複素ガウス積分

中嶋慧

2025 年 7 月 31 日

1　複素ガウス積分

$z = (z_1, z_2, \cdots, z_N)^T$ とする。T は転置であり、z_i は複素数である。A を N 次の複素正方行列とする。A はエルミート行列とは限らない。b, c を N 次元の列ベクトルとする。このとき、

$$I := \int d^{2N}z \ \exp\Big(-z^\dagger A z + b^\dagger z + z^\dagger c\Big) = \frac{\pi^N}{\det A}\exp(b^\dagger A^{-1}c) \tag{1.1}$$

を示す。† はエルミート共役であり、

$$\int d^{2N}z = \prod_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} d(\mathrm{Re}\, z_i)\int_{-\infty}^{\infty} d(\mathrm{Im}\, z_i)$$

である。Re は実部, Im は虚部を表す。ただし、

$$A + A^\dagger > 0 \tag{1.2}$$

を仮定した[1)] 。

まず、後で示すように、

$$\int d^2z \ \exp(-az^*z) = \frac{\pi}{a} \quad (\mathrm{Re}\, a > 0) \tag{1.3}$$

である。これから、

$$\int d^{2N}z \ \exp\Big(-z^\dagger A z\Big) = \frac{\pi^N}{\det A} \tag{1.4}$$

が以下のように得られる。ユニタリー変換 $z = Uw$ で、$A' := U^\dagger A U$ を上三角行列にできる。このとき、

$$\begin{aligned}
z^\dagger A z &= w^\dagger A' w \\
&= \sum_{i,j=1}^{N} w_i^*(A')_{ij}w_j \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} w_i^*(A')_{ij}w_j \\
&= w_1^*(A')_{11}w_1 + w_1^*(A')_{12}w_2 + \cdots + w_1^*(A')_{1N}w_N \\
&\quad + w_2^*(A')_{22}w_2 + w_2^*(A')_{13}w_3 + \cdots + w_2^*(A')_{2N}w_N \\
&\quad + \cdots + w_N^*(A')_{NN}w_N
\end{aligned} \tag{1.5}$$

[1)] この仮定より、

$$\frac{1}{2}v^\dagger(A + A^\dagger)v = \mathrm{Re}(v^\dagger A v) > 0$$

である。A として v の固有状態を取ると、上式より対応する固有値の実部は正である。

である。まず w_1, w_1^* の積分を実行する。上式は、

$$z^\dagger A z = w_1^* (A')_{11} w_1 - w_1^* c_1 + d_1 \tag{1.6}$$

と書ける。c_1 は w_1 について定数で、d_1 は w_1, w_1^* について定数である。よって、

$$\begin{aligned}\int d^2 w_1 \ \exp(-w_1^*(A')_{11} w_1 + w_1^* c_1 - d_1) &= \int_C dx \int_C dy \ \exp(-w_1^*(A')_{11} w_1 + w_1^* c_1 - d_1) \\ &= \int_{C_R} dx \int_{C_I} dy \ \exp(-w_1^*(A')_{11} w_1 + w_1^* c_1 - d_1)\end{aligned} \tag{1.7}$$

を考える。ここで x, y は w_1 の実部と虚部であり、C は実軸である。C_R, C_I はそれぞれ C と平行である。いま、α, β を複素数の定数とし、

$$x' := x + \alpha, \tag{1.8}$$

$$y' := y + \beta \tag{1.9}$$

とすると、

$$\int_{C_R} dx \int_{C_I} dy \ \exp(-w_1^*(A')_{11} w_1 + w_1^* c_1 - d_1) = \int_C dx' \int_C dy' \ \exp(-w_1^*(A')_{11} w_1 + w_1^* c_1 - d_1) \tag{1.10}$$

とできる。さて、上の変数変換 $x \to x'$, $y \to y'$ に伴い、

$$w_1 \to w_1' := w_1 + (\alpha + i\beta), \quad w_1^* \to w_1^{*\prime} := w_1^* + (\alpha - i\beta) \tag{1.11}$$

となる。すなわち、γ, δ を任意の複素数とするとき、変数変換

$$w_1 \to w_1' := w_1 + \gamma, \quad w_1^* \to w_1^{*\prime} := w_1^* + \delta \tag{1.12}$$

をしたことになる。さて、

$$-w_1^*(A')_{11} w_1 + w_1^* c_1 = -\Big[w_1^* - \frac{c_1}{(A')_{11}}\Big](A')_{11} w_1 \tag{1.13}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\int d^2 w_1 \ \exp(-w_1^*(A')_{11} w_1 + w_1^* c_1 - d_1) &= \int d^2 w_1 \ \exp(-w_1^*(A')_{11} w_1 - d_1) \\ &= \frac{\pi}{(A')_{11}} e^{-d_1}\end{aligned} \tag{1.14}$$

となる。w_2, w_2^* の積分も同様に実行し、

$$\int d^2 w_2 \ e^{-d_1} = \frac{\pi}{(A')_{22}} e^{-d_2} \tag{1.15}$$

のようになる。従って、

$$\begin{aligned}\int d^{2N} z \ \exp\Big(-z^\dagger A z\Big) &= \frac{\pi^N}{(A')_{11}(A')_{22}\cdots(A')_{NN}} \\ &= \frac{\pi^N}{\det A'} \\ &= \frac{\pi^N}{\det A}\end{aligned} \tag{1.16}$$

となる。

　さて、

$$
\begin{aligned}
I &= \int d^{2N}z \ \exp\Big(- z^\dagger A z + b^\dagger z + z^\dagger c \Big) \\
&= \int d^{2N}z \ \exp\Big(- \Big[z^\dagger - b^\dagger A^{-1} \Big] A \Big[z - A^{-1}c \Big] + b^\dagger A^{-1} c \Big)
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

である。変数変換

$$
z \to z' := z - A^{-1}c, \quad z^\dagger \to z^{\dagger\prime} := z^\dagger - b^\dagger A^{-1} \tag{1.18}
$$

をすると、

$$
\begin{aligned}
I &= \int d^{2N}z \ \exp\Big(- z^\dagger A z + b^\dagger A^{-1} c \Big) \\
&= \frac{\pi^N}{\det A} \exp\Big(b^\dagger A^{-1} c \Big)
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

を得る。

　最後に、(1.3) を示す。(1.3) は、

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dx \ \exp(-ax^2) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\mathrm{Re}\, a > 0) \tag{1.20}
$$

から直ちに得られるので、これを示す。これは、

$$
\int_0^{\infty} dx \ \exp(-ax^2) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{|a|}} e^{-i\phi/2} \tag{1.21}
$$

と等価である。ここで、

$$
a = |a| e^{i\phi}, \quad -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2} \tag{1.22}
$$

とした。いま、C_1 を原点から始まり、$e^{-i\phi/2}$ の方向に伸びる直線とすると、

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} dx \ \exp(-ax^2) &= \int_{C_1} dz \ \exp(-az^2) \\
&= e^{-i\phi/2} \int_0^{\infty} dx \ \exp(-|a|x^2) \\
&= e^{-i\phi/2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{|a|}}
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

であるから、(1.20) が示された。