# 共変解析力学のレビュー

中嶋 慧

July 9, 2023

**Abstract**

共変解析力学は、「微分形式の微分形式による微分」という方法を用いて、微分形式のみによって定式化された解析力学であり、時間と空間を平等に扱い、座標系に依らない定式化である (微分形式は座標系に依らないので)。通常の解析力学では、電磁場やゲージ場, 重力場は拘束系となるが、共変解析力学では非拘束系となる。また、ゲージ固定は不要であり、ゲージに依らない定式化が可能である。「微分形式の微分形式による微分」を使ってポアソン括弧が定義出来る。また、シンプレクティック構造や正準変換, ゲージ変換の生成子についても議論する。

# Contents

# 1　導入

## 1.1　共変解析力学の特徴

通常の解析力学では、ラグランジアン密度 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$(これには $\sqrt{-g}$ も含まれるとする) をテンソルの成分 $\psi_{\mu_1 \ldots \mu_p}$ で変分する。また、共役運動量は、$\boldsymbol{\pi}^{\mu_1 \cdots \mu_p} = \partial \boldsymbol{\mathcal{L}} / \partial(\partial_0 \psi_{\mu_1 \ldots \mu_p})$ であり、時間を特別扱いしている。電磁場では、$\boldsymbol{\pi}^0 = \partial \boldsymbol{\mathcal{L}} / \partial(\partial_0 A_0) = 0$ であり、拘束系となる。その結果、ゲージ固定やディラック括弧の使用が必要となる。通常の解析力学には、

- 時間と空間が平等でない。
- 電磁場やゲージ場, 重力場は拘束系となり、ゲージ固定が必要。

という問題がある。

共変解析力学は、この 2 つの問題を解決する。すなわち、共変解析力学は、「微分形式の微分形式による微分」を用いて、微分形式のみによって定式化された解析力学であり、時間と空間を平等に扱う。電磁場やゲージ場, 重力場は、共変解析力学では非拘束系となる。よって、ゲージ固定は不要であり、ゲージに依らない定式化が可能である。

共役運動量として、$\partial \boldsymbol{\mathcal{L}} / \partial(\partial_0 \psi_{\mu_1 \ldots \mu_p})$ だけでなく、$\partial \boldsymbol{\mathcal{L}} / \partial(\partial_i \psi_{\mu_1 \ldots \mu_p})$ も一緒に考えた $\boldsymbol{\pi}^{\mu, \mu_1 \cdots \mu_p} = \partial \boldsymbol{\mathcal{L}} / \partial(\partial_\mu \psi_{\mu_1 \ldots \mu_p})$ を使うのが、De Donder-Weyl 理論 (1930, 1934 年)[1, 2] である。運動方程式レベルでは、共変解析力学は De Donder-Weyl 理論を修正したものと等価であることを示す事が出来る [20]。しかし、ポアソン括弧レベルでは、微分形式を基本変数とした共変解析力学と、テンソルの成分を基本変数とした De Donder-Weyl 理論とは等価ではない。

## 1.2　歴史

「微分形式の微分形式による微分」という概念は、一般相対論の業界で、遅くても 1970 年ごろから使われている [3, 4, 5, 7]。[8] において初めて、正準形式が登場した。[8, 9, 10, 11] では、重力および超重力の 1 階形式での共変解析力学が研究された。中村匡は、2002 年、物性研究の解説記事「微分形式で見た電磁気学： あるいは 2+1 次元人の電磁気学と時空平等解析力学について」[12] において、共変解析力学を再発見し、電磁場に適用した。独立に J. M. Nester は 2004 年に [13]、電磁場と非可換ゲージ場の正準形式を扱った。Nester は 1991 年 [14] から重力場 (1 階形式) に対して、正準形式に似た形式のものを使っていたが、Hamiltion form に当たるものは Lagrangian form のルジャンドル変換ではなく、手で与えていた。神長 [15] は、中村の論文を発展させ、Nester と独立に、質点系, スカラー場, 電磁場, 非可換ゲージ場, 重力場 (2 階形式) を扱った。ただし、重力場はディラック場と結合していなかった。ディラック場 [19, 20] およびディラック場と結合した重力場は [19, 28, 29, 30] で研究された。論文 [15, 19] では、重力場の正準方程式は、4 次元でのみ導出されたが、本論文では任意の次元での導出を与える [28, 29, 30]。この導出は 4 次元特化のものよりずっと見通しが良く、計算量も数分の一となる。

神長は、論文 [21] でポアソン括弧を定式化した。なお、ポアソン括弧は [8] でも提案されていたが、それはポアソン括弧の性質を公理として与えるものであった。[27] において、[8] のポアソン括弧の「微分形式の微分形式による微分」による定式化が行われた。これは神長のものと等価である。本論文では、ポアソン括弧をレビューし、共変解析力学の正準変換についても報告する。また、共変解析力学におけるゲージ変換の生成子 [28, 30] についても解説する。

## 1.3 本論文について

本論文は、神長の論文 [15, 21] と著者の論文 [19, 20, 28, 30] をまとめたものである。第 2 章では、共変解析力学の一般論を解説した後、質点系, 電磁場および非可換ゲージ場への応用について解説する。§2.6(論文 [20] を基にした) では、共変解析力学と De Donder-Weyl 理論との関係を解説する。第 3 章では、重力場について議論する [28]。第 4 章では、論文 [21] を要約し、正準変換について議論する。第 5 章では、共変解析力学におけるゲージ変換の生成子 [28, 30] を議論する。付録 A には、有用な公式をまとめた。付録 B では、フレーム形式による微分の計算に便利な公式を導出する。付録 C では、重力場のラグランジアン形式を書き換える。付録 E では、捩率についての関係式を証明する。付録 F では、2 階形式の重力場で捩率が 0 と要請した場合の共変解析力学を議論する。付録 G では、論文 [20] を基にディラック場を扱う。付録 H では、プレ・シンプレクティック形式と、I. V. Kanatchikov[2] の polysymplectic form および第 4 章のメタ・シンプレクティック形式との類似性を議論する。付録 I では、[2] を参考に、De Donder-Weyl 理論のポアソン括弧を議論する。

なお、共変解析力学の基本的な部分は本 [29] として出版されている。

# 2　共変解析力学

## 2.1　微分形式の微分形式による微分

$d$ 次元空間を考える。微分 $p$ 形式 $\beta$ $(p=0,1,\cdots,d)$ が微分形式の組 $\{\alpha^i\}_{i=1,\cdots,k}$ で表されていると仮定する。もし変分 $\delta\alpha^i$ の下で $\beta$ の変分が

$$\delta\beta = \delta\alpha^i \wedge \omega_i \tag{2.1}$$

のように書けるとき、$\omega_i$ を $\beta$ の $\alpha^i$ による**微分**と言い、

$$\frac{\partial\beta}{\partial\alpha^i} \stackrel{\text{def}}{=} \omega_i \tag{2.2}$$

と書く。すなわち、

$$\delta\beta \equiv \delta\alpha^i \wedge \frac{\partial\beta}{\partial\alpha^i}. \tag{2.3}$$

$\alpha^i$ が $q_i$ 形式なら、0 でない $\partial\beta/\partial\alpha^i$ は $(p-q_i)$ 形式 (ただし、$q_i \leq p$) である。$\beta$ が $\alpha^i$ に依らないとき、$q_i > p$ でも $\partial\beta/\partial\alpha^i = 0$ である。

## 2.2　一般論

以下、$d$ 時空を考える。伝統的な解析力学は、ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ から始めるが、共変解析力学は *Lagrangian d-form* $L$ から始める。$L$ は、

$$L = \mathcal{L}\eta \tag{2.4}$$

とも書ける。ここで、$\eta$ は体積形式で、

$$\eta = *1 \tag{2.5}$$

と書ける。ホッジ双対 $*$ は、任意の $p$ 形式 $\omega = \omega_{\mu_1\cdots\mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$ $(p=0,1,\cdots,d)$ を $d-p=r$ 形式

$$*\omega = \frac{1}{r!} E^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_r} \omega_{\mu_1\cdots\mu_p} dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_r} \tag{2.6}$$

に移す。ここで、$E_{\mu_1\cdots\mu_d}$ は完全反対称で、$E_{01\cdots d-1} = \sqrt{\sigma g}$ $(g = \mathrm{det} g_{\mu\nu}$, $\sigma$ は $g$ の符号) である。添え字の上げ下げは、計量 $g_{\mu\nu}$ とその逆 $g^{\mu\nu}$ で行った。また、

$$**\omega = \sigma(-1)^{p(d-p)}\omega \tag{2.7}$$

が成り立つ。§2.3 では $\sigma = 1$ とし、それ以外では $\sigma = -1$ とする。$L$ は $\psi$ と $d\psi$ で表されるとする：

$$L = L(\psi, d\psi). \tag{2.8}$$

ここで、$\psi$ は微分形式の組である。以下、簡単のため、$\psi$ は 1 つの $p$ 形式とするが、複数の場合への拡張は自明である。$L$ の変分は、

$$\delta L = \delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial \psi} + \delta d\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\psi} \tag{2.9}$$

で与えられる。右辺第 2 項は、

$$\delta d\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\psi} = d\Big(\delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\psi}\Big) - (-1)^p \delta\psi \wedge d\frac{\partial L}{\partial d\psi} \tag{2.10}$$

と書けるので、

$$\delta L = \delta\psi \wedge \Big(\frac{\partial L}{\partial \psi} - (-1)^p d\frac{\partial L}{\partial d\psi}\Big) + d\Big(\delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\psi}\Big) \tag{2.11}$$

を得る。**Euler-Lagrange 方程式**は、

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - (-1)^p d\frac{\partial L}{\partial d\psi} = 0 \tag{2.12}$$

である。

**共役形式** $\pi$ を

$$\pi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial d\psi} \tag{2.13}$$

で定義する[1)]。$\pi$ は、$d-p-1=q$ 形式である。 *Hamilton d-form* (($d-1$) 形式ではない) を

$$H = H(\psi, \pi) \stackrel{\text{def}}{=} d\psi \wedge \pi - L \tag{2.14}$$

で定義する。$H$ は $\psi$ と $\pi$ で表される[2)]。$H$ の変分は、

$$\delta H = (-1)^{(p+1)q} \delta\pi \wedge d\psi - \delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial \psi} \tag{2.15}$$

で与えられる。これより、

$$\frac{\partial H}{\partial \psi} = -\frac{\partial L}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial H}{\partial \pi} = (-1)^{(p+1)q} d\psi \tag{2.16}$$

を得る。Euler-Lagrange 方程式 (2.12) を代入して、**正準方程式** [15]

$$d\psi = (-1)^{(p+1)q}\frac{\partial H}{\partial \pi}, \quad d\pi = -(-1)^p \frac{\partial H}{\partial \psi} \tag{2.17}$$

を得る。

§4 で定義される**ポアソン括弧**を使うと、正準方程式は、

$$d\psi = -\{H, \psi\}, \quad d\pi = -\{H, \pi\} \tag{2.18}$$

---

1) これに対して、$\psi$ を位置形式と呼ぶ事にする。

2) $*\pi$ は $d\psi$ と同じ $(p+1)$ 形式である。電磁場の場合は、1 形式 $A$ の共役形式 $\pi$ は $(d-2)$ 形式で、$dA = *\pi$ となる (§2.4)。

と書ける。基本ポアソン括弧は、

$$\{\psi, \pi\} = (-1)^{dp}, \quad \{\pi, \psi\} = -1, \quad \{\psi, \psi\} = 0 = \{\pi, \pi\} \tag{2.19}$$

である。また、$F$ の $\psi, \pi$ での微分が存在するとき、

$$\begin{aligned} dF &= d\psi \wedge \frac{\partial F}{\partial \psi} + d\pi \wedge \frac{\partial F}{\partial \pi} \\ &= (-1)^{(p+1)q} \frac{\partial H}{\partial \pi} \wedge \frac{\partial F}{\partial \psi} - (-1)^p \frac{\partial H}{\partial \psi} \wedge \frac{\partial F}{\partial \pi} \\ &= -\{H, F\} \end{aligned} \tag{2.20}$$

と書ける。

## 2.3 質点系

この節では、計量の行列式の符号 $\sigma$ は 1 とする。質点系は、$d = 1$ の場合の場の解析力学とみなせる。質点の位置 $q$ は、0 形式で、1 次元時空 (時間 $t$) 上の場である。ラグランジアン形式 1 形式は、

$$L = \frac{m}{2} dq \wedge *dq - *V(q) \tag{2.21}$$

である。$V(q)$ はポテンシャルで、0 形式である。また、$dq = \frac{dq}{dt} dt$ である。$L$ の変分は、

$$\delta L = m \delta dq \wedge *dq - \delta q \wedge * \frac{\partial V(q)}{\partial q} \tag{2.22}$$

なので、

$$\frac{\partial L}{\partial q} = - * \frac{\partial V(q)}{\partial q}, \quad \frac{\partial L}{\partial dq} = m * dq \tag{2.23}$$

であり、Euler-Lagrange 方程式 $\frac{\partial L}{\partial q} - d \frac{\partial L}{\partial dq} = 0$ は、

$$md * dq + * \frac{\partial V(q)}{\partial q} = 0 \tag{2.24}$$

となる。

共役形式は、$p = m * dq$ である (0 形式。 $dq = \frac{1}{m} * p$)。Hamilton 1-form $H = dq \wedge p - L$ は、

$$H = \frac{1}{2m} p \wedge *p + *V(q) \tag{2.25}$$

となる[3)]。微分は、

$$\frac{\partial H}{\partial q} = * \frac{\partial V(q)}{\partial q}, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{m} * p \tag{2.26}$$

となる。正準方程式 $dq = \frac{\partial H}{\partial p}$ と $dp = -\frac{\partial H}{\partial q}$ は、

$$dq = \frac{1}{m} * p, \quad dp = - * \frac{\partial V(q)}{\partial q} \tag{2.27}$$

となる。

---

[3)] 質点系の場合は特殊で、Hamilton 1-form は Hamiltonian(0 形式) に体積形式 (1 形式) をかけたものとなる。

## 2.4 電磁場

電磁場のラグランジアン形式は、

$$L = L(A, dA) = -\frac{1}{2}F \wedge *F + A \wedge J = \mathcal{L}\eta \tag{2.28}$$

で与えられる。ここで、$A = A_\mu dx^\mu$, $J = *(J_\mu dx^\mu)$ および $F = dA = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ である ($F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$). $J^\mu$ は電流密度であり、 $A_\mu$ と独立とする。微分は、

$$\frac{\partial L}{\partial A} = J, \quad \frac{\partial L}{\partial dA} = - * F \tag{2.29}$$

となる。ただし、$\delta * F = *\delta F$ を用いた。Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial A} + d\frac{\partial L}{\partial dA} = 0 \tag{2.30}$$

は、

$$d * F = J \tag{2.31}$$

となる。これと恒等式 $dF = 0$ が Maxwell 方程式である。

通常の解析力学がテンソルの成分 $A_\mu$ を基本変数とするのに対して、共変解析力学の基本変数は微分形式 $A = A_\mu dx^\mu$ である[4)]。

1 形式 $A$ の共役形式 $\pi$ は

$$\pi = - * F \tag{2.32}$$

である。これは、$dA$ を

$$dA = *\pi \tag{2.33}$$

のように表す事が出来る。電磁場は、共変解析力学では拘束系ではない。よって、**ゲージ固定もディラック理論も不要である。**

位置形式は 1 形式で $f$ 成分を持つが、共役形式は $(f-2)$ 形式で $d(d-1)/2$ 成分を持つ。

Hamilton form は、

$$H(A, \pi) = \frac{1}{2}\pi \wedge *\pi - A \wedge J \tag{2.34}$$

で与えられる[5)] 。微分は、

$$\frac{\partial H}{\partial A} = -J, \quad \frac{\partial H}{\partial \pi} = *\pi \tag{2.35}$$

となる。正準方程式

$$dA = \frac{\partial H}{\partial \pi}, \quad d\pi = \frac{\partial H}{\partial A} \tag{2.36}$$

は、

$$dA = *\pi, \quad d\pi = -J \tag{2.37}$$

となる。前者は、共役形式の定義と等価である。後者はマクスウェル方程式 (オイラー・ラグランジュ方程式と等価) である。

---

4) 微分形式が実体だと思う。

5) これは解析力学のハミルトニアン密度 (これは正準エネルギー・運動量テンソルの $(0,0)$ 成分である) に体積形式をかけたものではない。

## 2.5　非可換ゲージ場

物質場を表す微分形式の組 $\{\psi^A\}$ が線形リー群をなす変換 (大域的変換)

$$\psi'^A = [\boldsymbol{T}(\varepsilon)]^A{}_B\psi^B \tag{2.38}$$

を受けるとき、物質のラグランジアン形式 $L_{\mathrm{mat}}(\psi^A, d\psi^A)$ が不変とする。ここで、$\varepsilon = \{\varepsilon^r\}_{r=1,\cdots,n}$ は連続パラメーター組で、$\varepsilon = 0$ が恒等変換になるものとする。$\varepsilon^r$ を任意の関数 $\varepsilon^r(x)$ に置き換えた時、局所的変換

$$\psi'^A = [\boldsymbol{T}(\varepsilon(x))]^A{}_B\psi^B \tag{2.39}$$

で、場のラグランジアン形式を不変にするためには、次にようにすれば良い [17, 16]。上の変換で、$\varepsilon^r(x)$ が微小とした場合、

$$\delta\psi^A = \varepsilon^r(x)(\boldsymbol{G}_r)^A{}_B\psi^B \tag{2.40}$$

である。ただし、

$$\boldsymbol{G}_r \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left.\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \varepsilon^r}\right|_{\varepsilon=0} \tag{2.41}$$

である。これは、

$$[\boldsymbol{G}_r, \boldsymbol{G}_s] = f^a{}_{rs}\boldsymbol{G}_a \tag{2.42}$$

を満たす。$f^a{}_{rs}$ はリー群の構造定数である。共変微分 $D\psi$ を

$$(D\psi)^A \stackrel{\mathrm{def}}{=} d\psi^A + A^r(\boldsymbol{G}_r)^A{}_B \wedge \psi^B \tag{2.43}$$

で導入する。ただし、ゲージ場 $A^r$ は 1 形式で、以下の変換則 (ゲージ変換) に従う：

$$\delta A^r = \varepsilon^s f^r{}_{st}A^t - d\varepsilon^r. \tag{2.44}$$

この時、共変微分 $(D\psi)^A$ は $\psi^A$ と同じ変換則

$$\delta(D\psi)^A = \varepsilon^r(x)(\boldsymbol{G}_r)^A{}_B(D\psi)^B \tag{2.45}$$

に従う。物質のラグランジアン形式で、微分 $d$ を共変微分 $D$ に置き換えた $L_{\mathrm{mat}}(\psi^A, (D\psi)^A)$ は、局所的変換 (2.39) の下で不変である [17, 29]。なお、物質場との結合の強さ $g$ を明記して、$A^r$ の部分を $gA^r$ と書く事も多い。

ゲージ場の強さ (曲率) は、

$$F^r \stackrel{\mathrm{def}}{=} dA^r + \frac{1}{2}f^r{}_{bc}A^b \wedge A^c \tag{2.46}$$

で定義される。変換則は、$\boldsymbol{T}(x) = \exp(\varepsilon^r(x)\boldsymbol{G}_r)$ のとき、

$$F'^r = (\exp \boldsymbol{e})^r{}_s F^s,\ (\boldsymbol{e})^r{}_s \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varepsilon^a f^r{}_{as} \tag{2.47}$$

である [17, 29]。Killing 形式と呼ばれる

$$\kappa_{rs} \stackrel{\text{def}}{=} -f^a{}_{rb} f^b{}_{sa} = \kappa_{sr} \tag{2.48}$$

を用いて、$F_r \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_{rs} F^s$ と定義すると、これは、

$$F'_r = F_s (\exp[-\boldsymbol{e}])^s{}_r \tag{2.49}$$

と変換する [17, 29]。変換の (線形) リー群 $G$ が半単純群なら、$\det(\kappa_{rs}) \neq 0$ であり、$\kappa_{rs}$ は逆を持つ。$G$ がコンパクト半単純群なら、パラメーター $\varepsilon^r$ を適当に変換することで、$\kappa_{rs} = \delta_{rs}$ と出来る。以下では、 $G$ はコンパクト半単純群とする。ゲージ場のラグランジアン形式 $L_{\text{gauge}}$ は、

$$L_{\text{gauge}} = -\frac{1}{2k} F^r \wedge *F_r \tag{2.50}$$

である[6] 。$k$ は正の定数である。$L_{\text{gauge}}$ はゲージ不変である。

ゲージ場がディラック場と結合した場合、$L_{\text{mat}}(\psi^A, (D\psi)^A) = L_{\text{mat}}(\psi^A, d\psi^A) + A^a \wedge J_a$ の形となる。$J_a$ はゲージ場には依存しない。以下、

$$L = -\frac{1}{2k} F^a \wedge *F_a + A^a \wedge J_a \tag{2.51}$$

を考える。これの微分は、

$$\frac{\partial L}{\partial A^a} = -\frac{1}{k} f^c{}_{ab} A^b \wedge *F_c + J_a\,, \quad \frac{\partial L}{\partial dA^a} = -\frac{1}{k} * F_a \tag{2.52}$$

である。Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial A^a} + d\frac{\partial L}{\partial dA^a} = 0 \tag{2.53}$$

は、

$$D * F_a \stackrel{\text{def}}{=} d * F_a + f^c{}_{ab} A^b \wedge *F_c = kJ_a \tag{2.54}$$

である。$D * F_a$ は共変微分である。これは Yang-Mills-Utiyama 方程式である。

共役形式 $\pi_a$ は、

$$\pi_a = -\frac{1}{k} * F_a \tag{2.55}$$

である。$\pi^a \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{k} * F^a$ とすると、Hamilton form は、

$$H = -\frac{1}{2} f^a{}_{bc} A^b \wedge A^c \wedge \pi_a + \frac{k}{2} \pi_a \wedge *\pi^a - A^a \wedge J_a \tag{2.56}$$

となる。微分は、

$$\frac{\partial H}{\partial A^a} = -f^c{}_{ab} A^b \wedge \pi_c - J_a\,, \quad \frac{\partial H}{\partial \pi_a} = k * \pi^a - \frac{1}{2} f^a{}_{bc} A^b \wedge A^c \tag{2.57}$$

[6] ローレンツ群は非コンパクト群である。接続 1 形式 $\omega^a{}_b$ は、ローレンツ群のゲージ場である [17, 29]。その曲率は (3.8) である。重力場のラグランジアン形式は、(2.50) の形とはならない。(3.11) は局所的 (内部) ローレンツ変換で不変である。

である。正準方程式

$$dA^a = \frac{\partial H}{\partial \pi_a}, \quad d\pi_a = \frac{\partial H}{\partial A^a} \tag{2.58}$$

