{\partial L}{\partial \phi^{\mathcal{B}}} + (-1)^p dK^{\mathcal{B}}_{\ \mathcal{A}} \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi^{\mathcal{B}}}, \tag{1.32}$$

$$\frac{\partial L}{\partial d\phi'^{\mathcal{A}}} = K^{\mathcal{B}}_{\ \mathcal{A}}\frac{\partial L}{\partial d\phi^{\mathcal{B}}} \tag{1.33}$$

---

1) $\psi^{\mathcal{A}}$ も、$K^{\mathcal{A}}_{\ \mathcal{B}} \neq 0$ となるような $\mathcal{B}$ に対する $\psi'^{\mathcal{B}}$ も、同じ p 形式である。p は $\mathcal{A}$ に依存してもよい。

を得る。(1.33) は (1.25) である。
　よって、ゲージ変換

$$\psi'^A = [T(\varepsilon(x))]^A{}_B \phi^B \tag{1.34}$$

に伴い、共役形式は、

$$\pi'_A = [T(\varepsilon(x))^{-1}]^B{}_A \pi_B \tag{1.35}$$

と変換する。特に微小変換では、

$$\psi'^A = \psi^A + \varepsilon^r (G_r)^A{}_B \phi^B, \tag{1.36}$$

$$\pi'_A = \pi_A - \varepsilon^r (G_r)^B{}_A \pi_B \tag{1.37}$$

である。よって、共役形式の共変微分は、

$$D\pi_A = d\pi_A - A^r (G_r)^B{}_A \wedge \pi_B \tag{1.38}$$

である。
　また、ゲージ場の共役形式を

$$\pi_r := \frac{\partial L}{\partial dA^r} \tag{1.39}$$

とする。ゲージ場はゲージ変換で (1.10) と変換する。これは、

$$A'^r = [\mathrm{Ad}(T)]^r{}_s A^s + a^r \tag{1.40}$$

の形に書ける。$\mathrm{Ad}(T)$ は随伴表現である[2)] 。よって、

$$\frac{\partial A'^r}{\partial A^s} = [\mathrm{Ad}(T)]^r{}_s \tag{1.41}$$

であり、(1.33) より、

$$\pi'_r = [\mathrm{Ad}(T)^{-1}]^s{}_r \pi_s \tag{1.42}$$

である。微小変換では、

$$\pi'_r = \pi_r + f^s{}_{rt} \varepsilon^t \pi_s \tag{1.43}$$

である。よって、π_r の共変微分は、

$$D\pi_r = d\pi_r + f^s{}_{rt} A^t \wedge \pi_s \tag{1.44}$$

である。

[2)] $T = \exp(\varepsilon^r G_r)$ なら、$[\mathrm{Ad}(T)]^t{}_s = [\exp(\varepsilon^r \mathrm{ad}(G_r))]^t{}_s$, $[\mathrm{ad}(G_r)]^t{}_s = f^t{}_{rs}$ である。

1.4　ゲージ場の共変微分

ゲージ場の共変微分は、

$$DA^r := dA^r + \frac{1}{2} f^r{}_{st} A^s \wedge A^t =: F^r \tag{1.45}$$

である。F^r はゲージ場の曲率であり、ゲージ変換に対して、

$$F'^r = [\mathrm{Ad}(T)]^r{}_s F^s \tag{1.46}$$

と変換される [1]。

2　共変微分で書かれたオイラー・ラグランジュ方程式

ゲージ理論では、物質場 ψ^A の微分は共変微分 $D\psi^A$ の形でのみラグランジアン形式に含まれる。また、ゲージ場の微分も共変微分 DA^r の形でのみラグランジアン形式に含まれる。よって、$\phi^{\mathcal{A}}$ を物質場またはゲージ場とすると、その共役形式は、

$$\pi_{\mathcal{A}} = \frac{\partial L}{\partial D\phi^{\mathcal{A}}} \tag{2.1}$$

となる。

以下で示すように、共変微分で書かれたオイラー・ラグランジュ方程式は、

$$\frac{\partial L}{\partial \phi^{\mathcal{A}}} - (-1)^p D \frac{\partial L}{\partial D\phi^{\mathcal{A}}} = 0 \tag{2.2}$$

である。これは、

$$\frac{\partial L}{\partial \phi^{\mathcal{A}}} - (-1)^p D\pi_{\mathcal{A}} = 0 \tag{2.3}$$

と書ける。

2.1　物質場

まず、ψ^A を物質場とし、$L_0(\psi^A, D\psi^A)$ を物質場のラグランジアン形式とする。作用の ψ^A についての変分は、

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_V \delta L_0(\psi^A, D\psi^A) \\ &= \int_V \left[\delta\psi^A \wedge \frac{\partial L_0}{\partial \psi^A} + \delta D\psi^A \wedge \pi_A\right]\end{aligned} \tag{2.4}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}\delta D\psi^A \wedge \pi_A &= \delta d\psi^A \wedge \pi_A + A^r (G_r)^A{}_B \wedge \delta\psi^B \wedge \pi_A \\ &= d(\delta\psi^A \wedge \pi_A) - (-1)^p \delta\psi^A \wedge d\pi_A + (-1)^p \delta\psi^B (G_r)^A{}_B \wedge A^r \wedge \pi_A \\ &= d(\delta\psi^A \wedge \pi_A) - (-1)^p \delta\psi^A \wedge D\pi_A\end{aligned} \tag{2.5}$$

なので、

$$\delta S = \int_V \delta\psi^A \wedge \left[\frac{\partial L_0}{\partial \psi^A} - (-1)^p D\pi_A\right] + \int_{\partial V} \delta\psi^A \wedge \pi_A \tag{2.6}$$