は、

$$F^a = k * \pi^a, \quad D\pi_a \stackrel{\text{def}}{=} d\pi_a + f^c{}_{ab} A^b \wedge \pi_c = -J_a \tag{2.59}$$

となる。前者は、$\pi_a$ の定義と等価であり、後者は Yang-Mills-Utiyama 方程式と等価である。電磁場と同様に、**上の定式化はゲージ固定を必要としない**。

## 2.6 De Donder-Weyl 理論

共変解析力学は、修正された De Donder-Weyl(DW) 理論と等価である事を示す。ただし、これは正準方程式レベルでの話であり、ポアソン括弧レベルでは、微分形式と基本変数とする共変解析力学と、テンソルの成分を基本変数とする De Donder-Weyl 理論は等価ではない。

ラグランジアン密度は、$\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}$ と $\partial_\mu \psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}$ で表される：$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}, \partial_\mu \psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p})$. $A$ はテンソル添え字を含まないとする。$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p$ はテンソル添え字である。$p\ (= 0, 1, \cdots)$ は $A$ に依存してよい。The Euler-Lagrange 方程式は、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial \psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}} - \partial_\mu \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial \partial_\mu \psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}} = 0 \tag{2.60}$$

で与えられる。ただし、$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \sqrt{-g}\mathcal{L}$ である。共役場は、

$$\boldsymbol{\pi}_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial \partial_\mu \psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}} \tag{2.61}$$

および $\pi_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\pi}_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}/\sqrt{-g}$ で定義される。これらは、generalized momenta や polymomenta とも呼ばれる。$\pi_A^{0,\mu_1\cdots\mu_p}$ が通常の共役運動量である。DW Hamiltonian density は、

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\text{DW}}(\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}, \boldsymbol{\pi}_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}) \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu \psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p} \boldsymbol{\pi}_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p} - \boldsymbol{\mathcal{L}} \tag{2.62}$$

と $\mathcal{H}_{\text{DW}} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\text{DW}}/\sqrt{-g}$ で定義される。$\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\text{DW}}$ の変分は、

$$\delta \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\text{DW}} = \partial_\mu \psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p} \delta \boldsymbol{\pi}_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p} - \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial \psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}} \delta \psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p} \tag{2.63}$$

で与えられる。もし、$\boldsymbol{\pi}_A^{0,\mu_1\cdots\mu_p}, \cdots, \boldsymbol{\pi}_A^{d-1,\mu_1\cdots\mu_p}$ が互いに独立で (この仮定は一般に正しくない)、$\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}$ とも独立なら、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\text{DW}}}{\partial \psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial \psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\text{DW}}}{\partial \boldsymbol{\pi}_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}} = \partial_\mu \psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p} \tag{2.64}$$

を得る。(2.60) を代入して、De Donder-Weyl(DW) 方程式

$$\partial_\mu \psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p} = \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\text{DW}}}{\partial \boldsymbol{\pi}_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}}, \tag{2.65}$$

$$\partial_\mu \boldsymbol{\pi}_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p} = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\text{DW}}}{\partial \psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}} \tag{2.66}$$

を得る。

例として、電磁場を考える。Lagrangian density は、

$$\mathcal{L}(A_\nu, \partial_\mu A_\nu) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\nu J^\nu \tag{2.67}$$

で与えられる。$F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ である。ここで、$[\ ]$ は反対称化記号である。$A_\nu$ はベクトルポテンシャルで、$J^\nu$ は電流密度であり、 $A_\mu$ と独立とする。全ての添え字は、計量 $g_{\mu\nu}$ とその逆 $g^{\mu\nu}$ で上げ下げする。$A_\nu$ の共役場は、$\pi^{\mu,\nu} = -F^{\mu\nu} = -\pi^{\nu,\mu}$ である。DW Hamiltonian density は、$\mathcal{H}_{\mathrm{DW}}(A_\nu, \pi^{\mu,\nu}) = -\frac{1}{4}\pi_{\mu,\nu}\pi^{\mu,\nu} - A_\nu J^\nu$ である。これより、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{DW}}}{\partial \boldsymbol{\pi}^{\mu,\nu}} = -\frac{1}{2}\pi_{\mu,\nu}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{DW}}}{\partial A_\nu} = -\sqrt{-g}J^\nu \tag{2.68}$$

を得る。よって、DW 方程式は、

$$\partial_\mu A_\nu = -\frac{1}{2}\pi_{\mu,\nu}, \quad \partial_\mu \boldsymbol{\pi}^{\mu,\nu} = \sqrt{-g}J^\nu \tag{2.69}$$

を与え、後者は Maxwell 方程式 $\partial_\mu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = -\sqrt{-g}J^\nu$ と等価である。しかし、前者は正しくない。それは、$\pi^{\mu,\nu}$ が互いに独立と仮定したが、実際は $\pi^{\mu,\nu} = -\pi^{\nu,\mu}$ だからである。

共変解析力学では微分は $\partial_{[\mu}\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p]}$ の形でのみ含まれる。よって、その共役場 (2.61) は、

$$\boldsymbol{\pi}_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p} = \boldsymbol{\pi}_A^{[\mu,\mu_1\cdots\mu_p]} \tag{2.70}$$

を満たす。この条件を (2.63) で考え、(2.64) の第 2 式を修正し、修正 DW 方程式

$$\partial_{[\mu}\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p]} = \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{DW}}}{\partial \boldsymbol{\pi}_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}} \tag{2.71}$$

を得る。電磁場では、この方程式は、$\partial_{[\mu}A_{\nu]} = -\frac{1}{2}\pi_{\mu,\nu}$ となる。これは正しい。付録 I のポアソン括弧を使うと修正 DW 方程式 (2.71), (2.66) は、(2.18) の形に書ける。ただし、2 つのポアソン括弧は等価ではない。

以下では、共変解析力学の正準方程式が (2.71) と (2.66) に等しい事を示す。

さて、任意の $p$ 形式 $\omega = \omega_{\mu_1\cdots\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}$ と $\psi = \psi_{\mu_1\cdots\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}$ に対して、

$$\omega \wedge *\psi = p!\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}\psi^{\mu_1\cdots\mu_p}\eta \tag{2.72}$$

が成り立つ。今、$*^{-1}\omega \stackrel{\mathrm{def}}{=} -(-1)^{p(d-p)}*\omega$ とすると、$**^{-1}\omega = \omega$ である。よって、$\delta\psi^A\wedge\partial L/\partial\psi^A = \delta\psi^A\wedge*(*^{-1}\partial L/\partial\psi^A)$ である。今、$*^{-1}\partial L/\partial\psi^A = m_{A\mu_1\cdots\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}$ と置くと、

$$\delta\psi^A \wedge \frac{\partial L}{\partial\psi^A} = p!\delta\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}m_A^{\mu_1\cdots\mu_p}\eta \tag{2.73}$$

となる。ただし、

$$\psi^A = \psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p} \tag{2.74}$$

と置いた[7)]。一方、$\delta L$ は、

$$\delta L=\Big[\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial \psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}}\delta\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}+\boldsymbol{\pi}_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}\delta\partial_{[\mu}\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p]}\Big]\frac{\eta}{\sqrt{-g}} \tag{2.75}$$

で与えられるので、$m_A^{\mu_1\cdots\mu_p}=\frac{1}{p!}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}}$ を得る。これは、

$$\frac{\partial L}{\partial \psi^A}=\frac{1}{p!}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}}*dx_{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\mu_p} \tag{2.76}$$

を導く。ここで、$dx_\mu=g_{\mu\nu}dx^\nu$ である。同様にして、

$$*^{-1}\pi_A=\frac{1}{(p+1)!}\pi_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}dx_\mu\wedge dx_{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\mu_p}, \tag{2.77}$$

$$\begin{aligned}\pi_A&=\frac{1}{(p+1)!}\pi_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}*dx_\mu\wedge dx_{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\mu_p}\\&=\frac{1}{(p+1)!q!}\boldsymbol{\pi}_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}\frac{1}{\sqrt{-g}}E_{\mu\mu_1\cdots\mu_p\nu_1\cdots\nu_q}dx^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_q}\end{aligned} \tag{2.78}$$

を得る。これより、

$$d\pi_A=\frac{1}{(p+1)!}\partial_\lambda\boldsymbol{\pi}_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}\frac{1}{\sqrt{-g}}dx^\lambda\wedge*(dx_\mu\wedge dx_{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\mu_p}) \tag{2.79}$$

を得る。今、$e_{\mu\mu_1\cdots\mu_p}=*(dx_\mu\wedge dx_{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\mu_p})$ とすると、

$$dx^\lambda\wedge e_{\mu\mu_1\cdots\mu_p}=(-1)^p(p+1)\delta^\lambda_{[\mu}e_{\mu_1\cdots\mu_p]} \tag{2.80}$$

が成り立つ。よって、

$$d\pi_A=\frac{(-1)^p}{p!}\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\boldsymbol{\pi}_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}*dx_{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\mu_p} \tag{2.81}$$

を得る。(2.76) と (2.81) より、Euler-Lagrange 方程式 (2.12) は (2.60) と等価である。ところで、$d\psi^A\wedge\pi_A=\partial_{[\mu}\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p]}\pi_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}\eta=\partial_\mu\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}\pi_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}\eta$ が成り立つ。これは、

$$H=\mathcal{H}_{\mathrm{DW}}\eta=\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathbf{DW}}\frac{\eta}{\sqrt{-g}} \tag{2.82}$$

を意味する。これを使い、(2.76) と同様にして、

$$\frac{\partial H}{\partial\psi^A}=\frac{1}{p!}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{DW}}}{\partial\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}}*dx_{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\mu_p} \tag{2.83}$$

---

7)

$$\psi^A=\frac{1}{p!}\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}$$

と置いた場合と、$p=0,1$ では違いはない。

を得る。この式と (2.81) より、正準方程式 $d\pi_A = -(-1)^p \partial H/\partial\psi^A$ は DW 方程式 (2.66) と等価である。今、$\partial H/\partial\pi_A = l^A_{\mu\mu_1\cdots\mu_p} dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$ と置くと、

$$\delta\pi_A \wedge \frac{\partial H}{\partial\pi_A} = (-1)^{(p+1)q} \frac{\partial H}{\partial\pi_A} \wedge *(*^{-1}\delta\pi_A) = (-1)^{(p+1)q} \delta\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A l^A_{\mu\mu_1\cdots\mu_p} \frac{\eta}{\sqrt{-g}} \tag{2.84}$$

となり、$l^A_{\mu\mu_1\cdots\mu_p} = (-1)^{(p+1)q} \partial\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{DW}}/\partial\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A$ を得る。よって、

$$\frac{\partial H}{\partial\pi_A} = (-1)^{(p+1)q} \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{DW}}}{\partial\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A} dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots dx^{\mu_p} \tag{2.85}$$

である。これより、正準方程式 $d\psi^A = (-1)^{(p+1)q} \partial H/\partial\pi_A$ は DW 方程式 (2.71) と等価である。

# 3　重力場

この章では、共変解析力学を、$d$ 次元の重力場に適用する。この章を飛ばして、第 4 章を読むことも可能である。

この章を論文化したのが [28] である。

## 3.1　記号の準備

$g$ を符号 $(-+\cdots+)$ の計量とし、$\{\theta^a\}_{a=0}^{d-1}$ をフレーム 1 形式の組とする。$\theta^a$ を $\theta^a = \theta^a{}_\mu dx^\mu$ と展開した時の係数 $\theta^a{}_\mu$ は多脚場と呼ばれる。$\mathring{g}_{ab} = \mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1)$ という記号を用いて、計量テンソルは、$g = \mathring{g}_{ab}\theta^a \otimes \theta^b$ と書ける。

以下、ラテン添え字は、$\mathring{g}_{ab}$ とその逆 $\mathring{g}^{ab}$ で上げ下げする。

第 1 構造方程式

$$d\theta^a + \omega^a{}_b \wedge \theta^b = \Theta^a \tag{3.1}$$

が成り立つ。ここで、$\omega^a{}_b$ は接続 1 形式であり、

$$\Theta^a = \frac{1}{2} C^a{}_{bc} \theta^b \wedge \theta^c \tag{3.2}$$

は torsion 2 形式である。以下では、

$$\omega_{ba} = -\omega_{ab} \tag{3.3}$$

を仮定する。これは、計量の共変微分が 0 という意味である。$A^a{}_b$ を Levi-Cività 接続 (torsion がないとき接続) とする。この条件と (3.1) から、

$$\begin{aligned} &\omega_{abc} = A_{abc} + K_{abc}, \\ &A_{abc} = \frac{1}{2}(\Delta_{cba} + \Delta_{abc} + \Delta_{bca}), \quad K_{abc} = -\frac{1}{2}(C_{cba} + C_{abc} + C_{bca}) \end{aligned} \tag{3.4}$$

を得る。ここで、

$$d\theta^a = \frac{1}{2}\Delta^a{}_{bc}\theta^b \wedge \theta^c, \quad \omega_{ab} = \omega_{abc}\theta^c \tag{3.5}$$

と置いた。$A_{ab} = A_{abc}\theta^c$ が成り立つ。

また、

$$\omega_a \stackrel{\mathrm{def}}{=} \omega^b{}_{ab}, \quad C_a \stackrel{\mathrm{def}}{=} C^b{}_{ab} \tag{3.6}$$

と置く。

記号

$$\eta^a = *\theta^a,\ \eta^{ab} = *(\theta^a \wedge \theta^b),\ \eta^{abc} = *(\theta^a \wedge \theta^b \wedge \theta^c),\ \eta^{abcd} = *(\theta^a \wedge \theta^b \wedge \theta^c \wedge \theta^d) \tag{3.7}$$

を導入する。付録 A に、$\theta^a \wedge \eta_{a_1\cdots a_r}$ $(r=1,2,3,4)$ , $d\eta_{a_1\cdots a_r}$ $(r=1,2,3)$ および $\delta\eta_{a_1\cdots a_r}(r=0,1,2,3)$ についての公式を集めた。

曲率 2 形式 $\Omega^a{}_b$ は、

$$\Omega^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \tag{3.8}$$

で与えられる。これを、

$$\Omega^a{}_b = \frac{1}{2} R^a{}_{bcd}\theta^c \wedge \theta^d \tag{3.9}$$

と展開し、

$$R_{ab} \stackrel{\mathrm{def}}{=} R^c{}_{acb},\ R \stackrel{\mathrm{def}}{=} R^a{}_a \tag{3.10}$$

と置く。(A.5) より、$*R$ は、

$$*R = \Omega^{ab} \wedge \eta_{ab} \tag{3.11}$$

で与えられる。

## 3.2 ラグランジュ形式

### 3.2.1 重力場についての注意

2 階形式 (フレームのみが基本変数)[8] の重力のラグランジアン形式は、

$$L(\theta, d\theta) = L_{\mathrm{G}}(\theta, d\theta) + L_{\mathrm{mat}}(\theta, d\theta) \tag{3.12}$$

である。$L_{\mathrm{G}}$ は純重力の部分で、

$$L_{\mathrm{G}}(\theta, d\theta) = \frac{1}{2\kappa} W', \quad W' \stackrel{\mathrm{def}}{=} *R - d(\omega^{ab} \wedge \eta_{ab}) \tag{3.13}$$

であり[9] ($\kappa$ はアインシュタイン定数である)、$L_{\mathrm{mat}}(\theta, d\theta) = L_{\mathrm{mat}}(\theta, \omega(\theta, d\theta))$ は物質のそれである。本論文では、物質場としてスカラー場, 電磁場, ゲージ場, ディラック場を想定する。ディラック場のみが $\omega$ と結合する。

$\omega^a{}_b$ は (内部) ローレンツ群のゲージ場とみなせる [17, 29]。実際、ディラック場は、(G.1) のように、$\omega^a{}_b$ と結合し、これはゲージ的な結合 (つまり、(2.43) の仕方の結合) である。$\omega^a{}_b$ が § 5.4 の $A^r$ に、$\Omega^a{}_b$ が $F^r$ に対応する。ただし、ゲージ場の一般論 § 5.4 と異なり、$\omega^a{}_b$ は独立変数ではなく、フレーム $\theta^a$ の従属変数である。ゲージ場は、ホッジ作用素を通して、$\theta^a$ と $d * F_a$ の形で結合する。$d * F_a$ を成分で書くと、クリストッフェル記号が現れる。クリストッフェル記号は計量 $g_{\mu\nu}$ とその偏微分 $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ だけで書け、torsion は含まれない。ラグランジアン形式 (2.50) は重力とゲージ的には結合していない。ラグランジアンを微分形式で、一般座標不変に定式化

[8] これに対して、フレームと接続を基本変数とするのが 1 階形式である。1 階形式の正準形式は拘束系となる § 3.6。

[9] 第 2 項は $d\omega^a{}_b$ を除くために必要である。$d\omega^a{}_b$ は $\theta^a$ の 2 階微分を含むため、あると共変解析力学の一般論が使えない。高次曲率を含む理論は、共変解析力学 (2 階形式) では扱えない。

した瞬間、ゲージ場と $\theta^a$ との結合が自動的に含まれる。スカラー場でも事情は同様である。この意味で、重力場 $\omega^a{}_b$ はディラック場のために存在するとも言え、ディラック場のみが重力と真に結合している。

ゲージ場の一般論§5.4では、物質場のラグランジアンを局所的変換で不変にするために、ゲージ場が導入された。その意味で、物質場なくしてゲージ場はない。また、物質は (ヒッグス粒子以外は全て) ディラック場なのであるから、ディラック場を考えるのは非常に重要である。神長 [15] はディラック場を考えなかったが、著者はディラック場も考えた [19, 28] [10) ]。

### 3.2.2 Euler-Lagrange 方程式

$L$ の変分は、

$$\begin{aligned}\delta L(\theta, d\theta) = \delta\theta^c \wedge \left(\frac{1}{2\kappa}[\Omega^{ab} \wedge \eta_{abc} - d(\omega^{ab} \wedge \eta_{abc})] + T_c\right) + \delta d\theta^c \wedge \frac{1}{2\kappa}\omega^{ab} \wedge \eta_{abc} \\ + \delta\omega^{ab}(\theta, d\theta) \wedge \left(\frac{1}{2\kappa}[d\eta_{ab} - \omega^c{}_a \wedge \eta_{cb} - \omega^c{}_b \wedge \eta_{ac}] + \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial \omega^{ab}}\right)\end{aligned} \tag{3.14}$$

で与えられる[11)]。ここで、

$$T_a \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta, \omega)}{\partial \theta^a} \tag{3.15}$$

である。これをエネルギー・運動量形式という。これの具体的な計算の仕方は付録 D で解説する。今、

$$\frac{1}{2\kappa}[d\eta_{ab} - \omega^c{}_a \wedge \eta_{cb} - \omega^c{}_b \wedge \eta_{ac}] + \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial \omega^{ab}} = 0 \tag{3.16}$$

を仮定する。この式は、1 階形式の接続の Euler-Lagrange 方程式と同じである (1.5 階形式)。論文 [15] では Levi-Cività 接続 ($\omega^a{}_b = A^a{}_b$) が仮定されていたため、また、ディラック場を考えないので $\partial L_{\mathrm{mat}}/\partial\omega^{ab} = 0$ であるため、(3.16) は恒等式であった (cf.(A.12))。ディラック場を考えると、(3.16) は重要である。この仮定の下で、(3.14) より、

$$\frac{\partial L}{\partial \theta^c} = \frac{1}{2\kappa}[\Omega^{ab} \wedge \eta_{abc} - d(\omega^{ab} \wedge \eta_{abc})] + T_c\,, \quad \frac{\partial L}{\partial d\theta^c} = \frac{1}{2\kappa}\omega^{ab} \wedge \eta_{abc} \tag{3.17}$$

を得る。Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial \theta^c} + d\frac{\partial L}{\partial d\theta^c} = 0 \tag{3.18}$$

---

10) 神長のポアソン括弧の論文 [21] でも、ディラック場は想定されていない。ディラック場があるとディラック括弧が必要となる。

11) $\delta N' = \delta(\omega^a{}_c \wedge \omega^{cb} \wedge \eta_{ab} + \omega^{ab} \wedge d\eta_{ab})$ であり、

$$\omega^{ab} \wedge \delta d\eta_{ab} = \delta d\theta^c \wedge \omega^{ab} \wedge \eta_{abc} + \delta\theta^c \wedge \omega^{ab} \wedge d\eta_{abc}$$

となる。ここで、次の 3 式 ( § A.2) を用いた：

$$d\eta_{ab} = d\theta^c \wedge \eta_{abc}\,, \quad \delta\eta_{abc} = \delta\theta^d \wedge \eta_{abcd}\,, \quad d\eta_{abc} = d\theta^d \wedge \eta_{abcd}.$$

は、

$$-\frac{1}{2\kappa}\Omega^{ab}\wedge\eta_{abc}=T_c \tag{3.19}$$

となる。$T_c = T_c{}^b\eta_b$ と展開すると、上式は、アインシュタイン方程式

$$R^a{}_b-\frac{1}{2}R\delta^a_b=\kappa T_b{}^a \tag{3.20}$$

と等価である[12)] 。

### 3.2.3 重力場のラグランジアン形式についてのコメント

なお、(3.13) の $W'$ は、

$$W'=W^*+\mathcal{K},\quad \mathcal{K}\overset{\text{def}}{=}K^a{}_c\wedge K^{cb}\wedge\eta_{ab} \tag{3.21}$$

となる (付録 C)。ここで、$K_{ab}\overset{\text{def}}{=}K_{abc}\theta^c$ であり、$K_{abc}$ は (3.4) で与えられる。$W^*$ は、(3.34) の $W$ でスピン接続を Levi-Cività 接続としたものであり、

$$W^*=A^a{}_c\wedge A^{cb}\wedge\eta_{ba}=-A^a{}_c\wedge A^{cb}\wedge\eta_{ab} \tag{3.22}$$

である。$A^{ab}$ は Levi-Cività 接続である。$\mathcal{K}$ は $(-W^*)$ で、$A_{ab}$ を $K_{ab}$ に置き換えたものである。また、$-\frac{1}{2\kappa}\mathcal{K}$ は遠平行性理論[13)] でのラグランジアン形式である [24, 25]。

なお、$W^*/2$ は、

$$\frac{1}{2}W^*=-\frac{1}{2}d\theta^a\wedge\theta_b\wedge *(d\theta^b\wedge\theta_a)+\frac{1}{2}d\theta^a\wedge\theta_a\wedge *(d\theta^b\wedge\theta_b)$$

と書ける [5]。この表式は以下では使わないため、導出は省略する。

(3.21) より、

$$\frac{\partial L_{\mathrm{G}}}{\partial d\theta^c}=\frac{1}{2\kappa}A^{ab}\wedge\eta_{abc} \tag{3.23}$$

を得る。また、すぐ後の (3.26) を記号を用いて、

$$\frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial d\theta^c}=\eta^{ab}\Big(-\frac{1}{2}S_{c,ab}+S_{[a,b]c}\Big) \tag{3.24}$$

---

12)

$$\begin{aligned}\Omega^{ab}\wedge\eta_{abc} &= \frac{1}{2}R^{ab}{}_{de}\theta^d\wedge\theta^e\wedge\eta_{abc}\\ &= R^{ab}{}_{de}[(\delta^{[d}_b\delta^{e]}_c)\eta_a-(\delta^{[d}_a\delta^{e]}_c)\eta_b+(\delta^{[d}_a\delta^{e]}_b)\eta_c]\\ &= R^{ab}{}_{bc}\eta_a-R^{ab}{}_{ac}\eta_b+R^{ab}{}_{ab}\eta_c\\ &= (R\delta^b_c-2R^b{}_c)\eta_b.\end{aligned}$$

13)遠平行性理論では曲率テンソルが 0 であり、捩率は 0 でない。

なお、曲率テンソルも捩率も 0 でない時空をリーマン・カルタン時空 ($U_d$), 捩率が 0 で曲率テンソルは 0 でない時空をリーマン時空 ($V_d$), 曲率テンソルが 0 であり、捩率は 0 でない時空を Weitzenböck 時空 ($W_d$) という。なお、曲率テンソルも捩率も 0 の時空がミンコフスキー時空 ($M_d$) である。$U_d$ などの添え字 $d$ は時空の次元である。$U_d$ での重力理論をアインシュタイン・カルタン理論ということがある。

となる[14]。上式は、(3.30) を用いて、

$$\frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial d\theta^c} = \frac{1}{2\kappa} K^{ab} \wedge \eta_{abc} \tag{3.25}$$

に変形できる。

### 3.2.4 Torsion の決定

物質場のラグランジアンは、

$$L_{\mathrm{mat}} = L_0(\theta) + \omega^{ab} \wedge S_{ab}(\theta) \tag{3.26}$$

と書け、$S_{ab} = \eta^c S_{c,ab}$ である。$S_{c,ab}$ は $\theta^a$ に依らない。(3.16) と (A.12) より、

$$\frac{1}{2\kappa}\Theta^c \wedge \eta_{abc} = -\frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial \omega^{ab}} = -\eta^c S_{c,ab}. \tag{3.27}$$

を得る。これより、

$$\frac{1}{2\kappa}[-C_a \mathring{g}_{cb} + C_{cab} + C_b \mathring{g}_{ca}] = -S_{c,ab} \tag{3.28}$$

を得る[15]。$C_{cab}$ は Dirac 場で表される。$c$ と $b$ とを縮約し、

$$\frac{1}{2\kappa} C_a = \frac{S_a}{d-2} \tag{3.29}$$

を得る。$d$ は次元で、$S_a \stackrel{\mathrm{def}}{=} S^b{}_{ab}$ である。これを (3.28) に代入して、

$$\frac{1}{2\kappa} C_{cab} = -S_{c,ab} + \frac{1}{d-2}[S_a \mathring{g}_{cb} - S_b \mathring{g}_{ca}] \tag{3.30}$$

を得る。

$L_{\mathrm{mat}}$ がディラック場を含まない (スカラー場, ゲージ場のみ) ならば、$S_{c,ab} = 0$ である。$L_{\mathrm{mat}}$ が、(G.1) の $L_{\mathrm{D}}^{\beta}$ のときは (さらにディラック場がゲージ場と結合していても同じ)、

$$S_{c,ab} = -\frac{1}{4}\bar{\psi}(\frac{1}{2}\gamma_c\gamma_{ab} + \frac{1}{2}\gamma_{ab}\gamma_c)\psi = -\frac{1}{4}\bar{\psi}\gamma_{abc}\psi \tag{3.31}$$

となる。ここで、$\gamma_{abc} = \gamma_{[a}\gamma_b\gamma_{c]}$ である。よって、

$$C_a = 0 \tag{3.32}$$

となる。付録 G で、torsion の影響 $C_a$ は消える。

---

[14] $S_{[a,b]c} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (S_{a,bc} - S_{b,ac})/2$ である。また、(3.24) は § F.6 で示す。

[15]

$$\begin{aligned}
\Theta^c \wedge \eta_{abc} &= \frac{1}{2} C^c{}_{de} \wedge \theta^d \wedge \theta^e \eta_{abc} \\
&= \frac{1}{2} C^c{}_{de}[(\delta^d_b \delta^e_c - \delta^d_c \delta^e_b)\eta_a - (\delta^d_a \delta^e_c - \delta^d_c \delta^e_a)\eta_b + (\delta^d_a \delta^e_b - \delta^d_b \delta^e_c)\eta_c] \\
&= C_b \eta_a - C_a \eta_b + C^c{}_{ab}\eta_c \\
&= \eta^c(\mathring{g}_{ac} C_b - \mathring{g}_{cb} C_a + C_{cab}).
\end{aligned}$$

## 3.3 正準形式

$W'$ は、

$$
\begin{aligned}
W' &= \omega^a{}_c \wedge \omega^{cb} \wedge \eta_{ab} + \omega^{ab} \wedge d\eta_{ab} \\
&= W + \Theta^a \wedge \omega^{bc} \wedge \eta_{abc}
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

とも書き換えられる。ここで、

$$
W \overset{\text{def}}{=} \omega^a{}_c \wedge \omega^{cb} \wedge \eta_{ba} \tag{3.34}
$$

であり、(A.12) を用いた。神長 [15] は、$L_\mathrm{G} = \frac{1}{2\kappa} W$ を用いた。ディラック場がない場合であったため、これは我々のものと等価である。ディラック場がある場合、$\frac{1}{2\kappa}W$ は適切ではない。第 1 構造方程式と (A.2) を使うと、$W$ は、

$$
W = d\theta^a \wedge \frac{1}{2}\omega^{bc} \wedge \eta_{abc} - \Theta^a \wedge \frac{1}{2}\omega^{bc} \wedge \eta_{abc} \tag{3.35}
$$

と書ける。

$\theta^a$ の共役形式は、

$$
\pi_a = \frac{1}{2\kappa}\omega^{bc} \wedge \eta_{abc} \tag{3.36}
$$

であり、Hamilton form は、

$$
H(\theta, \pi) = d\theta^a \wedge \pi_a - L = H_\mathrm{G}(\theta, \pi) - L_\mathrm{mat}(\theta, \pi) \tag{3.37}
$$

である。ただし、

$$
H_\mathrm{G}(\theta, \pi) = \frac{W}{2\kappa} \tag{3.38}
$$

である。ここで、(3.33) と (3.35) を用いた。$\Theta^a = 0$ のときは、$H_\mathrm{G} = L_\mathrm{G}$ となる[16] 。§ 3.4 で、$N$ を $\theta^a$ と $\pi_a$ で表し、変分を実行する。$C_{abc}$ はディラック場で表される。よって、これは $\theta^a$ および $\pi_a$ と独立である。$\Theta^a = \frac{1}{2}C^a{}_{bc}\theta^b \wedge \theta^c$ は $\pi_a$ と独立だが、$\theta^a$ にには依存する。

正準方程式は、

$$
d\theta^a = \frac{\partial H_\mathrm{G}}{\partial \pi_a} - \frac{\partial L_\mathrm{mat}}{\partial \pi_a}, \tag{3.39}
$$

$$
d\pi_a = \frac{\partial H_\mathrm{G}}{\partial \theta^a} - \frac{\partial L_\mathrm{mat}(\theta, \pi)}{\partial \theta^a} \tag{3.40}
$$

である。(3.39) の右辺第 2 項は、

$$
-\frac{\partial L_\mathrm{mat}}{\partial \pi_a} = -\frac{\partial}{\partial \pi_a}\Big[\omega^{bc} \wedge S_{bc}\Big] = \frac{\partial}{\partial \pi_a}[\Theta^b \wedge \pi_b] = \Theta^a \tag{3.41}
$$

[16] 電磁場では、$J = 0$ のとき、ラグランジアン形式と Hamilton form は一致する。これはラグランジアン形式が $dA$ の 2 次形式であったためである。$\Theta^a = 0$ のときは、重力場のラグランジアン形式は $d\theta^a$ の 2 次形式である。非可換ゲージ場では、ラグランジアン形式と Hamilton form は一致しない。つまり、重力場の共変解析力学は、非可換ではなく可換ゲージ場のそれと似ている。『物理学最前線 3』(共立出版, 1983 年) の中西 襄「重力場の量子論」では、重力場の BRS 量子化は、非可換ではなく可換ゲージ場のそれと似ている事が指摘されている。

となる。第 2 等号で、(3.27) から導かれる

$$\omega^{ab} \wedge S_{ab} = -\Theta^a \wedge \pi_a \tag{3.42}$$

を用いた。よって、(3.39) は、

$$d\theta^a = \frac{\partial H_\mathrm{G}}{\partial \pi_a} + \Theta^a \tag{3.43}$$

となる。§ 3.4 で、$\frac{\partial H_\mathrm{G}}{\partial \pi_a}$, $\frac{\partial H_\mathrm{G}}{\partial \theta^a}$, $\frac{\partial L_\mathrm{mat}(\theta,\pi)}{\partial \theta^a}$ を求める。

## 3.4 Hamilton form の変分

[15] では、4 次元でのみ重力場の変分が実行された。[19] も同じ方法を使っていた。そこでは、$\omega^{ab}$ を $\pi^a$ で表す方法として、4 次元でしか使えない方法を使っていた。具体的には、4 次元でのみ成立する $\eta_{abc} = \eta_{abcd}\theta^d$ と、同じく 4 次元でのみ成立する $\pi_a$ の展開式 $\pi_a = (\pi_{abc}/2)\theta^b \wedge \theta^c$ とを (5.29) に代入し、$\omega_{abc}$ を $\pi_{abc}$ と $\eta_{abcd}$ とで表していた。ここでは、$d$ 次元で使える方法を与える [28, 29, 30]。

### 3.4.1 $\pi_a$ での変分

(A.5) より、

$$W = (\omega_{abc}\omega^{bca} + \omega_a\omega^a)\eta \tag{3.44}$$

となる。$\omega_{abc}$ を $\pi_a$ で表す。

$$\Pi_c \overset{\mathrm{def}}{=} \kappa\pi_c = \frac{1}{2}\omega^{ab} \wedge \eta_{abc} \tag{3.45}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
\Pi_c \wedge \theta^a \wedge \theta^b &= \frac{1}{2}\omega^{de} \wedge \theta^a \wedge \theta^b \wedge \eta_{cde} \\
&= \frac{1}{2}\omega^{de} \wedge [(\delta^a_d\delta^b_e - \delta^a_e\delta^b_d)\eta_c - (\delta^a_c\delta^b_e - \delta^a_e\delta^b_c)\eta_d + (\delta^a_c\delta^b_d - \delta^a_d\delta^b_c)\eta_e] \\
&= \omega^{ab} \wedge \eta_c - \frac{1}{2}\delta^a_c\omega^{db} \wedge \eta_d + \frac{1}{2}\delta^b_c\omega^{da} \wedge \eta_d + \frac{1}{2}\delta^a_c\omega^{be} \wedge \eta_e - \frac{1}{2}\delta^b_c\omega^{ae} \wedge \eta_e \\
&= \omega^{ab} \wedge \eta_c - \delta^a_c\omega^{db} \wedge \eta_d + \delta^b_c\omega^{da} \wedge \eta_d \\
&= ({\omega^{ab}}_c - \delta^a_c\omega^b + \delta^b_c\omega^a)\eta
\end{aligned} \tag{3.46}$$

となる。(A.6) と (A.4) を使った。今、

$$\begin{aligned}
u_{c,ab} &\overset{\mathrm{def}}{=} - * (\Pi_c \wedge \theta_a \wedge \theta_b) \\
&= \omega_{abc} - \mathring{g}_{ac}\omega_b + \mathring{g}_{bc}\omega_a
\end{aligned} \tag{3.47}$$

と置く。$u_a \overset{\text{def}}{=} u^b{}_{ab}$ とすると、

$$\begin{aligned} u_a &= -\omega_a - \omega_a + d \cdot \omega_a = (d-2)\omega_a, && (3.48) \\ \omega_a &= \frac{u_a}{d-2} && (3.49) \end{aligned}$$

であり、

$$\omega_{abc} = u_{c,ab} + \frac{1}{d-2}(\mathring{g}_{ac}u_b - \mathring{g}_{bc}u_a). \tag{3.50}$$

まとめると、

$$\begin{aligned} \omega_{abc} &= \kappa\Big[v_{c,ab} + \frac{1}{d-2}(\mathring{g}_{ac}v_b - \mathring{g}_{bc}v_a)\Big], && (3.51) \\ v_{c,ab} &\overset{\text{def}}{=} - * V_{c,ab}\,, \quad V_{c,ab} \overset{\text{def}}{=} \pi_c \wedge \theta_a \wedge \theta_b && (3.52) \end{aligned}$$

となる。ここで、$v_a \overset{\text{def}}{=} v^b{}_{ab}$ である。
　次に、$\delta v_{c,ab}\eta$ を考える。$\xi$ を任意の $d$ 形式として、

$$\begin{aligned} \delta v_{c,ab}\xi &= -\delta v_{c,ab}\xi * \eta = -\delta v_{c,ab}\eta * \xi = (-\delta[v_{c,ab}\eta] + v_{c,ab}\delta\eta) * \xi \\ &= (-\delta V_{c,ab} + v_{c,ab}\delta\eta) * \xi && (3.53) \end{aligned}$$

であるから、

$$\delta v_{c,ab}\eta = \delta V_{c,ab} - v_{c,ab}\delta\eta \tag{3.54}$$

となる。$\pi_a$ だけの変分では、

$$\delta v_{c,ab}\eta = \delta\pi_c \wedge \theta_a \wedge \theta_b \tag{3.55}$$

である。
　よって、$H_{\mathrm{G}}$ の $\pi_a$ での変分は、

$$\begin{aligned} \delta H_{\mathrm{G}} &= \frac{1}{2\kappa}(\delta\omega_{abc}\omega^{bca} + \omega_{abc}\delta\omega^{bca} + 2\delta\omega_a\omega^a)\eta \\ &= \frac{1}{2}(\psi_{abc}\omega^{bca} + \psi^{bca}\omega_{abc}) + \psi_a\omega^a \\ &= \psi_{abc}\frac{\omega^{bca} + \omega^{cab}}{2} + \psi_a\omega^a \\ &= \psi_{abc}\omega^{c[ab]} + \psi_a\omega^a && (3.56) \end{aligned}$$

となる。ここで、$\psi_a \overset{\text{def}}{=} \psi^b{}_{ab}$ で、

$$\begin{aligned} \psi_{abc} &\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\kappa}\delta\omega_{abc}\eta \\ &= \delta\pi_c \wedge \theta_a \wedge \theta_b + \delta\pi_d \wedge \frac{1}{d-2}(\mathring{g}_{ac}\theta_b \wedge \theta^d - \mathring{g}_{bc}\theta_a \wedge \theta^d) && (3.57) \end{aligned}$$

である。これより、

$$\begin{aligned}\psi_a &= \delta\pi_c \wedge \theta^c \wedge \theta_a + \delta\pi_d \wedge \frac{1}{d-2}(d \cdot \theta_a \wedge \theta^d - \theta_a \wedge \theta^d) \\ &= \delta\pi_d \wedge \frac{1}{d-2}\theta_a \wedge \theta^d. \end{aligned} \tag{3.58}$$

また、

$$\begin{aligned}\psi_{abc}\omega^{c[ab]} &= \delta\pi_c \wedge \theta_a \wedge \theta_b\omega^{c[ab]} + \delta\pi_d \wedge \frac{1}{d-2}(\mathring{g}_{ac}\theta_b \wedge \theta^d - \mathring{g}_{bc}\theta_a \wedge \theta^d)\omega^{c[ab]} \\ &= \delta\pi_c \wedge \theta_a \wedge \theta_b\omega^{c[ab]} - \delta\pi_d \wedge \frac{1}{d-2}\theta_a \wedge \theta^d\omega^a \end{aligned} \tag{3.59}$$

なので、

$$\delta H_{\mathrm{G}} = \delta\pi_c \wedge \theta_a \wedge \theta_b\omega^{c[ab]}, \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_{\mathrm{G}}}{\partial \pi_c} &= \theta^a \wedge \theta^b\omega^c{}_{[ab]} \\ &= -\omega^c{}_a \wedge \theta^a \end{aligned} \tag{3.61}$$

となる。

### 3.4.2 $\theta^a$ での変分

(3.54) を用いて、$\theta^a$ での変分を実行することが出来る。しかし、ここでは付録 B より従う

$$\frac{\partial H_{\mathrm{G}}}{\partial \theta^a} = e_a \rfloor H_{\mathrm{G}} - (e_a \rfloor \pi_b) \wedge \frac{\partial H_{\mathrm{G}}}{\partial \pi_b} \tag{3.62}$$

を用いる。ここで、$\rfloor$ は内部積、$e_a$ は $\theta^a$ の双対基底

$$e_a \rfloor \theta^b = \delta^b_a \tag{3.63}$$

である。以下、(A.14) から (A.17) を使う。まず、

$$\begin{aligned}e_a \rfloor H_{\mathrm{G}} &= e_a \rfloor \frac{1}{2\kappa}\omega^d{}_c \wedge \omega^{cb} \wedge \eta_{bd} \\ &= \frac{1}{2\kappa}(\omega^d{}_{ca}\omega^{cb} \wedge \eta_{bd} - \omega^{cb}{}_a\omega^d{}_c \wedge \eta_{bd} + \omega^d{}_c \wedge \omega^{cb} \wedge \eta_{bda}) \end{aligned} \tag{3.64}$$

である。また、

$$\begin{aligned}e_a \rfloor \pi_b &= \frac{1}{2\kappa}e_a \rfloor (\omega^{cd} \wedge \eta_{cdb}) \\ &= \frac{1}{2\kappa}(\omega^{cd}{}_a\eta_{cdb} - \omega^{cd} \wedge \eta_{cdba}), \end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}-(e_a \rfloor \pi_b) \wedge \frac{\partial H_{\mathrm{G}}}{\partial \pi_b} &= \frac{1}{2\kappa}(\omega^{cd}{}_a\eta_{cdb} - \omega^{cd} \wedge \eta_{cdba}) \wedge \omega^b{}_e \wedge \theta^e \\ &= \frac{1}{2\kappa}(\omega^{cd}{}_a\omega^b{}_e \wedge \theta^e \wedge \eta_{cdb} - \omega^{cd} \wedge \omega^b{}_e \wedge \theta^e \wedge \eta_{cdba}) \end{aligned} \tag{3.66}$$

である。上式右辺第 1 項は、

$$
\begin{aligned}
\omega^{cd}{}_a \omega^b{}_e \wedge \theta^e \wedge \eta_{cdb} &= \omega^{cd}{}_a \omega^b{}_e \wedge (\delta^e_c \eta_{db} - \delta^e_d \eta_{cb} + \delta^e_b \eta_{cd}) \\
&= \omega^{cd}{}_a \omega^b{}_c \wedge \eta_{db} - \omega^{ce}{}_a \omega^b{}_e \wedge \eta_{cb} \qquad (3.67)
\end{aligned}
$$

である。(3.66) 右辺第 2 項は、

$$
\begin{aligned}
-\omega^{cd} \wedge \omega^b{}_e \wedge \theta^e \wedge \eta_{cdba} &= \omega^{cd} \wedge \omega^b{}_e \wedge (\delta^e_c \eta_{dba} - \delta^e_d \eta_{cba} + \delta^e_b \eta_{cda} - \delta^e_a \eta_{cdb}) \\
&= \omega^{cd} \wedge \omega^b{}_c \wedge \eta_{dba} - \omega^{cd} \wedge \omega^b{}_d \wedge \eta_{cba} + 0 - \omega^{cd} \wedge \omega^b{}_a \wedge \eta_{cdb} \qquad (3.68)
\end{aligned}
$$

となる。(3.67) の第 1, 2 項は、(3.66) の第 2, 1 項とそれぞれキャンセルする。(3.68) の第 2 項は、(3.66) の第 3 項とキャンセルし、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H_{\mathrm{G}}}{\partial \theta^a} &= \frac{1}{2\kappa}(\omega^{cd} \wedge \omega^b{}_c \wedge \eta_{dba} - \omega^{cd} \wedge \omega^b{}_a \wedge \eta_{cdb}) \\
&= \frac{1}{2\kappa}(\omega^{cd} \wedge \omega^b{}_c \wedge \eta_{dba} + \omega^b{}_a \wedge \omega^{cd} \wedge \eta_{cdb}) \qquad (3.69)
\end{aligned}
$$

となる。

(3.69) の右辺は、Sparling's form(重力場のエネルギー・運動量擬テンソルと関係する) と定数倍を除いて一致する [13, 16, 18]。

### 3.4.3 $L_{\mathrm{mat}}$ の変分

次に、$\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta, \pi)/\partial \theta^c$ を求める。今、

$$
\begin{aligned}
t_c &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta, \pi)}{\partial \theta^c} - T_c \\
&= \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta, \pi)}{\partial \theta^c} - \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta, \omega)}{\partial \theta^c} \qquad (3.70)
\end{aligned}
$$

(3.26), すなわち、

$$
L_{\mathrm{mat}} = L_0(\theta) + \omega^{ab} \wedge S_{ab}(\theta), \quad S_{ab}(\theta) = \eta_d S^d{}_{ab} \qquad (3.71)
$$

と (3.42) より、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta, \omega)}{\partial \theta^c} &= \frac{\partial L_0}{\partial \theta^c} - \omega^{ab} \wedge \eta_{dc} S^d{}_{ab}, \qquad (3.72) \\
\frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta, \pi)}{\partial \theta^c} &= \frac{\partial L_0}{\partial \theta^c} - \frac{\partial \Theta^a}{\partial \theta^c} \wedge \pi_a \\
&= \frac{\partial L_0}{\partial \theta^c} - C^a{}_{cb} \theta^b \wedge \pi_a \qquad (3.73)
\end{aligned}
$$

となり、

$$
\begin{aligned}
t_c &= -C^a{}_{cb} \theta^b \wedge \pi_a + \omega^{ab} \wedge \eta_{dc} S^d{}_{ab} \\
&= -C^a{}_{cb} \theta^b \wedge \frac{1}{2\kappa} \omega^{de} \wedge \eta_{ade} + \omega^{ab} \wedge \eta_{dc} S^d{}_{ab} \\
&\equiv \omega^{ab} \wedge b_{c,ab} \qquad (3.74)
\end{aligned}
$$