となり、第 2 項は消えるので、(2.3) を得る。

2.2 ゲージ場

ラグランジアン形式

$$L = L_0(\psi^A, D\psi^A) + L_{\mathrm{Gauge}}(DA^r) \tag{2.7}$$

を考える。これのゲージ場での変分は、

$$\delta L = \delta A^r \wedge J_r + \delta DA^r \wedge \pi_r \tag{2.8}$$

である。ここで、

$$J_r := \frac{\partial L_0}{\partial A^r} \tag{2.9}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \delta DA^r \wedge \pi_r &= \delta dA^r \wedge \pi_r + \delta A^r \wedge f^s{}_{rt} A^t \wedge \pi_s \\ &= \delta A^r \wedge (d\pi_r + f^s{}_{rt} A^t \wedge \pi_s) + d(\delta A^r \wedge \pi_r) \\ &= \delta A^r \wedge D\pi_r + d(\delta A^r \wedge \pi_r) \end{aligned} \tag{2.10}$$

なので、オイラー・ラグランジュ方程式は、

$$D\pi_r + J_r = 0 \tag{2.11}$$

または、

$$\frac{\partial L}{\partial A^r} + D\pi_r = 0 \tag{2.12}$$

となる。これは (2.3) である。

3 2 重共変解析力学

3.1 共変解析力学

この節では [1] を参考に共変解析力学を解説する。
Hamilton form を、

$$H = H(\phi, \pi) := d\phi^{\mathcal{A}} \wedge \pi_{\mathcal{A}} - L \tag{3.1}$$

で定義する。$\pi_{\mathcal{A}}$ は $\phi^{\mathcal{A}}$ の共役形式である。H は $\phi^{\mathcal{A}}$ と $\pi_{\mathcal{A}}$ とで表される。H の変分は、

$$\begin{aligned}\delta H &= \delta d\phi^{\mathcal{A}} \wedge \pi_{\mathcal{A}} + d\phi^{\mathcal{A}} \wedge \delta\pi_{\mathcal{A}} - \delta\phi^{\mathcal{A}} \wedge \frac{\partial L}{\partial \phi^{\mathcal{A}}} - \delta d\phi^{\mathcal{A}} \wedge \frac{\partial L}{\partial d\phi^{\mathcal{A}}} \\ &= (-1)^{(p+1)q}\delta\pi_{\mathcal{A}} \wedge d\phi^{\mathcal{A}} - \delta\phi^{\mathcal{A}} \wedge \frac{\partial L}{\partial \phi^{\mathcal{A}}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

と書ける。ここで、$\phi^{\mathcal{A}}$ は p 形式で、$q := D - p - 1$ である。$\pi_{\mathcal{A}}$ は q 形式である。これより、

$$\frac{\partial H}{\partial \phi^{\mathcal{A}}} = -\frac{\partial L}{\partial \phi^{\mathcal{A}}}, \quad \frac{\partial H}{\partial \pi_{\mathcal{A}}} = (-1)^{(p+1)q} d\phi^{\mathcal{A}} \tag{3.3}$$

を得る。オイラー・ラグランジュ方程式 (1.21) を代入して、正準方程式

$$d\phi^{\mathcal{A}} = (-1)^{(p+1)q} \frac{\partial H}{\partial \pi_{\mathcal{A}}}, \tag{3.4}$$

$$d\pi_{\mathcal{A}} = -(-1)^{p} \frac{\partial H}{\partial \phi^{\mathcal{A}}} \tag{3.5}$$

を得る。

3.2 2 重共変解析力学

この節では [2] で提案された 2 重共変解析力学を解説する。

Hamilton form を今度は、

$$H(\phi, \pi) := D\phi^{\mathcal{A}} \wedge \pi_{\mathcal{A}} - L(\phi, D\phi) \tag{3.6}$$

で定義する。H の変分は、

$$\begin{aligned}\delta H &= \delta D\phi^{\mathcal{A}} \wedge \pi_{\mathcal{A}} + D\phi^{\mathcal{A}} \wedge \delta\pi_{\mathcal{A}} - \delta\phi^{\mathcal{A}} \wedge \frac{\partial L}{\partial \phi^{\mathcal{A}}} - \delta D\phi^{\mathcal{A}} \wedge \frac{\partial L}{\partial D\phi^{\mathcal{A}}} \\ &= (-1)^{(p+1)q}\delta\pi_{\mathcal{A}} \wedge D\phi^{\mathcal{A}} - \delta\phi^{\mathcal{A}} \wedge \frac{\partial L}{\partial \phi^{\mathcal{A}}} \end{aligned} \tag{3.7}$$

となる。よって、

$$\frac{\partial H}{\partial \phi^{\mathcal{A}}} = -\frac{\partial L}{\partial \phi^{\mathcal{A}}}, \quad \frac{\partial H}{\partial \pi_{\mathcal{A}}} = (-1)^{(p+1)q} D\phi^{\mathcal{A}} \tag{3.8}$$

を得る。(2.3) を (3.8) に代入して、

$$D\phi^{\mathcal{A}} = (-1)^{(p+1)q} \frac{\partial H}{\partial \pi_{\mathcal{A}}}, \tag{3.9}$$

$$D\pi_{\mathcal{A}} = -(-1)^{p} \frac{\partial H}{\partial \phi^{\mathcal{A}}} \tag{3.10}$$

を得る。これが 2 重共変解析力学の正準方程式である。

References

[1] 中嶋慧, 松尾衛『一般ゲージ理論と共変解析力学』(現代数学社, 2020 年).

[2] L. Castellani and A. D'Adda, "Covariant Hamiltonian for gravity coupled to p-forms", Phys. Rev. D **101**, 025015 (2020). [arXiv:1906.11852v2]