を得る。ところで、

$$B_{c,ab} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2\kappa}\Theta^d \wedge \eta_{abcd} \tag{3.75}$$

と置くと、(3.28) を用いて、

$$B_{c,ab} = b_{c,ab} \tag{3.76}$$

を示すことができる (付録 E)。よって、

$$t_c = \omega^{ab} \wedge B_{c,ab} \tag{3.77}$$

となり、

$$-\frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta,\pi)}{\partial \theta^c} = -T_c - \frac{1}{2\kappa}\omega^{ab} \wedge \Theta^d \wedge \eta_{abcd} \tag{3.78}$$

となる。

## 3.5 正準方程式

### 3.5.1 $\theta^a$ についての正準方程式

$\theta^a$ についての正準方程式は、

$$d\theta^a = -\omega^a{}_b \wedge \theta^b + \Theta^a \tag{3.79}$$

となる。これは第 1 構造方程式である。

### 3.5.2 $\pi_a$ についての正準方程式

$\pi_a$ についての正準方程式 (3.40) は、(3.69), (3.78) より、

$$\begin{aligned} d\pi_c = {} & \frac{1}{2\kappa}(\omega^d{}_b \wedge \omega^{ab} \wedge \eta_{adc} + \omega^d{}_c \wedge \omega^{ab} \wedge \eta_{abd} \\ & -\omega^{ab} \wedge \Theta^d \wedge \eta_{abcd}) - T_c \end{aligned} \tag{3.80}$$

となる。

(3.79) の右辺は $\pi_a$ の 1 次で、(3.80) の右辺は $\pi_a$ の 2 次である。

### 3.5.3 アインシュタイン方程式

$\pi_a$ についての正準方程式 (3.80) がアインシュタイン方程式と等価であることを示す。(3.69) は、

$$\frac{\partial H_{\mathrm{G}}}{\partial \theta^c} = \frac{1}{2\kappa}\left[\omega^d{}_b \wedge \omega^{ab} \wedge \eta_{adc} + \omega^d{}_c \wedge \omega^{ab} \wedge \eta_{abd}\right] \tag{3.81}$$

である。上式は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_{\mathrm{G}}}{\partial \theta^c} &= \frac{1}{2\kappa}\Big[-\omega^{ad}\wedge\omega_d{}^b\wedge\eta_{abc} \\ &\qquad -\omega^{ab}\wedge(\omega^d{}_a\wedge\eta_{dbc}+\omega^d{}_b\wedge\eta_{adc}+\omega^d{}_c\wedge\eta_{abd})\Big] \\ &= \frac{1}{2\kappa}\Big[-\Omega^{ab}\wedge\eta_{abc}+d(\omega^{ab}\wedge\eta_{abc})\Big]+\omega^{ab}\wedge B_{c,ab} \end{aligned} \tag{3.82}$$

と書ける。ここで、(A.11) より、

$$B_{c,ab}=\frac{1}{2\kappa}\Big[d\eta_{abc}-(\omega^d{}_a\wedge\eta_{dbc}+\omega^d{}_b\wedge\eta_{adc}+\omega^d{}_c\wedge\eta_{abd})\Big] \tag{3.83}$$

となる事を用いた。よって、$\pi_c$ の正準方程式 (3.80) は、

$$\begin{aligned} d\pi_c &= \frac{1}{2\kappa}[-\Omega^{ab}\wedge\eta_{abc}+d(\omega^{ab}\wedge\eta_{abc})]-T_c \\ &= -\frac{1}{2\kappa}\Omega^{ab}\wedge\eta_{abc}+d\pi_c-T_c \end{aligned} \tag{3.84}$$

すなわち、

$$-\frac{1}{2\kappa}\Omega^{ab}\wedge\eta_{abc}=T_c \tag{3.85}$$

となる。これはアインシュタイン方程式である。

## 3.6 1階形式

これまで、スピン接続 $\omega^a{}_b$ は、$\theta^a$ の従属変数であった。変分原理におけるこの定式化を2階形式という。これに対して、重力の独立変数として $\theta^a$ と $\omega^a{}_b$ との両方を採用する定式化を1階形式という。

1階形式における標準的なラグランジアン形式は、

$$L^{(1\mathrm{st})}(\theta,\omega,d\omega)=L_{\mathrm{G}}^{(1\mathrm{st})}(\theta,\omega,d\omega)+L_{\mathrm{mat}}(\theta,\omega) \tag{3.86}$$

である。$L_{\mathrm{G}}^{(1\mathrm{st})}$ は重力場のラグランジアン形式で、

$$L_{\mathrm{G}}^{(1\mathrm{st})}=\frac{1}{2\kappa}*R=\frac{1}{2\kappa}(d\omega^{ab}+\omega^a{}_c\wedge\omega^{cb})\wedge\eta_{ab} \tag{3.87}$$

である[17)]。これは $d\theta^a$ にはよらない。$L_{\mathrm{mat}}(\theta,\omega)$ は重力場以外の場のラグランジアン形式である。これは、$d\theta^a$, $d\omega^a{}_b$ によらない。$L^{(1\mathrm{st})}$ の変分は、

$$\begin{aligned}\delta L^{(1\mathrm{st})} &= \frac{1}{2\kappa}\Big[\delta d\omega^{ab}\wedge\eta_{ab}+(\delta\omega^a{}_c\wedge\omega^{cb}+\omega^a{}_c\wedge\delta\omega^{cb})\wedge\eta_{ab} \\ &\qquad +\Omega^{ab}\wedge\delta\eta_{ab}\Big]+\delta\theta^c\wedge\frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial\theta^c}+\delta\omega^{ab}\wedge\frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial\omega^{ab}} \\ &= \delta d\omega^{ab}\wedge\frac{1}{2\kappa}\eta_{ab} \\ &\qquad +\delta\omega^{ab}\wedge\Big[\frac{1}{2\kappa}(-\omega^c{}_a\wedge\eta_{cb}-\omega^c{}_b\wedge\eta_{ac})+\frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial\omega^{ab}}\Big] \\ &\qquad +\delta\theta^c\wedge\Big[\frac{1}{2\kappa}\Omega^{ab}\wedge\eta_{abc}+\frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial\theta^c}\Big] \end{aligned} \tag{3.88}$$

17) $*R$ を $W'=*R-d(\omega^{ab}\wedge\eta_{ab})$ に変えても、オイラー・ラグランジュ方程式は変わらない。ラグランジアン形式には、全微分項の不定性があるためである。実際、全微分項の変分は、ストークスの定理より、落ちる。

である。ここで、(A.8) より、$\delta\eta_{ab} = \delta\theta^c \wedge \eta_{abc}$ であることを用いた。また、$\Omega^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \wedge \omega^{cb}$ である。よって、

$$\frac{\partial L^{(1\mathrm{st})}}{\partial\theta^c} = \frac{1}{2\kappa}\Omega^{ab} \wedge \eta_{abc} + T_c, \tag{3.89}$$

$$\frac{\partial L^{(1\mathrm{st})}}{\partial d\theta^c} = 0, \tag{3.90}$$

$$\frac{\partial L^{(1\mathrm{st})}}{\partial\omega^{ab}} = \frac{1}{2\kappa}(-\omega^c{}_a \wedge \eta_{cb} - \omega^c{}_b \wedge \eta_{ac}) + \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial\omega^{ab}}, \tag{3.91}$$

$$\frac{\partial L^{(1\mathrm{st})}}{\partial d\omega^{ab}} = \frac{1}{2\kappa}\eta_{ab} \tag{3.92}$$

を得る。ここで、$T_c = \partial L_{\mathrm{mat}}/\partial\theta^c$ である。

$\omega^{ab}$ のオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L^{(1\mathrm{st})}}{\partial\omega^{ab}} + d\frac{\partial L^{(1\mathrm{st})}}{\partial d\omega^{ab}} = 0$$

は、

$$\frac{1}{2\kappa}[d\eta_{ab} - \omega^c{}_a \wedge \eta_{cb} - \omega^c{}_b \wedge \eta_{ac}] + \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial\omega^{ab}} = 0 \tag{3.93}$$

である。これは、2 階形式で課した条件 (3.16) と一致する。

$\theta^c$ のオイラー・ラグランジュ方程式 $\partial L^{(1\mathrm{st})}/\partial\theta^c + d(\partial L^{(1\mathrm{st})}/\partial d\theta^c) = 0$ は、アインシュタイン方程式 (3.19) となる。

2 階形式では、重力場のラグランジアンに、高次曲率項 ($R^2$ や $R_{ab}R^{ab}$ や $R_{abcd}R^{abcd}$) がある場合を扱えないが、1 階形式では扱うことができる。

このラグランジアン形式では、共変解析力学の正準形式を考えると、拘束系となる。実際、共役形式 $\pi_c^{(1\mathrm{st})} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \partial L^{(1\mathrm{st})}/\partial d\theta^c$, $p_{ab} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \partial L^{(1\mathrm{st})}/\partial d\omega^{ab}$ は、それぞれ、$\pi_c^{(1\mathrm{st})} = 0$, $p_{ab} = \frac{1}{2\kappa}\eta_{ab}$ となる。このため、1 階形式での正準形式では、ラグランジュの未定乗数法を用いる必要がある。

# 4　ポアソン括弧

前章までは、具体的な系に対して、正準方程式を求めてきた。しかし、そこではポアソン括弧は使わなかった。本章では、ポアソン括弧について議論する (論文 [21] の解説を試みる)。この章は§2.2 の後すぐに読むことも可能である。

微分形式 $f$ の、位置形式 $\psi^A$ および共役形式 $\pi_A$ による微分が存在することを、$f$ は**メタ微分可能**であると言う事にする。また、$Z^a(=\psi^A,\pi_A)$ での[18]メタ微分 $\partial f/\partial Z^a$ は、$\tilde{\partial}/\tilde{\partial}Z^a$ という (メタ微分) 演算が $f$ に作用した結果であると考える：

$$\frac{\tilde{\partial}}{\tilde{\partial}Z^a}[f]=\frac{\partial f}{\partial Z^a}. \tag{4.1}$$

以下、メタ微分可能な微分形式についてのみ考える。メタ・ベクトル場

$$\boldsymbol{X}=X^a\wedge\frac{\tilde{\partial}}{\tilde{\partial}Z^a} \tag{4.2}$$

は、メタ微分可能な微分形式 $F$ に、

$$\boldsymbol{X}[F]=X^a\wedge\frac{\partial F}{\partial Z^a} \tag{4.3}$$

と作用する。$X^a$ は微分形式である。また、微分形式のことをメタ 0 形式と呼ぶ。以下、$\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ はメタ・ベクトル場とする。

今、

$$\tilde{d}Z^b\Big[\frac{\tilde{\partial}}{\tilde{\partial}Z^a}\Big]=\delta^b_a \tag{4.4}$$

で、双対基底 $\tilde{d}Z^a$ を定義する。または、

$$\tilde{d}Z^a[\boldsymbol{X}]=\boldsymbol{X}[Z^a]=X^a \tag{4.5}$$

と定義しても良い。$\tilde{d}\psi^A$, $\tilde{d}\pi_A$ は微分 $p_A$, $q_A$ 形式 ($z_a$ 形式と書く) で、メタ 1 形式である。メタ微分可能な微分形式 $f$ に対して、$\tilde{d}f$ を、

$$\tilde{d}f[\boldsymbol{X}]\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{X}[f]=X^a\wedge\frac{\partial f}{\partial Z^a}=\tilde{d}Z^a[\boldsymbol{X}]\wedge\frac{\partial f}{\partial Z^a} \tag{4.6}$$

で定義する。これは、もし、

$$\tilde{d}f=\tilde{d}Z^a\wedge\frac{\partial f}{\partial Z^a} \tag{4.7}$$

と書くと、

$$(\tilde{d}Z^a\wedge\frac{\partial f}{\partial Z^a})[\boldsymbol{X}]=\tilde{d}Z^a[\boldsymbol{X}]\wedge\frac{\partial f}{\partial Z^a} \tag{4.8}$$

[18] $A=1,2,\cdots,n$ とすると、$a=1,2,\cdots,2n$ で、$Z^A=\psi^A$, $Z^{n+A}=\pi_A$ である。

であることを示している。よって、$F$ を一般の $f$ 形式として、

$$(\tilde{d}Z^a \wedge F)[\boldsymbol{X}] \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{d}Z^a[\boldsymbol{X}] \wedge F \tag{4.9}$$

とする。また、

$$F \wedge \tilde{d}Z^a \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{z_a f}\tilde{d}Z^a \wedge F \tag{4.10}$$

とする。

今、$\tilde{d}Z^a \otimes \tilde{d}Z^b$ を、

$$(\tilde{d}Z^a \otimes \tilde{d}Z^b)[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{d}Z^a[\boldsymbol{X}] \wedge \tilde{d}Z^b)[\boldsymbol{Y}] \tag{4.11}$$

で定義する。また、メタ 2 形式を

$$\tilde{d}Z^a \wedge \tilde{d}Z^b = \tilde{d}Z^a \otimes \tilde{d}Z^b - (-1)^{z_a z_b}\tilde{d}Z^b \otimes \tilde{d}Z^a \tag{4.12}$$

で定義する。よって、

$$\tilde{d}Z^a \wedge \tilde{d}Z^b = -(-1)^{z_a z_b}\tilde{d}Z^b \wedge \tilde{d}Z^a \tag{4.13}$$

である。内部積 $I_{\boldsymbol{X}}$ を、

$$I_{\boldsymbol{X}}(\tilde{d}Z^a \wedge F) \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{d}Z^a \wedge F)[\boldsymbol{X}], \tag{4.14}$$

$$(I_{\boldsymbol{X}}(\tilde{d}Z^a \wedge \tilde{d}Z^b))[\boldsymbol{Y}] \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{d}Z^a \wedge \tilde{d}Z^b)[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] \tag{4.15}$$

で定義する。ここで、$F$ は任意のメタ 0 形式である。

メタ・シンプレクティック形式を

$$\tilde{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} -\tilde{d}\psi^A \wedge \tilde{d}\pi_A \tag{4.16}$$

で定義する。メタ微分可能な微分形式 (メタ 0 形式)$f$ に対して、

$$\tilde{d}f = I_{\boldsymbol{X}_f}\tilde{\omega} \tag{4.17}$$

によって、メタ・ハミルトン・ベクトル場 $\boldsymbol{X}_f$ が定まる。一般のポアソン括弧は、メタ微分可能な微分形式 (メタ 0 形式)$f$, $g$ に対して、

$$\begin{aligned} \{f, g\} &\stackrel{\text{def}}{=} I_{\boldsymbol{X}_f} I_{\boldsymbol{X}_g}\tilde{\omega} \\ &= I_{\boldsymbol{X}_f}\tilde{d}g \\ &= \boldsymbol{X}_f[g] && (4.18) \\ &= \tilde{\omega}[\boldsymbol{X}_g, \boldsymbol{X}_f] && (4.19) \end{aligned}$$

で定義する。

$\boldsymbol{X}_f$ を求める。(4.17) の左辺は、$f$ を $F$ 形式として、

$$\begin{aligned} \tilde{d}f &= \tilde{d}\psi^A \wedge \frac{\partial f}{\partial \psi^A} + \tilde{d}\pi_A \wedge \frac{\partial f}{\partial \pi_A} && (4.20) \\ &= (-1)^{p_A(F-p_A)}\frac{\partial f}{\partial \psi^A} \wedge \tilde{d}\psi^A + (-1)^{q_A(F-q_A)}\frac{\partial f}{\partial \pi_A} \wedge \tilde{d}\pi_A && (4.21) \end{aligned}$$

である。$\boldsymbol{X}_f$ を

$$\boldsymbol{X}_f = {}_fX^A \wedge \frac{\tilde{\partial}}{\tilde{\partial}\psi^A} + {}_fY_A \wedge \frac{\tilde{\partial}}{\tilde{\partial}\pi_A} \tag{4.22}$$

と書くと、(4.17) の右辺は、

$$I_{\boldsymbol{X}_f}\tilde{\omega} = -{}_fX^A \wedge \tilde{d}\pi_A + (-1)^{p_A q_A}{}_fY_A \wedge \tilde{d}\psi^A \tag{4.23}$$

なので、

$$ {}_fX^A = -(-1)^{q_A(F-q_A)}\frac{\partial f}{\partial \pi_A}, \tag{4.24}$$

$$ {}_fY_A = (-1)^{p_A q_A}(-1)^{p_A(F-p_A)}\frac{\partial f}{\partial \psi^A} \tag{4.25}$$

を得る。ポアソン括弧は、

$$\{f,g\} = \boldsymbol{X}_f[g] = {}_fY_A \wedge \frac{\partial g}{\partial \pi_A} + {}_fX^A \wedge \frac{\partial g}{\partial \psi^A} \tag{4.26}$$

である。符号は、

$$(-1)^{q_A(F-q_A)} = (-1)^{(d-p_A-1)F-d+p_A+1} = (-1)^{(d+p_A-1)(F+1)},$$
$$(-1)^{p_A q_A}(-1)^{p_A(F-p_A)} = (-1)^{p_A(d-p_A-1)+p_A F-p_A^2} = (-1)^{p_A d-p_A+p_A F} = (-1)^{p_A(F+d+1)}$$

なので、

$$\boldsymbol{X}_f = (-1)^{p_A(F+d+1)}\frac{\partial f}{\partial \psi^A} \wedge \frac{\tilde{\partial}}{\tilde{\partial}\pi_A} - (-1)^{(d+p_A-1)(F+1)}\frac{\partial f}{\partial \pi_A} \wedge \frac{\tilde{\partial}}{\tilde{\partial}\psi^A} \tag{4.27}$$

および、

$$\{F,G\} = (-1)^{p_A(f+d+1)}\frac{\partial F}{\partial \psi^A} \wedge \frac{\partial G}{\partial \pi_A} - (-1)^{(d+p_A-1)(f+1)}\frac{\partial F}{\partial \pi_A} \wedge \frac{\partial G}{\partial \psi^A} \tag{4.28}$$

を得る。ただし、$F$ は $f$ 形式とした。基本ポアソン括弧は、

$$\{\psi^A, \psi^B\} = 0,\ \{\pi_A, \pi_B\} = 0, \tag{4.29}$$

$$\{\psi^A, \pi_B\} = \delta^A_B(-1)^{dp_A}, \tag{4.30}$$

$$\{\pi_A, \psi^A\} = -\delta^B_A \tag{4.31}$$

となる。

メタ微分可能な微分形式 $F$ の運動方程式は、

$$dF = -\{H, F\} \tag{4.32}$$

と書ける。ここで、$H$ は $d$ 形式であって、その積分ではない。ポアソン括弧の引数は微分形式であり、それは同じ点でのものである。通常の場の解析力学の、汎関数微分を使った定式化よ

り、質点系のポアソン括弧に近い。実際、このポアソン括弧は、質点系のポアソン括弧の自然な拡張である。$d=1$(質点系) のとき、通常の質点系のポアソン括弧となる。

また、通常の質点系の解析力学のシンプレクティック形式における微分形式は、実はメタ微分形式の事であると分かる。

$F$, $G$, $H$ がメタ微分可能な $f$, $g$, $h$ 形式のとき、

$$\{G,F\} = -(-1)^{(f+d+1)(g+d+1)}\{F,G\} \tag{4.33}$$

および、

$$\{F, G\wedge H\} = \{F,G\}\wedge H + (-1)^{(f+d+1)g} G\wedge\{F,H\} \tag{4.34}$$

が成り立つ。上 2 式より、

$$\{G\wedge H, F\} = (-1)^{(f+d+1)h}\{G,F\}\wedge H + G\wedge\{H,F\} \tag{4.35}$$

である。メタ・リー微分やポアソン括弧のヤコビ恒等式については、[21] を参照。

付録 I では、テンソルの成分を基本変数としたポアソン括弧を調べる。これは、上のポアソン括弧と等価ではない。また、定式化の見通しが悪い。

共変解析力学は、「微分形式の微分形式による微分」(メタ微分) を用いて定式化され、時間と空間は平等であり、座標系に依らない定式化である (微分形式は座標系に依らないので)。通常の解析力学では、電磁場やゲージ場, 重力場は第 1 種の拘束系であるが、共変解析力学では非拘束系となる。つまり、第 1 種拘束系は、時間を特別扱いしたために生じる。一方、付録 G で議論するように、通常の解析力学で第 2 種拘束系であったディラック場は、共変解析力学でも拘束系となる。

本章では、ポアソン括弧を定式化した。共変解析力学のポアソン括弧は、De Donder-Weyl 理論のポアソン括弧 (付録 I) と等価ではない。ポアソン括弧と量子化との関係は不明である。ただし、I. V. Kanatchikov[22] は、De Donder-Weyl 理論のポアソン括弧の量子化への応用 (precanonical quantization) を議論している。

# 5　ゲージ変換の生成子

この章では、共変解析力学におけるゲージ変換の生成子について議論する。この章の論文化は [30] である。著作権が気になるので、この節は [30] との重複をなるべく避ける。

場 $\psi^A$ とその共役形式 $\pi_A$ の無限小変換

$$\psi^A \to \psi^A + \delta\psi^A, \quad \pi_A \to \pi_A + \delta\pi_A \tag{5.1}$$

を考える。もし、

$$\delta\psi^A = \{\psi^A, G\}, \quad \delta\pi_A = \{\pi_A, G\} \tag{5.2}$$

を満たす $(d-1)$ 形式 $G$ が存在するとき、$G$ を変換の生成子という [27]。微分形式 $F$ が $\psi^A$ と $\pi_A$ で微分可能なとき、$F$ の変換は、

$$\delta F = \{F, G\} \tag{5.3}$$

で与えられる。

## 5.1　Noether current

$p$ 形式の場の微小変換 $\psi^A \to \psi^A + \delta\psi^A$ に対して、

$$\delta L \equiv \delta\psi^A \wedge [L]_A + d\Big(\delta\psi^A \wedge \frac{\partial L}{\partial d\psi^A}\Big) \tag{5.4}$$

が成り立つ。ここで、$[L]_A \stackrel{\mathrm{def}}{=} \partial L/\partial\psi^A - (-1)^p d(\partial L/\partial d\psi^A)$ であり、$\equiv$ はオイラー・ラグランジュ方程式を使わずに成り立つ恒等式を表す。$\delta L = dl$ のとき、 オイラー・ラグランジュ方程式 $[L]_A = 0$ の下でネーターカレント

$$N \stackrel{\mathrm{def}}{=} \delta\psi^A \wedge \frac{\partial L}{\partial d\psi^A} - l \tag{5.5}$$

は保存する：

$$dN = 0. \tag{5.6}$$

## 5.2　ネーターカレントは変換の生成子である

以下では、$\delta\psi^A$ および $l$ は $\psi^A$ とパラメーターのみに依存し、$d\psi^A$ や $\pi_A$ を含まないと仮定する。この場合、ネーターカレントが変換の生成子である [30]。

## 5.3 $\varepsilon^r N_r + d\varepsilon^r \wedge F_r$ タイプのネーターカレント

以下では、局所変換のネーターカレントが、

$$N = \varepsilon^r N_r + d\varepsilon^r \wedge F_r \tag{5.7}$$

で与えられる場合を考える。$\varepsilon^r$ は微小のパラメーラー (0 形式) である。$N_r$ は大域的変換のネーターカレントである。論文 [27] によると、

$$N_r = -\{F_r, H\} \tag{5.8}$$

はオイラー・ラグランジュ方程式なしに成り立つ。

以下ではゲージ場と重力場を具体的に調べる。

## 5.4 ゲージ場

ゲージ場 $A^r$ が $p$ 形式の物質場 $\psi^A$ と結合しているとする。全ラグランジアン形式は、

$$L = L_0(\psi^A, (D\psi)^A) + L_1 \tag{5.9}$$

である。$(D\psi)^A$ は共変微分である。$L_0$, $L_1$ はそれぞれ物質場, ゲージ場のラグランジアン形式である。無限小の局所変換は、

$$\delta\psi^A = \varepsilon^r (\boldsymbol{G}_r)^A{}_B \psi^B\,, \quad \delta A^r = \varepsilon^s f^r{}_{st} A^t - d\varepsilon^r\,, \quad \delta L_0 = 0\,, \quad \delta L_1 = 0 \tag{5.10}$$

である。$\varepsilon^r$ は無限小パラメーラー, $\boldsymbol{G}_r$ は線形リー群 $\mathcal{G}$ の生成子の表現である。共変微分は、$(D\psi)^A \stackrel{\text{def}}{=} d\psi^A + A^r (\boldsymbol{G}_r)^A{}_B \wedge \psi^B$ である。大域的ネーターカレント $N_r$ は、

$$N_r = N_r^{(0)} + N_r^{(1)}, \tag{5.11}$$

$$N_r^{(0)} = (\boldsymbol{G}_r)^A{}_B \psi^B \wedge \pi_A, \tag{5.12}$$

$$N_r^{(1)} = f^s{}_{rt} A^t \wedge \pi_s \tag{5.13}$$

である。$\pi_A$, $\pi_r$ はそれぞれ $\psi^A$, $\pi_r$ の共役形式である。(5.7) の $F_r$ は、

$$F_r = -\pi_r \tag{5.14}$$

である。$N$ は変換の生成子であることを確かめることができる：

$$\delta\psi^A = \{\psi^A, N\} = \varepsilon^r (\boldsymbol{G}_r)^A{}_B \psi^B, \tag{5.15}$$

$$\delta A^r = \{A^r, N\} = \varepsilon^s f^r{}_{st} A^t - d\varepsilon^r, \tag{5.16}$$

$$\delta\pi_A = \{\pi_A, N\} = -\varepsilon^r (\boldsymbol{G}_r)^B{}_A \pi_B, \tag{5.17}$$

$$\delta\pi_r = \{\pi_r, N\} = -\varepsilon^s f^t{}_{sr} \pi_t. \tag{5.18}$$

(5.8) を確かめる。Hamilton form $H$ の微分は、§ 5.4 より、

$$\frac{\partial H}{\partial A^a} = -f^c{}_{ab} A^b \wedge \pi_c - J_a, \tag{5.19}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \pi_a} = k * \pi^a - \frac{1}{2} f^a{}_{bc} A^b \wedge A^c. \tag{5.20}$$

である。ここで、

$$J_r \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial L_0(\psi^A,(D\psi)^A)}{\partial A^r} = (\boldsymbol{G}_r)^A{}_B \psi^B \wedge \pi_A = N_r^{(0)} \tag{5.21}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} -\{F_r, H\} &= -\frac{\partial H}{\partial A^r} \\ &= f^c{}_{rb} A^b \wedge \pi_c + J_r \\ &= N_r. \end{aligned} \tag{5.22}$$

を得る。(5.21) を用いた。

## 5.5 重力場

無限小ローレンツ変換

$$\delta\theta^a = \varepsilon^a{}_b \theta^b \tag{5.23}$$

を考える。$\varepsilon^{ab}$ は無限小パラメーラーで、$\varepsilon^{ab} = -\varepsilon^{ba}$ を満たす。

ネーターカレント $N$ は、

$$N = \frac{1}{2}\varepsilon^{ab} N_{ab} + \frac{1}{2} d\varepsilon^{ab} \wedge F_{ab}, \tag{5.24}$$

$$N_{ab} = N_{ab}^{(0)} + N_{ab}^{(1)}, \tag{5.25}$$

$$N_{ab}^{(0)} = 2\frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial \omega^{ab}}, \tag{5.26}$$

$$N_{ab}^{(1)} = 2\theta_{[b} \wedge \pi_{a]} = \theta_b \wedge \pi_a - \theta_a \wedge \pi_b \tag{5.27}$$

である。[ ] は反対称化である。また、

$$F_{ab} = -\frac{1}{\kappa}\eta_{ab} \tag{5.28}$$

を示せる [30]。

以下、(5.8) を確かめる。$\theta^a$ の共役形式は、

$$\pi_a = \frac{1}{2\kappa}\omega^{bc} \wedge \eta_{abc} \tag{5.29}$$

である。Hamilton form は、

$$H(\theta,\pi) = d\theta^a \wedge \pi_a - L = H_{\mathrm{G}}(\theta,\pi) - L_{\mathrm{mat}}(\theta,\pi) \tag{5.30}$$

である。$H_{\mathrm{G}}$ は重力場の Hamilton form である。よって、

$$\begin{aligned} -\{F_{ab}, H\} &= \frac{1}{\kappa}\{\eta_{ab}, H_{\mathrm{G}}\} - \frac{1}{\kappa}\{\eta_{ab}, L_{\mathrm{mat}}\} \\ &= -\frac{1}{\kappa}\frac{\partial \eta_{ab}}{\partial \theta^c} \wedge \frac{\partial H_{\mathrm{G}}}{\partial \pi_c} + \frac{1}{\kappa}\frac{\partial \eta_{ab}}{\partial \theta^c} \wedge \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial \pi_c} \\ &= -\frac{1}{\kappa}\eta_{abc} \wedge (-\omega^c{}_d \wedge \theta^d) - \frac{1}{\kappa}\eta_{abc} \wedge \Theta^c \\ &= \frac{1}{\kappa}\omega^c{}_d \wedge \theta^d \wedge \eta_{abc} + 2\frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial \omega^{ab}} \end{aligned} \tag{5.31}$$

を得る。ここで、(3.61), (A.8) および (3.41) を 3 行目で用いた。また、(3.27) を 4 行目で用いた。(A.2) より、

$$\kappa N^{(1)}_{ab} = -\omega^{cd} \wedge \theta_{[b} \wedge \eta_{a]cd} = -2\omega^{c}{}_{[b} \wedge \eta_{a]c} = \omega^{c}{}_{d} \wedge \theta^{d} \wedge \eta_{abc} \tag{5.32}$$

なので、

$$N_{ab} = -\{F_{ab}, H\} \tag{5.33}$$

を得る。

## 5.6 コメント

通常の解析力学では、

$$\int d^{d-1}x \ \sqrt{-g} N_{r}{}^{0} \tag{5.34}$$

が生成子となる。$N_r{}^0$ はネーターカレント $N_r{}^\mu$ の $\mu = 0$ 成分である。共変解析力学では、積分はいらない。また、全成分を使う。

ネーターカレント形式 $N_r = *(N_{r,\mu} dx^\mu)$ のポアソン括弧が、ゲージ群 $\mathcal{G}$ の生成子の交換関係と同じ形になるのは不思議である。

$(d-2)$ 形式 $F_r$ は何者か？

## 5.7 この章の仮定を満たさない変換の例

$2n$ 形式 $\psi$ とラグランジアン形式

$$L = -\frac{1}{2} d\psi \wedge *d\psi - \frac{1}{2} m^2 \psi \wedge *\psi \tag{5.35}$$

を考え、$d = 4n+1$ とする。共役形式 $\pi = - * d\psi$ は $2n$ 形式である。Hamilton from は、

$$H = \frac{1}{2} \pi \wedge *\pi + \frac{1}{2} m^2 \psi \wedge *\psi \tag{5.36}$$

である。無限小変換

$$\delta\psi = \frac{\varepsilon}{m}\pi, \quad \delta\pi = -m\varepsilon\psi \tag{5.37}$$

のもとで $H$ は不変である。$\varepsilon$ は微小の 0 形式である。生成子は、

$$G = \varepsilon\Big(\frac{1}{2m}\pi \wedge \pi + \frac{m}{2}\psi \wedge \psi\Big) \tag{5.38}$$

である。$\delta L$ は、

$$\delta L = \varepsilon d(-m\psi \wedge \psi) \tag{5.39}$$

となる。$\varepsilon$ が時空点に依らないなら、ネーターカレントは、

$$N = \frac{\varepsilon}{m}\pi \wedge \pi + \varepsilon m \psi \wedge \psi = 2G \tag{5.40}$$

であり、これは生成子ではない。

# A　公式集

## A.1　公式集

まずは、微分形式の公式を列挙する。それらの証明は§A.2 で行う。

$\theta^a \wedge \eta_{a_1\cdots a_r}(r=1,2,3,4)$ の公式は、以下の通りである [18, 7]：

$$\theta^a \wedge \eta_{bcde} = -\delta^a_b \eta_{cde} + \delta^a_c \eta_{bde} - \delta^a_d \eta_{bce} + \delta^a_e \eta_{bcd}, \tag{A.1}$$

$$\theta^a \wedge \eta_{bcd} = \delta^a_b \eta_{cd} - \delta^a_c \eta_{bd} + \delta^a_d \eta_{bc}, \tag{A.2}$$

$$\theta^a \wedge \eta_{bc} = -\delta^a_b \eta_c + \delta^a_c \eta_b, \tag{A.3}$$

$$\theta^a \wedge \eta_b = \delta^a_b \eta. \tag{A.4}$$

(A.3) と (A.4) より、

$$\theta^a \wedge \theta^b \wedge \eta_{cd} = (\delta^a_c \delta^b_d - \delta^a_d \delta^b_c)\eta \tag{A.5}$$

を得る。(A.2) と (A.3) より、

$$\theta^a \wedge \theta^b \wedge \eta_{cde} = (\delta^a_d \delta^b_e - \delta^a_e \delta^b_d)\eta_c - (\delta^a_c \delta^b_e - \delta^a_e \delta^b_c)\eta_d + (\delta^a_c \delta^b_d - \delta^a_d \delta^b_c)\eta_e \tag{A.6}$$

である。

$\delta\eta_{a_1\cdots a_r}(r=0,1,2,3)$ は以下の通りである：

$$\delta\eta_{abc} = \delta\theta^d \wedge \eta_{abcd}, \tag{A.7}$$

$$\delta\eta_{ab} = \delta\theta^c \wedge \eta_{abc}, \tag{A.8}$$

$$\delta\eta_a = \delta\theta^b \wedge \eta_{ab}, \tag{A.9}$$

$$\delta\eta = \delta\theta^a \wedge \eta_a. \tag{A.10}$$

$d\eta_{a_1\cdots a_r}(r=1,2,3)$ の公式は、以下の通り通りである [18]：

$$\begin{aligned} d\eta_{abc} &= A^d{}_a \wedge \eta_{dbc} + A^d{}_b \wedge \eta_{adc} + A^d{}_c \wedge \eta_{abd} \\ &= \omega^d{}_a \wedge \eta_{dbc} + \omega^d{}_b \wedge \eta_{adc} + \omega^d{}_c \wedge \eta_{abd} + \Theta^d \wedge \eta_{abcd}, \end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned} d\eta_{ab} &= A^c{}_a \wedge \eta_{cb} + A^c{}_b \wedge \eta_{ac} \\ &= \omega^c{}_a \wedge \eta_{cb} + \omega^c{}_b \wedge \eta_{ac} + \Theta^c \wedge \eta_{abc}, \end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned} d\eta_a &= A^b{}_a \wedge \eta_b \\ &= \omega^b{}_a \wedge \eta_b + \Theta^b \wedge \eta_{ab} = (\omega_a + C_a)\eta. \end{aligned} \tag{A.13}$$

$\eta_{a_1\cdots a_r}(r=1,2,3,4)$ は、

$$\eta_a = e_a \rfloor \eta, \tag{A.14}$$

$$\eta_{ab} = e_b \rfloor \eta_a, \tag{A.15}$$

$$\eta_{abc} = e_c \rfloor \eta_{ab}, \tag{A.16}$$

$$\eta_{abcd} = e_d \rfloor \eta_{abc} \tag{A.17}$$

とも表せる [7]。ここで、$\rfloor$ は内部積であり、$e_a$ は $\theta^a$ の双対基底 $e_a \rfloor \theta^b = \delta^b_a$ である。

## A.2 証明

この小節では、

$$\eta^{a_1 a_2 \cdots a_p} \stackrel{\text{def}}{=} *(\theta^{a_1} \wedge \theta^{a_2} \wedge \cdots \wedge \theta^{a_p}) \tag{A.18}$$

という記号を用いる。

### A.2.1 $\theta^b \wedge \eta_{a_1 \cdots a_r}$ の公式の証明

$\omega$ を任意の $p$ 形式として、

$$*(\omega \wedge \theta^b) = e^b \rfloor * \omega \tag{A.19}$$

が成り立つ。ただし、$S$ が 0 形式のとき、$e_a \rfloor S \stackrel{\text{def}}{=} 0$ とする。この公式を示す。$\omega$ を

$$\omega = \omega_{a_1 \cdots a_p} \theta^{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{a_p} \tag{A.20}$$

と展開すると、$*$ は、

$$*\omega = \frac{1}{(r+1)!} \omega_{a_1 \cdots a_p} \varepsilon^{a_1 \cdots a_p}{}_{c_1 \cdots c_{r+1}} \theta^{c_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{c_{r+1}} \tag{A.21}$$

となる。ここで、$r \stackrel{\text{def}}{=} d - p - 1$ であり、$\varepsilon_{a_1 a_2 \cdots a_n}$ は完全反対称で、$\varepsilon_{01 \cdots d-1} = 1$ である。また、$\mathring{g}^{ab}$ で $\varepsilon$ の添え字を上げた。$e_b \rfloor * \omega$ は、

$$\begin{aligned} e_b \rfloor * \omega &= \frac{1}{r!} \omega_{a_1 \cdots a_p} \varepsilon^{a_1 \cdots a_p}{}_{c_1 \cdots c_{r+1}} \delta^{c_1}_b \theta^{c_2} \wedge \cdots \wedge \theta^{c_{r+1}} \\ &= \frac{1}{r!} \omega_{a_1 \cdots a_p} \varepsilon^{a_1 \cdots a_p}{}_{b c_1 \cdots c_r} \theta^{c_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{c_r} \end{aligned} \tag{A.22}$$

となる。第 1 等号で、

$$e_b \rfloor (\theta^{c_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{c_{r+1}}) = (r+1) \delta^{[c_1}_b \theta^{c_2} \wedge \cdots \wedge \theta^{c_{r+1}]} \tag{A.23}$$

を用いた。一方、

$$*(\omega \wedge \theta_b) = \frac{1}{r!} \omega_{a_1 \cdots a_p} \varepsilon^{a_1 \cdots a_p}{}_{b c_1 \cdots c_r} \theta^{c_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{c_r} \tag{A.24}$$

であり、これは $e_b \rfloor * \omega$ と一致する。よって (A.19) が示された。

(A.19) の $*$ を取って、

$$\theta^b \wedge \omega = (-1)^{(p+1)d} * (e^b \rfloor * \omega) \tag{A.25}$$

を得る。ここで、(2.7) を用いた。$\omega = \eta_{a_1 a_2 \cdots a_r}$ とすると、

$$\begin{aligned} \theta^b \wedge \eta_{a_1 a_2 \cdots a_r} &= -(-1)^r * (e^b \rfloor (\theta_{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{a_r})) \\ &= (-1)^r [-\delta^b_{a_1} \eta_{a_2 \cdots a_r} + \delta^b_{a_2} \eta_{a_1 a_3 \cdots a_r} + \cdots + (-1)^r \delta^b_{a_p} \eta_{a_1 a_2 \cdots a_{r-1}}] \end{aligned} \tag{A.26}$$

を得る。これより (A.1) から (A.4) を得る。

### A.2.2 $\delta\eta_{a_1\cdots a_r}$ の公式の証明

$\eta_{a_1\cdots a_r}$ は、

$$\eta_{a_1\cdots a_r} = \frac{1}{s!}\varepsilon_{a_1\cdots a_r c_1\cdots c_s}\theta^{c_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{c_s} \tag{A.27}$$

と書ける。ここで、$s \stackrel{\text{def}}{=} d-r$ である。また、

$$\delta(\theta^{c_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{c_s}) = s\delta\theta^{[c_1}\wedge\theta^{c_2}\wedge\cdots\wedge\theta^{c_s]} \tag{A.28}$$

なので、

$$\begin{aligned}\delta\eta_{a_1\cdots a_r} &= \frac{1}{(s-1)!}\varepsilon_{a_1\cdots a_r c_1\cdots c_s}\delta\theta^{c_1}\wedge\theta^{c_2}\wedge\cdots\wedge\theta^{c_s} \\ &= \delta\theta^b\wedge\eta_{a_1\cdots a_r b}\end{aligned} \tag{A.29}$$

を得る。これより、(A.7) から (A.10) が得られる。

### A.2.3 $d\eta_{a_1\cdots a_r}$ の公式の証明

$\beta$ が $\{\alpha^i\}$ で表され、$\{\alpha^i\}$ についての微分を持つとする。また、$\beta$ は時空点に陽に依存しないとする。このとき、

$$d\beta = d\alpha^i\wedge\frac{\partial\beta}{\partial\alpha^i} \tag{A.30}$$

が成立する。この式は後で示す。(A.29) と (A.30) とを組み合わせて、

$$d\eta_{a_1\cdots a_r} = d\theta^b\wedge\eta_{a_1\cdots a_r b} \tag{A.31}$$

を得る $(r=1,2,\cdots,d-1)$。上式に第 1 構造方程式

$$d\theta^a = -A^a{}_b\wedge\theta^b = -\omega^a{}_b\wedge\theta^b + \Theta^a \tag{A.32}$$

を代入し、(A.26) を用いると、(A.11) から (A.13) が得られる。

(A.30) を示す。簡単のため、$\alpha^i$ の添え字 $i$ を省く。$\beta$ が $p$ 形式, $\alpha$ が $r$ 形式 $(r\le p)$ とすると、$\omega \stackrel{\text{def}}{=} \partial\beta/\partial\alpha$ は、$(p-r)$ 形式である。$s \stackrel{\text{def}}{=} p-r$ とする。$\beta$, $\alpha$, $\omega$ を成分で、

$$\beta = \beta_{\mu_1\cdots\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}, \tag{A.33}$$

$$\alpha = \alpha_{\mu_1\cdots\mu_r}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_r}, \tag{A.34}$$

$$\omega = \omega_{\mu_1\cdots\mu_s}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_s}, \tag{A.35}$$

$$\tag{A.36}$$

と書くと、$\delta\beta = \delta\alpha\wedge\omega$ は、

$$\delta\beta_{\mu_1\cdots\mu_p}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p} = \delta\alpha_{\mu_1\cdots\mu_r}\omega_{\nu_1\cdots\nu_s}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}\wedge dx^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_s} \tag{A.37}$$

となる。この式より、

$$\delta\beta_{\mu_1\cdots\mu_p} = \delta\alpha_{[\mu_1\cdots\mu_r}\omega_{\mu_{r+1}\cdots\mu_p]} \tag{A.38}$$

を得る。一方、(A.37) の右辺で、

$$\delta\alpha_{\mu_1\cdots\mu_r} \to \partial_\lambda\alpha_{\mu_1\cdots\mu_r}dx^\lambda\wedge \tag{A.39}$$

の置き換えをすると、(A.37) の右辺は (A.30) の右辺に変わる。(A.38) より、(A.39) の置き換えで、$\delta\beta_{\mu_1\cdots\mu_p}$ は $\partial_\lambda\beta_{\mu_1\cdots\mu_p}dx^\lambda\wedge$ に置き換わり、(A.37) の左辺は (A.30) の左辺に変わる。以上より、(A.30) が示された。

### A.2.4 $e_b\rfloor\eta_{a_1\cdots a_r}$ の公式の証明

(A.14) から (A.17) は、(A.19) より直ちに導かれる。

## B　フレーム１形式 $\theta^a$ での微分の公式

この節は、[7] による。

$X(\theta, \phi_A)$ を $d$ 形式として、

$$\frac{\partial X}{\partial \theta^a} = e_a \rfloor X - (e_a \rfloor \phi_A) \wedge \frac{\partial X}{\partial \phi_A} \tag{B.1}$$

を示す。これより (3.62) が従う。$X$ がラグランジアン形式なら、$\phi_A = d\theta^a, \psi^A, d\psi^A$ である。ここで、$\psi^A$ は、フレーム１形式 $\theta^a$ 以外の位置形式である。$X$ がハミルトン形式なら、$\phi_A$ は、$\theta^a$ の共役形式 $\pi_a$, $\psi^A$, $\psi^A$ の共役形式を表す。まず、

$$\delta X = \delta\theta^a \wedge \frac{\partial X}{\partial \theta^a} + \delta\phi_A \wedge \frac{\partial X}{\partial \phi_A} \tag{B.2}$$

である。これに、

$$\delta \bullet = \mathcal{L}_\xi \bullet \stackrel{\text{def}}{=} \xi \rfloor d \bullet + d(\xi \rfloor \bullet) \quad (\bullet = X, \theta^a, \phi_A) \tag{B.3}$$

を[19] 代入すると、

$$\begin{aligned} d(\xi \rfloor X) &= [\xi \rfloor d\theta^a + d(\xi \rfloor \theta^a)] \wedge \frac{\partial X}{\partial \theta^a} + [\xi \rfloor d\phi_A + d(\xi \rfloor \phi_A)] \wedge \frac{\partial X}{\partial \phi_A} \\ &= \xi \rfloor d\theta^a \wedge \frac{\partial X}{\partial \theta^a} + d\Big[(\xi \rfloor \theta^a) \frac{\partial X}{\partial \theta^a}\Big] - (\xi \rfloor \theta^a) d \frac{\partial X}{\partial \theta^a} \\ &\quad + (\xi \rfloor d\phi_A) \wedge \frac{\partial X}{\partial \phi_A} + d\Big[(\xi \rfloor \phi_A) \wedge \frac{\partial X}{\partial \phi_A}\Big] + (-1)^{p_A} (\xi \rfloor \phi_A) \wedge d \frac{\partial X}{\partial \phi_A} \end{aligned} \tag{B.4}$$

を得る ($\phi_A$ は $p_A$ 形式)。これを

$$dA + B = 0 \tag{B.5}$$

と書くと、

$$A = -\xi \rfloor X + (\xi \rfloor \theta^a) \frac{\partial X}{\partial \theta^a} + (\xi \rfloor \phi_A) \wedge \frac{\partial X}{\partial \phi_A} \tag{B.6}$$

である。$A = \xi^a A_a$, $B = \xi^a B_a$ と書くと、

$$d\xi^a \wedge A_a + \xi^a \wedge (dA_a + B_a) = 0 \tag{B.7}$$

であり、$\xi^a$ と $d\xi^a$ は独立なので、$A_a = 0$ と $B_a = 0$, つまり、

$$A = 0, \quad B = 0 \tag{B.8}$$

である。$A = 0$ に $\xi = e_a$ を代入して、(B.1) を得る。

---

[19] $\mathcal{L}_\xi$ はリー微分である。$\xi = \xi^a e_a$ はベクトル場である。$\delta$ は微小なので、$\xi^a$ も微小であるべきであるが、(B.2) は $\xi^a$ について線形なので、$\xi^a$ が有限の大きさでも成立する。

# C　重力場のラグランジアン形式の書き換え

## C.1　$*R$ の評価

$*R$ は、

$$*R = (d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \wedge \omega^{cb}) \wedge \eta_{ab} \tag{C.1}$$

で与えられ、スピン接続は、

$$\omega^{ab} = A^{ab} + K^{ab} \tag{C.2}$$

で与えられる。ここで、$K_{ab} \stackrel{\mathrm{def}}{=} K_{abc}\theta^c$ であり、$K_{abc}$ は (3.4) で与えられる。$A^{ab}$ は Levi-Cività 接続である。$*R$ は以下のようになる：

$$\begin{aligned} *R &= *R^* + dK^{ab} \wedge \eta_{ab} + (A^a{}_c \wedge K^{cb} + K^a{}_c \wedge A^{cb} + K^a{}_c \wedge K^{cb}) \wedge \eta_{ab} \\ &= *R^* + d(K^{ab} \wedge \eta_{ab}) + K^{ab} \wedge d\eta_{ab} \\ &\quad +(A^a{}_c \wedge K^{cb} + K^a{}_c \wedge A^{cb} + K^a{}_c \wedge K^{cb}) \wedge \eta_{ab} \\ &\equiv *R^* + d(K^{ab} \wedge \eta_{ab}) + \mathcal{K}. \end{aligned} \tag{C.3}$$

$R^*$ はリーマン接続でのスカラー曲率である。また、(A.12) より、

$$\begin{aligned} K^{ab} \wedge d\eta_{ab} &= K^{ab} \wedge (A^c{}_a \wedge \eta_{cb} + A^c{}_b \wedge \eta_{ac}) \\ &= (K^{cb} \wedge A^a{}_c - K^a{}_c \wedge A^{cb}) \wedge \eta_{ab} \end{aligned} \tag{C.4}$$

なので、

$$\mathcal{K} = K^a{}_c \wedge K^{cb} \wedge \eta_{ab} \tag{C.5}$$

となる。よって、

$$*R = *R^* + d(K^{ab} \wedge \eta_{ab}) + K^a{}_c \wedge K^{cb} \wedge \eta_{ab} \tag{C.6}$$

を得る。

## C.2　$N'$ の評価

(3.13) の $W'$ は、

$$\begin{aligned} W' &= *R - d(\omega^{ab} \wedge \eta_{ab}) \\ &= *R - d(A^{ab} \wedge \eta_{ab}) - d(K^{ab} \wedge \eta_{ab}) \\ &= *R^* - d(A^{ab} \wedge \eta_{ab}) + \mathcal{K} \\ &= W^* + \mathcal{K} \end{aligned} \tag{C.7}$$

となる。ここで、$W^*$ は、(3.34) の $W$ でスピン接続を Levi-Cività 接続としたものであり、

$$W^* = A^a{}_c \wedge A^{cb} \wedge \eta_{ba} = -A^a{}_c \wedge A^{cb} \wedge \eta_{ab} \tag{C.8}$$

である。

$\mathcal{K}$ は $(-N^*)$ で、$A_{ab}$ を $K_{ab}$ に置き換えたものである。また、$-\frac{1}{2\kappa}\mathcal{K}$ は遠平行性理論でのラグランジアン形式である [24, 25]。

# D　エネルギー・運動量形式の計算

この章では、エネルギー・運動量形式の計算の仕方を解説する [5]。複素スカラー場 (0 形式) を $\phi$ とすると、そのラグランジアン形式には、$-d\phi^* \wedge *d\phi$ が含まれる。また、$A$ を電磁場 (1 形式) とし、$F = dA$ とすると、電磁場のラグランジアン形式には、$-\frac{1}{2}F \wedge *F$ が含まれる。ここでは、$G$, $H$ を $p$ 形式としたとき、$L \stackrel{\mathrm{def}}{=} G \wedge *H$ のフレーム形式 $\theta^a$ による微分を考える。このとき、

$$\delta L = \delta G \wedge *H + G \wedge \delta * H \tag{D.1}$$

である。$\delta$ は、$\theta^a$ についての変分である[20)]。今、$\theta^{a_1 a_2 \cdots a_p} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \theta^{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{a_p}$ とし、

$$G = G_{a_1 a_2 \cdots a_p} \theta^{a_1 a_2 \cdots a_p} \tag{D.2}$$

と置くと、

$$G \wedge \delta * H = G_{a_1 a_2 \cdots a_p} (\theta^{a_1 a_2 \cdots a_p} \wedge \delta * H) \tag{D.3}$$

と書ける。さて、

$$\theta^{a_1 a_2 \cdots a_p} \wedge *H = H \wedge *\theta^{a_1 a_2 \cdots a_p} = H \wedge \eta^{a_1 a_2 \cdots a_p} \tag{D.4}$$

である。これより、

$$\begin{aligned} \theta^{a_1 a_2 \cdots a_p} \wedge \delta * H = {} & \delta H \wedge \eta^{a_1 a_2 \cdots a_p} + H \wedge \delta \eta^{a_1 a_2 \cdots a_p} \\ & - \delta \theta^{a_1 a_2 \cdots a_p} \wedge *H \end{aligned} \tag{D.5}$$

を得る。ここで、$e_a$ を $\theta^a$ の双対基底 $(e_a \rfloor \theta^b = \delta^b_a)$ とする。$\rfloor$ は内部積である。このとき、

$$\delta \theta^{a_1 a_2 \cdots a_p} = \delta \theta^b \wedge (e_b \rfloor \theta^{a_1 a_2 \cdots a_p}), \tag{D.6}$$

$$\delta \eta^{a_1 a_2 \cdots a_p} = \delta \theta^b \wedge (e_b \rfloor \eta^{a_1 a_2 \cdots a_p}) \tag{D.7}$$

である (後者は付録 A で示す)。よって、

$$\begin{aligned} \theta^{a_1 a_2 \cdots a_p} \wedge \delta * H &= \delta H \wedge \eta^{a_1 a_2 \cdots a_p} + H \wedge \delta \theta^b \wedge (e_b \rfloor \eta^{a_1 a_2 \cdots a_p}) \\ &\quad - \delta \theta^b \wedge (e_b \rfloor \theta^{a_1 a_2 \cdots a_p}) \wedge *H \\ &= \delta H \wedge \eta^{a_1 a_2 \cdots a_p} + \delta \theta^b \wedge \Big[ (-1)^p H \wedge (e_b \rfloor \eta^{a_1 a_2 \cdots a_p}) \\ &\quad - (e_b \rfloor \theta^{a_1 a_2 \cdots a_p}) \wedge *H \Big] \end{aligned} \tag{D.8}$$

を得る。これに $G_{a_1 a_2 \cdots a_p}$ をかけて、(D.2) を用いると、

$$\begin{aligned} G \wedge \delta * H = {} & \delta H \wedge *G + \delta \theta^a \wedge \Big[ (-1)^p H \wedge (e_a \rfloor * G) \\ & - (e_a \rfloor G) \wedge *H \Big] \end{aligned} \tag{D.9}$$

20) 上式から (D.13) までの公式は、$\delta$ が他の微分形式についての変分を含んでいても成り立つ。

となる。よって、

$$\delta L = \delta G \wedge *H + \delta H \wedge *G + \delta\theta^a \wedge \Big[(-1)^p H \wedge (e_a \rfloor *G) \\ -(e_a \rfloor G) \wedge *H\Big] \tag{D.10}$$

となる。ところで、

$$e_a \rfloor L = (e_a \rfloor H) \wedge *G + (-1)^p H \wedge (e_a \rfloor *G) \tag{D.11}$$

なので、

$$(-1)^p H \wedge (e_a \rfloor *G) = e_a \rfloor L - (e_a \rfloor H) \wedge *G \tag{D.12}$$

であり、これを (D.10) に代入して、

$$\delta L = \delta G \wedge *H + \delta H \wedge *G \\ +\delta\theta^a \wedge \Big[e_a \rfloor L - (e_a \rfloor H) \wedge *G - (e_a \rfloor G) \wedge *H\Big] \tag{D.13}$$

を得る。これより、例えば、電磁場のラグランジアン形式 $L_F \overset{\mathrm{def}}{=} -\frac{1}{2} F \wedge *F$ に対して、

$$\frac{\partial L_F}{\partial \theta^a} = e_a \rfloor L_F + (e_a \rfloor F) \wedge *F \tag{D.14}$$

となる。

# E　(3.76) の証明

(3.76) を証明する。(3.74) の $b_{c,ab}$ は、

$$b_{c,ab} = \eta_{dc} S^d{}_{ab} + \frac{1}{2\kappa} C^d{}_{ce} \theta^e \wedge \eta_{dab} \tag{E.1}$$

となる。これが、

$$B_{c,ab} = \frac{1}{2\kappa} \Theta^d \wedge \eta_{abcd} \tag{E.2}$$

と等しい事を示す。

(E.1) の第 2 項において、

$$\begin{aligned} C^d{}_{ce} \theta^e \wedge \eta_{dab} &= C^d{}_{ce} (\delta^e_d \eta_{ab} - \delta^e_a \eta_{db} + \delta^e_b \eta_{da}) \\ &= C_c \eta_{ab} - C^d{}_{ca} \eta_{db} + C^d{}_{cb} \eta_{da} \\ &= C_c \eta_{ab} + 2C^d{}_{c[a} \eta_{b]d} \end{aligned} \tag{E.3}$$

である。ここで、(A.2) と $C_a = C^b{}_{ab}$ とを用いた。また、(E.1) の第 1 項において、

$$\begin{aligned} 2\kappa \eta_{dc} S^d{}_{ab} &= \eta_{dc} (C_a \delta^d_b - C^d{}_{ab} - C_b \delta^d_a) \\ &= C_a \eta_{bc} - C^d{}_{ab} \eta_{dc} - C_b \eta_{ac} \\ &= 2C_{[a} \eta_{b]c} - C^d{}_{ab} \eta_{dc} \end{aligned} \tag{E.4}$$

である。ここで、(3.28) を用いた。よって、

$$2\kappa b_{c,ab} = C_c \eta_{ab} + 2C^d{}_{c[a} \eta_{b]d} + 2C_{[a} \eta_{b]c} + C^d{}_{ab} \eta_{cd} \tag{E.5}$$

となる。

また、

$$2\kappa B_{c,ab} = \frac{1}{2} C^d{}_{ef} \theta^e \wedge \theta^f \wedge \eta_{abcd} \tag{E.6}$$

である。(A.1), (A.2) より、

$$\begin{aligned} \theta^e \wedge \theta^f \wedge \eta_{abcd} = 2(&\delta^e_{[c} \delta^f_{d]} \eta_{ab} + \delta^e_{[d} \delta^f_{b]} \eta_{ac} + \delta^e_{[b} \delta^f_{c]} \eta_{ad} \\ &+ \delta^e_{[a} \delta^f_{d]} \eta_{bc} + \delta^e_{[c} \delta^f_{a]} \eta_{bd} + \delta^e_{[a} \delta^f_{b]} \eta_{cd}) \end{aligned} \tag{E.7}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} 2\kappa B_{c,ab} &= C^d{}_{cd} \eta_{ab} + C^d{}_{db} \eta_{ac} + C^d{}_{bc} \eta_{ad} + C^d{}_{ad} \eta_{bc} + C^d{}_{ca} \eta_{bd} + C^d{}_{ab} \eta_{cd} \\ &= C_c \eta_{ab} - C_b \eta_{ac} + C^d{}_{bc} \eta_{ad} + C_a \eta_{bc} + C^d{}_{ca} \eta_{bd} + C^d{}_{ab} \eta_{cd} \\ &= C_c \eta_{ab} + 2C_{[a} \eta_{b]c} + 2C^d{}_{c[a} \eta_{b]d} + C^d{}_{ab} \eta_{cd} \end{aligned} \tag{E.8}$$

となる。これは (E.5) と一致する。よって、$b_{c,ab} = B_{c,ab}$ が示された。

# F　捩率がない場合の2階形式の重力場

## F.1　ラグランジュ形式

重力のラグランジアン形式 (3.12) の変分は、

$$\begin{aligned}\delta L(\theta, d\theta) = & \ \delta\theta^c \wedge \Big(\frac{1}{2\kappa}[\Omega^{ab} \wedge \eta_{abc} - d(\omega^{ab} \wedge \eta_{abc})] + \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta, d\theta)}{\partial \theta^c}\Big) \\ & +\delta d\theta^c \wedge \Big[\frac{1}{2\kappa}\omega^{ab} \wedge \eta_{abc} + \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta, d\theta)}{\partial d\theta^c}\Big] \\ & +\delta\omega^{ab}(\theta, d\theta) \wedge \frac{1}{2\kappa}[d\eta_{ab} - \omega^c{}_a \wedge \eta_{cb} - \omega^c{}_b \wedge \eta_{ac}] \end{aligned} \tag{F.1}$$

とも書ける。今、$\delta\omega^{ab}$ の係数が 0 だと要請する：

$$d\eta_{ab} - \omega^c{}_a \wedge \eta_{cb} - \omega^c{}_b \wedge \eta_{ac} = 0. \tag{F.2}$$

このとき、$\omega_{ab} = A_{ab}$ となる。また、(F.1) より、

$$\frac{\partial L}{\partial \theta^c} = \frac{1}{2\kappa}[F^{ab} \wedge \eta_{abc} - d(A^{ab} \wedge \eta_{abc})] + \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta, d\theta)}{\partial \theta^c}, \tag{F.3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial d\theta^c} = \frac{1}{2\kappa}A^{ab} \wedge \eta_{abc} + \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta, d\theta)}{\partial d\theta^c} \tag{F.4}$$

を得る。ただし、$\omega_{ab} = A_{ab}$ を用いた。$F^a_{\ b}$ はレビ=チビタ接続に対する曲率 2 形式である。よって、オイラー・ラグランジュ方程式 $\partial L/\partial\theta^c + d(\partial L/\partial d\theta^c) = 0$ は、

$$-\frac{1}{2}F^{ab} \wedge \eta_{abc} = \kappa\mathcal{T}_c \tag{F.5}$$

となる。ただし、

$$\mathcal{T}_c \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta, d\theta)}{\partial \theta^c} + d\frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta, d\theta)}{\partial d\theta^c} \tag{F.6}$$

である。

## F.2　準備

共役形式は、

$$\begin{aligned}\pi_a &= \frac{1}{2\kappa}A^{bc} \wedge \eta_{abc} + \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta, d\theta)}{\partial d\theta^a} \\ &= \tilde{\pi}_a + p_a, \end{aligned} \tag{F.7}$$

$$\tilde{\pi}_a \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2\kappa}A^{bc} \wedge \eta_{abc}, \tag{F.8}$$

$$p_c \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta, d\theta)}{\partial d\theta^c} = \eta^{ab}\Big(-\frac{1}{2}S_{c,ab} + S_{[a,b]c}\Big) =: \eta^{ab}\mathcal{S}_{cab} \tag{F.9}$$

となる。Hamiltion form は、

$$
\begin{aligned}
H &\overset{\text{def}}{=} d\theta^a \wedge \pi_a - L \\
&= d\theta^a \wedge (\tilde{\pi}_a + p_a) - \frac{W^*}{2\kappa} - L_{\text{mat}}
\end{aligned}
\tag{F.10}
$$

であり、

$$
d\theta^a \wedge \tilde{\pi}_a = \frac{W^*}{\kappa} \tag{F.11}
$$

なので、

$$
H = \frac{W^*}{2\kappa} + d\theta^a \wedge p_a - L_{\text{mat}} \tag{F.12}
$$

となる。今、

$$
d\theta^a = \frac{1}{2}\Delta^a{}_{bc}\theta^b \wedge \theta^c, \quad \omega_{ab} = \omega_{abc}\theta^c \tag{F.13}
$$

と置くと、

$$
\begin{aligned}
W_{a,bc} &\overset{\text{def}}{=} d\theta_a \wedge \eta_{bc} \\
&= \frac{1}{2}\Delta_{ade}\theta^d \wedge \theta^e \wedge \eta_{bc} \\
&= \frac{1}{2}\Delta_{ade}\theta^d \wedge \theta^e \wedge \eta_{bc} \\
&= \frac{1}{2}\Delta_{ade}(\delta^d_b\delta^e_c - \delta^d_c\delta^e_b)\eta \\
&= \Delta_{abc}\eta
\end{aligned}
\tag{F.14}
$$

となる。よって、

$$
\begin{aligned}
d\theta^a \wedge p_a &= d\theta^a \wedge \eta^{bc}\mathcal{S}_{abc} \\
&= W^{a,bc}\mathcal{S}_{abc} = \Delta_{abc}\mathcal{S}^{abc}\eta
\end{aligned}
\tag{F.15}
$$

である。これより、

$$
H = H^{(1)}_{\text{G}} + H^{(2)}_{\text{G}} - L_{\text{mat}} =: H_{\text{G}} - L_{\text{mat}}, \tag{F.16}
$$

$$
H^{(1)}_{\text{G}} \overset{\text{def}}{=} \frac{W^*}{2\kappa} = \frac{1}{2\kappa}(A_{abc}A^{bca} + A_aA^a)\eta, \tag{F.17}
$$

$$
H^{(2)}_{\text{G}} \overset{\text{def}}{=} \Delta_{abc}\mathcal{S}^{abc}\eta = 2A_{a[bc]}\mathcal{S}^{abc}\eta \tag{F.18}
$$

となる。ここで、また、

$$
\begin{aligned}
d\theta_a &= -A_{ab} \wedge \theta^b \\
&= A_{a[bc]}\theta^b \wedge \theta^c
\end{aligned}
\tag{F.19}
$$

より、

$$
\Delta_{abc} = 2A_{a[bc]} \tag{F.20}
$$

であることを用いた。
(3.51) と同様に、

$$A_{abc} \;=\; \kappa\Big[v_{c,ab} + \frac{1}{d-2}(\mathring{g}_{ac}v_b - \mathring{g}_{bc}v_a)\Big], \tag{F.21}$$

$$v_{c,ab} \overset{\text{def}}{=} -*V_{c,ab}\,, \quad V_{c,ab} \overset{\text{def}}{=} \tilde{\pi}_c \wedge \theta_a \wedge \theta_b \tag{F.22}$$

である。また、

$$\begin{aligned}\delta v_{c,ab}\eta &= \delta V_{c,ab} - v_{c,ab}\delta\eta \\ &= \delta\tilde{\pi}_c \wedge \theta_a \wedge \theta_b + \tilde{\pi}_c \wedge \delta\theta_a \wedge \theta_b + \tilde{\pi}_c \wedge \theta_a \wedge \delta\theta_b - v_{c,ab}\delta\theta^a \wedge \eta_a\end{aligned} \tag{F.23}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\pi}_c &= \delta\pi_c - \delta p_c \\ &= \delta\pi_c - \delta\eta^{ab}\mathcal{S}_{cab} \\ &= \delta\pi_c - \delta\theta^d \wedge \eta^{ab}{}_d\mathcal{S}_{cab}\end{aligned} \tag{F.24}$$

である。

## F.3 $\pi_a$ での変分

まず、(3.61) と同様に、

$$\frac{\partial H_{\mathrm{G}}^{(1)}}{\partial \pi_c} = -A^c{}_a \wedge \theta^a \tag{F.25}$$

である。
また、

$$\delta H_{\mathrm{G}}^{(2)} = 2\delta A_{a[bc]}\mathcal{S}^{abc}\eta = 2\kappa a_{abc}\mathcal{S}^{abc}, \tag{F.26}$$

$$\begin{aligned}a_{abc} &= \delta\pi_c \wedge \theta_a \wedge \theta_b - \frac{1}{d-2}(\mathring{g}_{ac}\delta\pi_d \wedge \theta_b \wedge \theta^d - \mathring{g}_{bc}\delta\pi_d \wedge \theta_a \wedge \theta^d) \\ &= \delta\pi_d \wedge \Big[\delta^d_c\theta_a \wedge \theta_b - \frac{1}{d-2}(\mathring{g}_{ac}\theta_b \wedge \theta^d - \mathring{g}_{bc}\theta_a \wedge \theta^d)\Big]\end{aligned} \tag{F.27}$$

なので、

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_{\mathrm{G}}^{(2)}}{\partial \pi_d} &= 2\kappa\mathcal{S}^{abc}\Big[\delta^d_c\theta_a \wedge \theta_b - \frac{1}{d-2}(\mathring{g}_{ac}\theta_b \wedge \theta^d - \mathring{g}_{bc}\theta_a \wedge \theta^d)\Big] \\ &= 2\kappa\Big[\mathcal{S}_{[ab]}{}^d\theta^a \wedge \theta^b - \frac{1}{d-2}\mathcal{S}_a\theta^a \wedge \theta^d\Big]\end{aligned} \tag{F.28}$$

となる。ここで、

$$\mathcal{S}_{cab} = -\frac{1}{2}S_{c,ab} + S_{[a,b]c} = \frac{1}{2}(S_{a,bc} - S_{b,ac} - S_{c,ab}) \tag{F.29}$$

なので、

$$\mathcal{S}_{abd} = -\frac{1}{2}(S_{b,ad} + S_{d,ba} + S_{a,bd}), \tag{F.30}$$

$$\mathcal{S}_{[ab]}{}^{d} = -\frac{1}{2}S^{d}{}_{ba} = \frac{1}{2}S^{d}{}_{ab} \tag{F.31}$$

および、

$$\mathcal{S}_{a} = -S_{a} \tag{F.32}$$

なので、

$$\frac{\partial H_{\mathrm{G}}^{(2)}}{\partial \pi_{d}} = \kappa\Big[S^{d}{}_{ab}\theta^{a} \wedge \theta^{b} + \frac{2}{d-2}S_{a}\theta^{a} \wedge \theta^{d}\Big] \tag{F.33}$$

となる。

また、

$$\begin{aligned}\delta L_{\mathrm{mat}} &= \delta A_{ab} \wedge S^{d,ab}\eta_{d} \\ &= \delta A_{abc}S^{d,ab}\theta^{c} \wedge \eta_{d} \\ &= \delta A_{abc}S^{c,ab}\eta = a_{abc}S^{c,ab}\end{aligned} \tag{F.34}$$

なので、

$$\delta L_{\mathrm{mat}} = \delta\pi_{d} \wedge \kappa S^{c,ab}\Big[\delta^{d}_{c}\theta_{a} \wedge \theta_{b} - \frac{1}{d-2}(\mathring{g}_{ac}\theta_{b} \wedge \theta^{d} - \mathring{g}_{bc}\theta_{a} \wedge \theta^{d})\Big] \tag{F.35}$$

であり、

$$\frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial \pi_{d}} = \kappa\Big[S^{d}{}_{ab}\theta^{a} \wedge \theta^{b} + \frac{2}{d-2}S_{a}\theta_{a} \wedge \theta^{d}\Big] \tag{F.36}$$

なので、

$$\frac{\partial H}{\partial \pi_{c}} = -A^{c}{}_{a} \wedge \theta^{a} \tag{F.37}$$

となる。

## F.4 $\theta^a$ での変分

$X$ を $d$ 形式とし、これは $\theta^a$, $\pi_a$ と $\{\psi^A\}$ で表されるとする。この時、(B.1) より、

$$\frac{\partial X}{\partial \theta^{a}} = e_{a}\rfloor X - (e_{a}\rfloor\pi_{b}) \wedge \frac{\partial X}{\partial \pi_{b}} - (e_{a}\rfloor\psi^{A}) \wedge \frac{\partial X}{\partial \psi^{A}} \tag{F.38}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}e_{a}\rfloor\pi_{b} &= \frac{1}{2\kappa}e_{a}\rfloor(A^{cd} \wedge \eta_{cdb}) + e_{a}\rfloor\eta^{cd}\mathcal{S}_{bcd} \\ &= \frac{1}{2\kappa}(A^{cd}{}_{a}\eta_{cdb} - A^{cd} \wedge \eta_{cdba}) + \eta_{cda}\mathcal{S}_{b}{}^{cd}\end{aligned} \tag{F.39}$$

である。よって、

$$-(e_a\rfloor\pi_b)\wedge\frac{\partial H}{\partial\pi_b}=\frac{1}{2\kappa}(A^{cd}{}_a\eta_{cdb}-A^{cd}\wedge\eta_{cdba}+\eta_{cda}\mathcal{S}_b{}^{cd})\wedge A^b{}_e\wedge\theta^e$$
$$=\frac{1}{2\kappa}(A^{cd}{}_aA^b{}_e\wedge\theta^e\wedge\eta_{cdb}-A^{cd}\wedge A^b{}_e\wedge\theta^e\wedge\eta_{cdba})$$
$$-\eta_{cda}\wedge\theta^e\wedge\theta^f\mathcal{S}^{bcd}A_{bef}\tag{F.40}$$

である。ここで、

$$\eta_{cda}\wedge\theta^e\wedge\theta^f\mathcal{S}^{bcd}A_{bef}=2\mathcal{S}^{bcd}(\eta_cA_{b[da]}-\eta_dA_{b[ca]}+\eta_aA_{b[cd]})\tag{F.41}$$

である。よって、

$$\frac{\partial H}{\partial\theta^a}=\frac{1}{2\kappa}(A^{cd}\wedge A^b{}_c\wedge\eta_{dba}+A^b{}_a\wedge A^{cd}\wedge\eta_{cdb})+e_a\rfloor H^{(2)}_{\mathrm{G}}$$
$$-2\mathcal{S}^{bcd}(\eta_cA_{b[da]}-\eta_dA_{b[ca]}+\eta_aA_{b[cd]})$$
$$-\frac{\partial l}{\partial\theta^a}-e_a\rfloor L'\tag{F.42}$$

となる (第 1 項を得るのは (3.69) を得るのと同様である)。ここで、

$$L_{\mathrm{mat}}=l(\theta)+S^{c,ab}A_{ab}\wedge\eta_c=:l(\theta)+L'\tag{F.43}$$

と置いた。$l(\theta)$ は $\pi_a$, $d\theta^a$ に依存しないとする。また、

$$e_a\rfloor H^{(2)}_{\mathrm{G}}=2A_{b[cd]}\mathcal{S}^{bcd}\eta_a\tag{F.44}$$

なので、

$$\frac{\partial H}{\partial\theta^a}=\frac{1}{2\kappa}(A^{cd}\wedge A^b{}_c\wedge\eta_{dba}+A^b{}_a\wedge A^{cd}\wedge\eta_{cdb})$$
$$-\frac{\partial l}{\partial\theta^a}-e_a\rfloor L'-2\mathcal{S}^{bcd}(\eta_cA_{b[da]}-\eta_dA_{b[ca]})\tag{F.45}$$

となる。

以下では、(F.45) の第 2 行目が、

$$-\frac{\partial l}{\partial\theta^a}-e_a\rfloor L'-2\mathcal{S}^{bcd}(\eta_cA_{b[da]}-\eta_dA_{b[ca]})=-\frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta,d\theta)}{\partial\theta^a}\tag{F.46}$$

であることを示す。(B.1) より、

$$\frac{\partial L'}{\partial\theta^a}=e_a\rfloor L'-(e_a\rfloor d\theta^b)\wedge\frac{\partial L'}{\partial d\theta^b}\tag{F.47}$$

なので、

$$(e_a\rfloor d\theta^b)\wedge\frac{\partial L'}{\partial d\theta^b}=-2\mathcal{S}^{bcd}(\eta_cA_{b[da]}-\eta_dA_{b[ca]})=-4\mathcal{S}^{bcd}\eta_cA_{b[da]}\tag{F.48}$$

を示せばよい。まず、

$$e_a\rfloor d\theta^b=\Delta^b{}_{ac}\theta^c=2A^b{}_{[ac]}\theta^c\tag{F.49}$$

であり、

$$\frac{\partial L'}{\partial d\theta^b} = \eta_{de}\mathcal{S}_b{}^{de} \tag{F.50}$$

なので、

$$\begin{aligned}(e_a\rfloor d\theta^b)\wedge\frac{\partial L'}{\partial d\theta^b} &= 2A^b{}_{[ac]}\theta^c\wedge\eta_{de}\mathcal{S}_b{}^{de}\\ &= 2A_{b[ac]}(-\delta^c_d\eta_e+\delta^c_e\eta_d)\mathcal{S}^{bde}\\ &= 4A_{b[ae]}\eta_d\mathcal{S}^{bde} = -4\mathcal{S}^{bcd}\eta_c A_{b[da]}\end{aligned} \tag{F.51}$$

である。よって (F.46) が示された。したがって、

$$\frac{\partial H}{\partial\theta^a} = \frac{1}{2\kappa}(A^{cd}\wedge A^b{}_c\wedge\eta_{dba}+A^b{}_a\wedge A^{cd}\wedge\eta_{cdb}) - \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta,d\theta)}{\partial\theta^a} \tag{F.52}$$

である。

## F.5　正準方程式

よって、正準方程式は、

$$d\theta^a = -A^c{}_a\wedge\theta^a, \tag{F.53}$$

$$d\pi_a = \frac{1}{2\kappa}(A^{cd}\wedge A^b{}_c\wedge\eta_{dba}+A^b{}_a\wedge A^{cd}\wedge\eta_{cdb}) - \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta,d\theta)}{\partial\theta^a} \tag{F.54}$$

となる。第 2 式は、

$$d\tilde{\pi}_a = \frac{1}{2\kappa}(A^{cd}\wedge A^b{}_c\wedge\eta_{dba}+A^b{}_a\wedge A^{cd}\wedge\eta_{cdb}) - \mathcal{T}_a, \tag{F.55}$$

$$\mathcal{T}_a \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta,d\theta)}{\partial\theta^a} + d\frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta,d\theta)}{\partial d\theta^a} \tag{F.56}$$

とも書け、これは、

$$-\frac{1}{2}F^{ab}\wedge\eta_{abc} = \kappa\mathcal{T}_c \tag{F.57}$$

と等価である。

## F.6　$\partial L_{\mathrm{mat}}/\partial d\theta^a$ の計算

最後に、

$$\frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta,d\theta)}{\partial d\theta^c} = \eta^{ab}\Big(-\frac{1}{2}S_{c,ab}+S_{[a,b]c}\Big) \tag{F.58}$$

を示す。まず、(F.14) より、$\xi$ を $d$ 形式として、

$$\delta\Delta_{abc}\xi = (-\delta W_{a,bc}+\Delta_{abc}\delta\eta) * \xi \tag{F.59}$$

である ((3.53) を得るのと同様である)。また、

$$A_{abc} = \frac{1}{2}(\Delta_{cba} + \Delta_{abc} + \Delta_{bca}) \tag{F.60}$$

なので、

$$\delta A_{abc}\xi = -\frac{1}{2}(\delta W_{cba} + \delta W_{abc} + \delta W_{bca})(*\xi) + A_{abc}\delta\eta(*\xi) \tag{F.61}$$

となる。$\xi = \eta$ として、

$$\delta A_{abc}\eta = \frac{1}{2}(\delta W_{cba} + \delta W_{abc} + \delta W_{bca}) - A_{abc}\delta\theta^d \wedge \eta_d \tag{F.62}$$

を得る。この式から (F.58) を得る。

## G　ディラック場

この節では $d=4$ とする。ディラック場のラグランジアン形式は、

$$
\begin{aligned}
L_{\mathrm{D}}^{\beta}=&-\frac{1+\beta}{2}\bar{\psi}\gamma_c(d\psi+\frac{1}{4}\gamma_{ab}\omega^{ab}\psi)\wedge\eta^c+\frac{1-\beta}{2}(d\bar{\psi}-\frac{1}{4}\bar{\psi}\gamma_{ab}\omega^{ab})\gamma_c\psi\wedge\eta^c-m\bar{\psi}\psi\eta \\
&-\frac{\beta}{2}C_a\bar{\psi}\gamma^a\psi\eta \qquad \text{(G.1)}
\end{aligned}
$$

である。ただし、$\bar{\psi}\stackrel{\mathrm{def}}{=}i\psi^{\dagger}\gamma^0=(\bar{\psi}_1,\bar{\psi}_2,\bar{\psi}_3,\bar{\psi}_4)$ および $\gamma_{ab}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\gamma_{[a}\gamma_{b]}$ であり、$\gamma^a$ はガンマ行列で、$\gamma^a\gamma^b+\gamma^b\gamma^a=2\mathring{g}^{ab}$ を満たす。$\beta$ は任意の実数で、$m$ は質量である。$L_{\mathrm{D}}^{\beta}$ は、

$$
L_{\mathrm{D}}^{\beta}=L_{\mathrm{D}}^{\beta=0}-\frac{\beta}{2}d(\eta^a\bar{\psi}\gamma_a\psi) \qquad \text{(G.2)}
$$

と書ける。これを導くのに、

$$
d\eta_a=(\omega_a+C_a)\eta\,,\quad \gamma_c\frac{1}{4}\gamma_{ab}\omega^{ab}\wedge\eta^c=\frac{1}{4}\gamma_{ab}\omega^{ab}\gamma_c\wedge\eta^c+\gamma^a\omega_a\eta \qquad \text{(G.3)}
$$

を使う ($\omega_a\stackrel{\mathrm{def}}{=}\omega^b{}_{ab}$)。ディラック場はローレンツ群の表現であり、スピノール場は接ミンコフスキー空間で定義されるので、フレーム形式の使用は、たとえ平坦時空でも必要である。接続 $\omega^a{}_b$ はローレンツ群のゲージ場である。$C_a$ は $\psi$ および $\bar{\psi}$ とは独立とみなす。ここでは簡単のため、ディラック場はグラスマン数ではなく、通常の数として扱う。Euler-Lagrange 方程式 $\partial L_{\mathrm{D}}^{\beta}/\partial\psi^A-d(\partial L_{\mathrm{D}}^{\beta}/\partial d\psi^A)=0$ および $\partial L_{\mathrm{D}}^{\beta}/\partial\bar{\psi}_A-d(\partial L_{\mathrm{D}}^{\beta}/\partial d\bar{\psi}_A)=0$ $(A=1,2,3,4)$ は以下となる：

$$
(d\bar{\psi}-\frac{1}{4}\bar{\psi}\gamma_{ab}\omega^{ab})\gamma_c\wedge\eta^c-m\bar{\psi}\eta+\frac{1}{2}C_a\bar{\psi}\gamma^a\eta=0, \qquad \text{(G.4)}
$$

$$
\gamma_c(d\psi+\frac{1}{4}\gamma_{ab}\omega^{ab}\psi)\wedge\eta^c+m\psi\eta+\frac{1}{2}C_a\gamma^a\psi\eta=0. \qquad \text{(G.5)}
$$

ただし、(G.3) を用いた。(G.4) は (G.5) のエルミート共役である。

$\psi^A$ と $\bar{\psi}_A$ の共役形式は、

$$
\Pi_A^{\beta}=\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{\beta}}{\partial d\psi^A}=-\frac{1+\beta}{2}(\bar{\psi}\gamma_c)_A\eta^c,\ \bar{\Pi}^{\beta A}=\frac{\partial L_{\mathrm{D}}^{\beta}}{\partial d\bar{\psi}_A}=\frac{1-\beta}{2}(\gamma_c\psi)^A\eta^c \qquad \text{(G.6)}
$$

である。対応する De Donder-Weyl 理論の $\pi^{\mu}_{(\beta)A}$ と $\bar{\pi}^{A\mu}_{(\beta)}$ は、

$$
\pi^{\mu}_{(\beta)A}=-\frac{1+\beta}{2}(\bar{\psi}\gamma_c)_A\theta^{c\mu},\ \bar{\pi}^{A\mu}_{(\beta)}=\frac{1-\beta}{2}\theta^{c\mu}(\gamma_c\psi)^A \qquad \text{(G.7)}
$$

である。$\pi^0_{(\beta)},\cdots,\pi^3_{(\beta)}(\bar{\pi}^0_{(\beta)},\cdots,\bar{\pi}^3_{(\beta)})$ は互いに独立ではなく、$\bar{\psi}(\psi)$ とも独立ではない。よって、ラグランジュの未定乗数法を用いる必要がある。Hamilton form は、

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{D,tot}}^{\beta}&=H_{\mathrm{D}}^{\beta}+\lambda^A\wedge\Big[\Pi_A^{\beta}+\frac{1+\beta}{2}(\bar{\psi}\gamma_c)_A\eta^c\Big]+\bar{\lambda}_A\wedge\Big[\bar{\Pi}^{\beta A}-\frac{1-\beta}{2}(\gamma_c\psi)^A\eta^c\Big], \qquad \text{(G.8)}\\
H_{\mathrm{D}}^{\beta}&=d\psi^A\wedge\Pi_A^{\beta}+d\bar{\psi}_A\wedge\bar{\Pi}^{\beta A}-L_{\mathrm{D}}^{\beta}\\
&=\frac{1+\beta}{2}\bar{\psi}\gamma_c\frac{1}{4}\gamma_{ab}\omega^{ab}\psi\wedge\eta^c+\frac{1-\beta}{2}\frac{1}{4}\bar{\psi}\gamma_{ab}\omega^{ab}\gamma_c\psi\wedge\eta^c+m\bar{\psi}\psi\eta+\frac{\beta}{2}C_c\bar{\psi}\gamma^c\psi\eta. \qquad \text{(G.9)}
\end{aligned}
$$

で与えられる。$\lambda^A$ と $\bar{\lambda}_A$ は Lagrange multiplier 1 形式である。通常の解析力学のハミルトニアン密度は $\partial_i\psi$, $\partial_i\bar{\psi}$ $(i=1,2,3)$ を含むが、Hamilton form はディラック場の微分を含まない。$\beta=1$ で、$\pi^\mu_{(\beta)}$ は 0 となる。通常の解析力学では、$\beta=1$ で、$\psi$ と $\pi^0_{(1)}=-\bar{\psi}\gamma_c\theta^{c0}$ のみがハミルトニアン密度の引数として上手く行く。しかし、共変解析力学や De Donder-Weyl 理論では、$\beta=1$ でも未定乗数法を使う必要がある。(G.9) の変分は以下のようになる：

$$\frac{\partial H^\beta_{\mathrm{D,tot}}}{\partial \Pi^\beta} = -\lambda,\ \frac{\partial H^\beta_{\mathrm{D,tot}}}{\partial \bar{\Pi}^\beta} = -\bar{\lambda}, \tag{G.10}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H^\beta_{\mathrm{D,tot}}}{\partial \psi} &= \frac{1+\beta}{2}\bar{\psi}\gamma_c\frac{1}{4}\gamma_{ab}\omega^{ab}\wedge\eta^c + \frac{1-\beta}{2}\frac{1}{4}\bar{\psi}\gamma_{ab}\omega^{ab}\wedge\gamma_c\eta^c + m\bar{\psi}\eta \\ &\quad + \frac{\beta}{2}C_c\bar{\psi}\gamma^c\eta - \frac{1-\beta}{2}\bar{\lambda}\wedge\eta^c\gamma_c,\end{aligned} \tag{G.11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H^\beta_{\mathrm{D,tot}}}{\partial \bar{\psi}} &= \frac{1+\beta}{2}\gamma_c\frac{1}{4}\gamma_{ab}\omega^{ab}\psi\wedge\eta^c + \frac{1-\beta}{2}\frac{1}{4}\gamma_{ab}\omega^{ab}\gamma_c\psi\wedge\eta^c + m\psi\eta \\ &\quad + \frac{\beta}{2}C_c\gamma^c\psi\eta + \frac{1+\beta}{2}\gamma_c\lambda\wedge\eta^c.\end{aligned} \tag{G.12}$$

よって、正準方程式 $d\psi = -\partial H^\beta_{\mathrm{D,tot}}/\partial\Pi^\beta$ と $d\bar{\psi} = -\partial H^\beta_{\mathrm{D,tot}}/\partial\bar{\Pi}^\beta$ は、

$$d\psi = \lambda,\ d\bar{\psi} = \bar{\lambda} \tag{G.13}$$

となる。正準方程式 $d\Pi^\beta = -\partial H^\beta_{\mathrm{D,tot}}/\partial\psi$ と $d\bar{\Pi}^\beta = -\partial H^\beta_{\mathrm{D,tot}}/\partial\bar{\psi}$ は、

$$d\Pi^\beta = -\frac{1}{4}\bar{\psi}\gamma_{ab}\omega^{ab}\wedge\eta^c\gamma_c - \frac{1+\beta}{2}\bar{\psi}\gamma^c\omega_c\eta - m\bar{\psi}\eta - \frac{\beta}{2}C_c\bar{\psi}\gamma^c\eta + \frac{1-\beta}{2}d\bar{\psi}\wedge\eta^c\gamma_c, \tag{G.14}$$

$$d\bar{\Pi}^\beta = -\gamma_c\frac{1}{4}\gamma_{ab}\omega^{ab}\psi\wedge\eta^c + \frac{1-\beta}{2}\gamma^c\omega_c\psi\eta - m\psi\eta - \frac{\beta}{2}C_c\gamma^c\psi\eta - \frac{1+\beta}{2}\gamma_c d\psi\wedge\eta^c \tag{G.15}$$

となる。ただし、(G.11), (G.12), (G.3) の第 2 式と (G.13) を用いた。(G.6) と (G.3) の第 1 式より、上 2 式の左辺は、

$$d\Pi^\beta = -\frac{1+\beta}{2}d\bar{\psi}\wedge\eta^c\gamma_c - \frac{1+\beta}{2}\bar{\psi}\gamma^c(\omega_c+C_c)\eta, \tag{G.16}$$

$$d\bar{\Pi}^\beta = \frac{1-\beta}{2}(\omega_c+C_c)\gamma^c\psi\eta + \frac{1-\beta}{2}\gamma_c d\psi\wedge\eta^c \tag{G.17}$$

となる。これを (G.14) および (G.15) に代入して、(G.4) および (G.5) を得る。

## H　Pre-symplectic potential

ラグランジアン $d$ 形式の変分は、

$$\begin{aligned}\delta L &= \delta\psi^A \wedge \frac{\partial L}{\partial \psi^A} + \delta d\psi^A \wedge \frac{\partial L}{\partial d\psi^A} \\ &= \delta\psi^A \wedge \Big[\frac{\partial L}{\partial \psi^A} - (-1)^{p_A} d\frac{\partial L}{\partial d\psi^A}\Big] + d\Big(\delta\psi^A \wedge \frac{\partial L}{\partial d\psi^A}\Big) \\ &\equiv \delta\psi^A \wedge \frac{\delta L}{\delta\psi^A} + d\Theta(\delta\psi), \end{aligned} \tag{H.1}$$

$$\Theta(\delta\psi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \delta\psi^A \wedge \frac{\partial L}{\partial d\psi^A} \equiv \delta\psi^A \wedge \pi_A \tag{H.2}$$

である。ここで、

$$\psi^A = \psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}, \tag{H.3}$$

$$\boldsymbol{\pi}_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu \psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p})} = \boldsymbol{\pi}_A^{[\mu,\mu_1\cdots\mu_p]} \tag{H.4}$$

と置くと、

$$\pi_A = \frac{1}{(p+1)!}\boldsymbol{\pi}_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p} * (dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}) \tag{H.5}$$

である。ただし、

$$*(dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{(d-r)!}\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_r}{}_{\nu_1\cdots\nu_{d-r}} dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_{d-r}} \tag{H.6}$$

で、$\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_{d-1}}$ は完全反対称で、$\varepsilon_{01\cdots d-1} = 1$ である[21)]。このとき、

$$\Theta(\delta\psi) = \delta\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}\boldsymbol{\pi}_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}(dx)_\mu, \tag{H.7}$$

$$dx^\mu \wedge (dx)_\nu = \eta_0 \delta^\mu_\nu \quad ((dx)_\nu = *dx_\nu), \tag{H.8}$$

$$\eta_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} dx^0 \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{d-1} (= *1) \tag{H.9}$$

である。ここで、$\delta\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}$ をグラスマン数 $\tilde{\delta}\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}$ に置き換え [26]、

$$\tilde{\delta}\psi^A \stackrel{\mathrm{def}}{=} \tilde{\delta}\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \tag{H.10}$$

とすると、

$$\Theta(\tilde{\delta}\psi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \tilde{\delta}\psi^A \wedge \pi_A = \tilde{\delta}\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}\boldsymbol{\pi}_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}(dx)_\mu \tag{H.11}$$

は $\tilde{\delta}$ に関して 1 形式である (これをプレ 1 形式と呼ぶ)。これは pre-symplectic potential と呼ばれる。更に、pre-symplectic form(プレ 2 形式) を

$$\begin{aligned}\omega(\tilde{\delta}\psi, \tilde{\delta}\psi) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \tilde{\delta}\Theta(\tilde{\delta}\psi) \\ &= -\tilde{\delta}\psi^A \wedge \tilde{\delta}\pi_A = -\tilde{\delta}\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p} \wedge \tilde{\delta}\boldsymbol{\pi}_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}(dx)_\mu \end{aligned} \tag{H.12}$$

---

21) このホッジ作用素は、前章までのものと異なる。

と定義する。ただし、

$$\tilde{\delta} = \tilde{\delta}\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}\frac{\partial}{\partial\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}} + \partial_\mu\tilde{\delta}\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}\frac{\partial}{\partial\partial_\mu\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}} \tag{H.13}$$

である。

pre-symplectic form(プレ 2 形式) は、I. V. Kanatchikov[2] の polysymplectic form($(d+1)$ 形式) に対応し、神長 [21] の symplectic form(メタ 2 形式) に対応する。

プレベクトル場を、

$$X = X_A \wedge \frac{\partial}{\partial\tilde{\delta}\psi^A} \tag{H.14}$$

で定義する。$X_A$ は $p_A$ 形式 (プレ 0 形式) である。特に、

$$X_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \delta\psi_A \wedge \frac{\partial}{\partial\tilde{\delta}\psi^A} \tag{H.15}$$

とすると、

$$\begin{aligned}\Theta(\tilde{\delta}\psi)(X_\delta) &= X_\delta\Theta(\tilde{\delta}\psi)\\ &= \Theta(\delta\psi)\end{aligned} \tag{H.16}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}\omega(\tilde{\delta}\psi,\tilde{\delta}\psi)(X_{\delta_1},X_{\delta_2}) &= -\delta_1\psi^A\wedge\delta_2\pi_A + \delta_2\psi^A\wedge\delta_1\pi_A\\ &\equiv \omega(\delta_1\psi,\delta_2\psi)\end{aligned} \tag{H.17}$$

である。特に、$\delta_1, \delta_2$ がライプニッツ則を満たすなら、

$$\omega(\delta_1\psi,\delta_2\psi) = -\delta_2\Theta(\delta_1\psi) + \delta_1\Theta(\delta_2\psi) \tag{H.18}$$

である。 特に、$\delta_1 = \delta$, $\delta_2 = \mathcal{L}_\xi$ の場合 (ライプニッツ則を満たす) が使われる [26].

# I　De Donder-Weyl理論のポアソン括弧

## I.1　ハミルトニアン・ベクトル場

この章は [2] を参考にした。

微分形式の成分 $\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}$ と (H.4) の $\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A$ を独立変数とみなす。プレ・ベクトル場

$$X = X^A_{\mu_1\cdots\mu_p}\frac{\partial}{\partial\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}} + Y^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A} \tag{I.1}$$

を考える。$X^A_{\mu_1\cdots\mu_p}$ と $Y^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A$ はプレ 0 形式で、テンソルであり、微分形式 $f$ に作用する。その作用を $X^A_{\mu_1\cdots\mu_p}(f), Y^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A(f)$ と書く。以下、微分形式 $f$ は $\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}$ と $\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A$ で表され、それらで微分可能とする。$\tilde{\delta}\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}$ と $\tilde{\delta}\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A$ をそれぞれ $\partial/\partial\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}$, $\partial/\partial\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A$ の双対基底とする。(H.12) に習い、

$$\tilde{\omega} \overset{\text{def}}{=} -\tilde{\delta}\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}\wedge\tilde{\delta}\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A(dx)_\mu \tag{I.2}$$

と置く。また、

$$\tilde{\delta}f = \tilde{\delta}\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}\frac{\partial f}{\partial\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}} + \tilde{\delta}\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A} \tag{I.3}$$

とする。

今、

$$\tilde{\delta}f = I_{X_f}\tilde{\omega} \tag{I.4}$$

でプレ・ハミルトニアン・ベクトル場 $X_f$ を定める。$I_X$ は内部積で、$I_X\tilde{\omega}$ は、

$$I_X\tilde{\omega} = -\tilde{\delta}\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A X^A_{\mu_1\cdots\mu_p}((dx)_\mu) + \tilde{\delta}\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}Y^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A((dx)_\mu) \tag{I.5}$$

である。一方、

$$\tilde{\delta}f = \tilde{\delta}\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}\frac{\partial f}{\partial\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}} + \tilde{\delta}\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A} \tag{I.6}$$

である。よって、$X_f$ を、

$$X_f = {}^fX^A_{\mu_1\cdots\mu_p}\frac{\partial}{\partial\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}} + {}^fY^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A} \tag{I.7}$$

と書くと、

$$ {}^fX^A_{\mu_1\cdots\mu_p}((dx)_\mu) = -\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A}, \tag{I.8}$$

$$ {}^fY^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A((dx)_\mu) = \frac{\partial f}{\partial\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}} \tag{I.9}$$

が成立する。$f$ を $F$ 形式とする。${}^fX^A_{\mu_1\cdots\mu_p}$, ${}^fY^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_A$ は、$F \le d-1$ のとき、それぞれ $(d-1-F)$-ベクトルであり、$f=d$ の時、1 形式である。

ポアソン括弧を

$$\{f, g\} \stackrel{\text{def}}{=} I_{X_f} I_{X_g} \tilde{\omega} \tag{I.10}$$

で定める。これは、

$$\begin{aligned}\{f, g\} &= \tilde{\delta} g(X_f) \\ &= {}^f X^A_{\mu_1 \cdots \mu_p} \left( \frac{\partial g}{\partial \psi^A_{\mu_1 \cdots \mu_p}} \right) + {}^f Y^{\mu, \mu_1 \cdots \mu_p}_A \left( \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\pi}^{\mu, \mu_1 \cdots \mu_p}_A} \right)\end{aligned} \tag{I.11}$$

となる。これは、$(f + g + 1 - d)$ 形式である。

## I.2 正準方程式

DW 方程式は、

$$\partial_{[\mu} \psi^A_{\mu_1 \cdots \mu_p]} = \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial \boldsymbol{\pi}^{\mu, \mu_1 \cdots \mu_p}_A}, \tag{I.12}$$

$$\partial_\mu \boldsymbol{\pi}^{\mu, \mu_1 \cdots \mu_p}_A = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial \psi^A_{\mu_1 \cdots \mu_p}} \tag{I.13}$$

であった。以下では、(I.12) を第 1DW 方程式, (I.13) を第 2DW 方程式と呼ぶ。

### I.2.1 第 1DW 方程式

$f$ がハミルトン $d$-form $H = \boldsymbol{\mathcal{H}} \eta_0$ の場合を考えると、

$${}^H X^A_{\mu_1 \cdots \mu_p}((dx)_\mu) = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial \boldsymbol{\pi}^{\mu, \mu_1 \cdots \mu_p}_A} \eta_0, \tag{I.14}$$

$${}^H Y^{\mu, \mu_1 \cdots \mu_p}_A((dx)_\mu) = \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial \psi^A_{\mu_1 \cdots \mu_p}} \eta_0 \tag{I.15}$$

である。$d$ は時空の次元である。よって、

$${}^H X^A_{\mu_1 \cdots \mu_p} = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial \boldsymbol{\pi}^{\mu, \mu_1 \cdots \mu_p}_A} dx^\mu \tag{I.16}$$

である[22)]。ここで、$dx^\beta \wedge (dx)_\alpha = \delta^\beta_\alpha \eta_0$ を用いた。

これより、

$$\{H, \psi^A\} = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial \boldsymbol{\pi}^{\mu, \mu_1 \cdots \mu_p}_A} dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \tag{I.17}$$

となる。第 1DW 方程式は、

$$d\psi^A = -\{H, \psi^A\} \tag{I.18}$$

と書ける。

---

22) ${}^H X^A_{\mu_1 \cdots \mu_p}(\bullet) = -\partial \boldsymbol{\mathcal{H}} / \partial \boldsymbol{\pi}^{\mu, \mu_1 \cdots \mu_p}_A dx^\mu \wedge \bullet$ を仮定した。

### I.2.2　第 2DW 方程式

今、

$$\delta^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu_1\cdots\nu_n} = \delta^{[\mu_1}_{\nu_1}\cdots\delta^{\mu_n]}_{\nu_n} \tag{I.19}$$

と置くと、

$$\delta^{\alpha\mu_2\cdots\mu_n}_{\alpha\nu_2\cdots\nu_n} = c_{d,n}\delta^{\mu_2\cdots\mu_n}_{\nu_2\cdots\nu_n}, \quad c_{d,n} = \frac{d-n+1}{n}, \tag{I.20}$$

$$\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_n} = d_{d,n} = \frac{d!}{(d-n)!n!} \tag{I.21}$$

である。

(I.15) の解は、

$$^{H}Y^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_{A} = \frac{1}{c_{d,p+1}}\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial\psi^A_{\alpha_1\cdots\alpha_p}}dx^\beta\delta^{\mu\mu_1\cdots\mu_p}_{\beta\alpha_1\cdots\alpha_p} \tag{I.22}$$

となる。ここで、$dx^\beta\wedge(dx)_\alpha = \delta^\beta_\alpha\eta_0$ を用いた。

また、

$$\frac{\partial\pi_A}{\partial\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_{B}} = \frac{\delta^B_A}{(p+1)!}\eta^{(0)}_{\mu\mu_1\cdots\mu_p}, \tag{I.23}$$

$$\eta^{(0)}_{\mu\mu_1\cdots\mu_p} \stackrel{\text{def}}{=} *_0(dx_\mu\wedge dx_{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\mu_p}) \tag{I.24}$$

である。公式

$$dx^\nu\wedge\eta^{(0)}_{\mu\mu_1\cdots\mu_p} = (-1)^p(p+1)\delta^\nu_{[\mu}\eta^{(0)}_{\mu_1\cdots\mu_p]} \tag{I.25}$$

より、

$$\begin{aligned}
{}^{H}Y^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_{B}\Big(\frac{\partial\pi_A}{\partial\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_{B}}\Big) &= \frac{1}{c_{d,p+1}}\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial\psi^A_{\alpha_1\cdots\alpha_p}}\delta^{\mu\mu_1\cdots\mu_p}_{\beta\alpha_1\cdots\alpha_p}\frac{1}{(p+1)!}dx^\beta\wedge\eta^{(0)}_{\mu\mu_1\cdots\mu_p} \\
&= \frac{1}{c_{d,p+1}}\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial\psi^A_{\alpha_1\cdots\alpha_p}}\delta^{\mu\mu_1\cdots\mu_p}_{\beta\alpha_1\cdots\alpha_p}\frac{(-1)^p}{p!}\delta^\beta_{[\mu}\eta^{(0)}_{\mu_1\cdots\mu_p]} \\
&= \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial\psi^A_{\alpha_1\cdots\alpha_p}}\delta^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\alpha_1\cdots\alpha_p}\frac{(-1)^p}{p!}\eta^{(0)}_{\mu_1\cdots\mu_p} \\
&= \frac{(-1)^p}{p!}\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}}\eta^{(0)}_{\mu_1\cdots\mu_p}
\end{aligned} \tag{I.26}$$

を得る。これより、

$$\{H,\pi_A\} = \frac{(-1)^p}{p!}\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}}\eta^{(0)}_{\mu_1\cdots\mu_p} \tag{I.27}$$

である。

一方、

$$d\pi_A = \frac{(-1)^p}{p!}\partial_\mu\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_{A}\eta^{(0)}_{\mu_1\cdots\mu_p} \tag{I.28}$$

である。よって、第 2DW 方程式 (I.13) は、

$$d\pi_A = -\{H,\pi_A\} \tag{I.29}$$

となる。

## I.3 $\{\pi_B, f\}$

$\{\pi_B, f\}$ を考える。${}^{\pi_B}X^A_{\mu_1\cdots\mu_p}$ は、

$$ {}^{\pi_B}X^A_{\mu_1\cdots\mu_p}((dx)_\mu) = -\delta^A_B \frac{1}{(p+1)!}\eta^{(0)}_{\mu\mu_1\cdots\mu_p} \tag{I.30} $$

を満たし、この解は、

$$ {}^{\pi_B}X^A_{\mu_1\cdots\mu_p}(\bullet) = -\delta^A_B \frac{1}{(p+1)!}\partial_{\mu_p}\rfloor\cdots\partial_{\mu_1}\rfloor\bullet \tag{I.31} $$

である。よって、

$$ \begin{aligned} \{\pi_B, f\} &= {}^{\pi_B}X^A_{\mu_1\cdots\mu_p}\Big(\frac{\partial f}{\partial\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}}\Big) \\ &= -\delta^A_B \frac{1}{(p+1)!}\partial_{\mu_p}\rfloor\cdots\partial_{\mu_1}\rfloor\frac{\partial f}{\partial\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}} \end{aligned} \tag{I.32} $$

である。
　特に、

$$ \begin{aligned} \{\pi_B, \psi^A\} &= {}^{\pi_B}X^A_{\mu_1\cdots\mu_p}\Big(\frac{\partial f}{\partial\psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}}\Big) \\ &= -\delta^A_B \frac{1}{(p+1)!}\partial_{\mu_p}\rfloor\cdots\partial_{\mu_1}\rfloor\frac{1}{p!}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p} \end{aligned} \tag{I.33} $$

である。公式

$$ \partial_{\alpha_r}\rfloor\cdots\partial_{\alpha_1}\rfloor dx^{\lambda_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\lambda_r} = r!\delta^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\alpha_1\cdots\alpha_r} \tag{I.34} $$

より、

$$ \{\pi_B, \psi^A\} = -\delta^A_B \frac{1}{(p+1)!}\delta^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\mu_1\cdots\mu_p} = -\delta^A_B \frac{d!}{(p+1)!p!(d-p)!} \tag{I.35} $$

である。$p=0$ で $-\delta^A_B$ で、$p=1$ で $-\delta^A_B d/2$ となる。

## I.4 $\{\psi^A, f\}$

$\{\psi^A, f\}$ を考える。
${}^{\psi^A}Y^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_B$ は、

$$ {}^{\psi^A}Y^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_B((dx)_\mu) = \delta^A_B\frac{1}{p!}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}, \tag{I.36} $$

$$ \{\psi^A, f\} = {}^{\psi^A}Y^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_B\Big(\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_B}\Big) \tag{I.37} $$

を満たす。今、

$$ {}^{\psi^A}Y^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}_B(\bullet) = \delta^A_B\gamma e^{\mu\nu_1\cdots\nu_q\mu_1\cdots\mu_p}\partial_{\nu_q}\rfloor\cdots\partial_{\nu_1}\rfloor\bullet \tag{I.38} $$

を仮定する。$e^{\mu_1\cdots\mu_d}$ は完全反対称で、$e^{01\cdots d-1}=-1$ である。$q=d-p-1$ である。このとき、

$$
\begin{aligned}
{}^{\psi^A}Y_B^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}((dx)_\mu) &= \delta^A_B\gamma e^{\mu\nu_1\cdots\nu_q\mu_1\cdots\mu_p}\partial_{\nu_q}\rfloor\cdots\partial_{\nu_1}\rfloor\partial_\mu\rfloor\eta_0 \\
&= \delta^A_B\gamma e^{\mu\nu_1\cdots\nu_q\mu_1\cdots\mu_p}\eta^{(0)}_{\mu\nu_1\cdots\nu_q} \\
&= \delta^A_B\gamma e^{\mu\nu_1\cdots\nu_q\mu_1\cdots\mu_p}\frac{1}{(p+1)!}\varepsilon_{\mu\nu_1\cdots\nu_q\alpha_1\cdots\alpha_p}dx^{\alpha_1}\wedge\cdots dx^{\alpha_p} \\
&= -q!\delta^A_B\gamma dx^{\mu_1}\wedge\cdots dx^{\mu_p}
\end{aligned}
\tag{I.39}
$$

となる。よって、$\gamma=-1/(p!q!)$ を得る：

$$
{}^{\psi^A}Y_B^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}(\bullet) = -\frac{1}{p!q!}\delta^A_B e^{\mu\nu_1\cdots\nu_q\mu_1\cdots\mu_p}\partial_{\nu_q}\rfloor\cdots\partial_{\nu_1}\rfloor\bullet\,. \tag{I.40}
$$

従って、

$$
\begin{aligned}
\{\psi^A,\pi_B\} &= {}^{\psi^A}Y_C^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}\left(\frac{\partial\pi_B}{\partial\boldsymbol{\pi}_C^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}}\right) \\
&= -\frac{1}{(p+1)!p!q!}\delta^A_B e^{\mu\nu_1\cdots\nu_q\mu_1\cdots\mu_p}\partial_{\nu_q}\rfloor\cdots\partial_{\nu_1}\rfloor\eta^{(0)}_{\mu\mu_1\cdots\mu_p} \\
&= -\frac{1}{(p+1)!p!q!}\delta^A_B e^{\mu\nu_1\cdots\nu_q\mu_1\cdots\mu_p}\varepsilon_{\mu\mu_1\cdots\mu_p\nu_1\cdots\nu_q} \\
&= \frac{(-1)^{pq}}{(p+1)!}\delta^A_B d_{d,p} = \delta^A_B\frac{(-1)^{pq}d!}{(p+1)!p!(d-p)!}
\end{aligned}
\tag{I.41}
$$

となる。これより、

$$
\{\psi^A,\pi_B\} = -(-1)^{pq}\{\pi_B,\psi^A\} \tag{I.42}
$$

となる。

## I.5 まとめ

以上より、このポアソン括弧と共変解析力学のそれとは、正準方程式と $p=0$ の基本ポアソン括弧では等価に見えるが、$p\geq 1$ の基本ポアソン括弧では異なる。よって、テンソルの成分を基本変数としたこの章のポアソン括弧は、微分形式を基本変数とした共変解析力学のポアソン括弧と等価ではない。

また、後者に比べ、前者は見通しが悪い。位置の場 $\psi$ と共役量 $\pi$ とが非対称である。

# References

[1] H. Weyl, “Observations on Hilbert’s Independence Theorem and Born’s Quantization of Field Equations”, Phys. Rev. **46**, 505 (1934).

[2] I. V. Kanatchikov, “Canonical structure of classical field theory in the polymomentum phase space”, Rept. Math. Phys. **41**, 49 (1998).

[3] A. Trautman, “On the Einstein-Cartan equations”, Bull. Acad. Pol. Sci **20**, 185 (1972).

[4] B. Kuchowicz, “Cosmology with spin and torsion. Part I. Physical and mathematical foundations”, Acta Cosmologica, Zesz. **3**, 109 (1975).

[5] Walter Thirring, “A Course in Mathematical Physics 2”, Springer (second edition, 1978).

[6] W. Thirring and R. Wallner, “The Use of Exterior Forms in Einstein’s Gravitation Theory”, Revista Brasileira de Fisica **8**(3), 686 (1978).

[7] F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke and Y. Ne’eman, “Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance”, Phys. Rep. **258**, 1 (1995).

[8] A. D’Adda, J. E. Nelson and T. Regge, “Covariant canonical formalism for the group manifold”, Annals of Physics **165**, 384 (1985).

[9] J. E. Nelson and T. Regge, “Covariant Canonical Formalism for Gravity”, Annals of Physics **166**, 234 (1986).

[10] A. Lerda, J. E. Nelson and T. Regge, “Covariant Canonical Formalism for Supergravity”, Phys. Lett. **161B**, 294 (1985).

[11] A. Lerda, J. E. Nelson and T. Regge, “The Group Manifold Hamiltonian for Supergravity”, Phys. Lett. **161B**, 297 (1985).

[12] 中村匡, 「微分形式で見た電磁気学：あるいは 2+1 次元人の電磁気学と時空平等解析力学について」, 物性研究 **79**, 2 (2002).

[13] J. M. Nester, “General pseudotensors and quasilocal quantities”, Classical and Quantum Gravity **21**, S261 (2004).

[14] J. M. Nester, “A covariant Hamiltonian for gravity theories”, Mod. Phys. Lett. A **06**, 2655 (1991).

[15] Y. Kaminaga, “Covariant Analytic Mechanics with Differential Forms and Its Application to Gravity”, EJTP **9**, 199 (2012).

[16] Chiang-Mei Chen, J. M. Nester and Roh-Suan Tung, “Gravitational energy for GR and Poincaré gauge theories: a covariant Hamiltonian approach”, Int. J. Mod. Phys. D **24**, 1530026 (2015).

[17] 内山龍雄『一般ゲージ場論序説』(岩波書店, 1987 年).

[18] L. B. Szabados, "On canonical pseudotensors, Sparling's form and Noether currents", Class. Quantum Grav. **9**, 2521 (1992).

[19] S. Nakajima, "Application of covariant analytic mechanics with differential forms to gravity with Dirac field", EJTP **13**, 95 (2016). [arXiv:1510.09048v2]

[20] S. Nakajima, "Reconsideration of De Donder-Weyl theory by covariant analytic mechanics", arXiv:1602.04849v2.

[21] Y. Kaminaga, "Poisson Bracket and Symplectic Structure of Covariant Canonical Formalism of Fields", EJTP **14**, 55 (2018). [arXiv:1703.06718]

[22] I. V. Kanatchikov, "De Donder-Weyl Hamiltonian formulation and precanonical quantization of vielbein gravity", J. Phys.: Conf. Ser. **442**, 012041 (2013).

[23] I. Kanatchikov, "On a generalization of the Dirac bracket in the De Donder-Weyl Hamiltonian formalism", arXiv:0807.3127.

[24] Yu.N. Obukhov and J.G. Pereira, "Metric-affine approach to teleparallel gravity", Phys. Rev. D **67**, 044016 (2003). [arXiv:gr-qc/0212080]

[25] Yuri N. Obukhov and Guillermo F. Rubilar, "Covariance properties and regularization of conserved currents in tetrad gravity", Phys. Rev. D **73**, 124017 (2006). [arXiv:gr-qc/0605045]

[26] G. Compere, A. Fiorucci, "Advanced Lectures in General Relativity", arXiv:1801.07064.

[27] L. Castellani and A. D'Adda, "Covariant Hamiltonian for gravity coupled to $p$-forms", Phys. Rev. D **101**, 025015 (2020). [arXiv:1906.11852]

[28] S. Nakajima, "Generators of local gauge transformations in the covariant canonical formalism of fields", arXiv:1909.06779

[29] 中嶋 慧, 松尾 衛『一般ゲージ理論と共変解析力学』(現代数学社, 2020 年).

[30] S. Nakajima, "Noether currents and generators of local gauge transformations in the covariant canonical formalism", J. Phys. Soc. Jpn. **92**, 084001 (2023). [arXiv:2201.06102]