重力場の共変解析力学：1階形式

中嶋 慧

September 8, 2019

Abstract

1980 年代の共変解析力学 [1, 2, 3, 4] の研究をレビューする。

Contents

1 記号

D 次元時空を考える。

$$T_A := (P_a, M_{ab}) \tag{1.1}$$

をポアンカレ群の生成子とし、

$$[T_A, T_B] = C^D{}_{AB} T_D \tag{1.2}$$

とする。$a = 0, 1, \cdots, d$ である。ただし、

$$d := D - 1 \tag{1.3}$$

である。また、$X^A = (X^a, X^{ab})$, $Y_A = (Y_a, Y_{ab})$ に対して、

$$X^A Y_A = X^a Y_a + \frac{1}{2} X^{ab} Y_{ab} \tag{1.4}$$

とする。

$$q^A := (\theta^a, \omega^{ab}) \tag{1.5}$$

とする。ここで、

$$\theta^a = \theta^a{}_\mu dx^\mu, \quad \omega^{ab} = \omega^{ab}_\mu dx^\mu \tag{1.6}$$

であり、$\theta^a{}_\mu$ は多脚場, ω^{ab}_μ はスピン接続である。$\mu = 0, 1, \cdots, d$ である。$q^A_\mu = (\theta^a{}_\mu, \omega^{ab}_\mu)$ である。また、計量は、

$$g_{\mu\nu} = \mathring{g}_{ab} \theta^a{}_\mu \theta^b{}_\nu, \tag{1.7}$$

$$\mathring{g}_{ab} := \mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1) \tag{1.8}$$

と表される。ラテン小文字の上げ下げは $\mathring{g}_{ab}$ とその逆行列 $\mathring{g}^{ab}$ で行う。

$$R^A := (\Theta^a, \Omega^{ab}) \tag{1.9}$$

とする。T^a は捩率 2 形式, Ω^{ab} は曲率 2 形式である：

$$\Theta^a := d\theta^a + \omega^a{}_b \wedge \theta^b, \tag{1.10}$$

$$\Omega^{ab} := d\omega^{ab} + \omega^{ac} \wedge \omega_c{}^b \tag{1.11}$$

である。これらはまとめて、

$$R^A = dq^A - \frac{1}{2} C^A{}_{BC} q^B \wedge q^C \tag{1.12}$$

と書ける。また、

$$R^A = \frac{1}{2} R^A{}_{BC} q^B \wedge q^C \tag{1.13}$$

と置く。ただし、

$$R^A{}_{B,cd} = 0 \tag{1.14}$$

である。つまり、

$$R^A = \frac{1}{2} R^A{}_{bc} \theta^b \wedge \theta^c \tag{1.15}$$

と書ける。

上 2 式より、

$$dq^A = \frac{1}{2} \Lambda^A{}_{BC} q^B \wedge q^C, \tag{1.16}$$

$$\Lambda^A{}_{BC} := C^A{}_{BC} + R^A{}_{BC} \tag{1.17}$$

となる。

2　ポアソン括弧

　ラグランジアン形式は、

$$L(\psi, d\psi) = \mathcal{L}\eta \tag{2.1}$$

である。ここで、$\mathcal{L}$ はラグランジアン密度であり、

$$\eta := *1 \tag{2.2}$$

は体積形式である。$*$ はホッジ双対である。
　オイラー・ラグランジュ方程式は、

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - (-1)^p d\frac{\partial L}{\partial d\psi} = 0 \tag{2.3}$$

である。ただし、ψ は p 形式である。微分形式の微分形式による微分は以下で定義する。r 形式 β $(r = 0, 1, \cdots, D)$ が微分形式の組 $\{\alpha^i\}_{i=1,\cdots,k}$ で表されているとする。α^i が r_i 形式で、

$$\alpha^i = \alpha^i_{\mu_1\cdots\mu_{r_i}} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_{r_i}} \tag{2.4}$$

と書けるとき、その変分を、

$$\delta\alpha^i = \delta\alpha^i_{\mu_1\cdots\mu_{r_i}} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_{r_i}} \tag{2.5}$$

で定義する。$\delta\alpha^i_{\mu_1\cdots\mu_{r_i}}$ は微小量で、テンソル添え字について完全反対称である。β の変分 $\delta\beta$ を、$\delta\beta := \beta(\alpha + \delta\alpha) - \beta(\alpha)$ で定義する。もし変分 $\delta\alpha^i$ の下で β の変分が、

$$\delta\beta = \sum_i \delta\alpha^i \wedge \omega_i \tag{2.6}$$

のように書けるとき、ω_i を β の α^i による微分と言い、

$$\frac{\partial\beta}{\partial\alpha^i} := \omega_i \tag{2.7}$$

と書く。すなわち、

$$\delta\beta =: \sum_i \delta\alpha^i \wedge \frac{\partial\beta}{\partial\alpha^i} \tag{2.8}$$

である。0 でない $\partial\beta/\partial\alpha^i$ は $(r - r_i)$ 形式 (ただし、$r_i \leq r$) である。
　ψ の共役形式は、

$$\pi := \frac{\partial L}{\partial d\psi} \tag{2.9}$$

である。Hamilton form を

$$H(\psi, \pi) := d\psi \wedge \pi - L \tag{2.10}$$

で定義する。正準方程式は、

$$d\psi = (-1)^{(p+1)q}\frac{\partial H}{\partial \pi} \quad (q := D - p - 1), \tag{2.11}$$

$$d\pi = -(-1)^{p}\frac{\partial H}{\partial \psi} \tag{2.12}$$

である。

神長のポアソン括弧 [5] は、

$$\{F, G\}_K = (-1)^{p(f+D+1)}\frac{\partial F}{\partial \psi} \wedge \frac{\partial G}{\partial \pi} - (-1)^{(D+p-1)(f+1)}\frac{\partial F}{\partial \pi} \wedge \frac{\partial G}{\partial \psi} \tag{2.13}$$

である。F, G はそれぞれ f, g 形式で、ψ, π で微分可能とする。[8] のポアソン括弧は、

$$\{F, G\}_F = -\{F, G\}_K \tag{2.14}$$

である。つまり、

$$\{F, G\}_F = -(-1)^{p(g+D+1)}\frac{\partial G}{\partial \psi} \wedge \frac{\partial F}{\partial \pi} + (-1)^{(D+p-1)(g+1)}\frac{\partial G}{\partial \pi} \wedge \frac{\partial F}{\partial \psi} \tag{2.15}$$

である。このポアソン括弧は次の性質を持つ：

$$\{\psi, \pi\}_F = 1, \tag{2.16}$$

$$\{\pi, \psi\}_F = -(-1)^{pD}, \tag{2.17}$$

$$\{B, A\}_F = -(-1)^{(a+D+1)(b+D+1)}\{A, B\}_F, \tag{2.18}$$

$$\{A, B \wedge C\}_F = B \wedge \{A, C\}_F + (-1)^{c(a+D+1)}\{A, B\}_F \wedge C, \tag{2.19}$$

$$\{A \wedge B, C\}_F = \{A, C\}_F \wedge B + (-1)^{a(c+D+1)}A \wedge \{B, C\}_F. \tag{2.20}$$

正準方程式は、

$$d\psi = \{\psi, H\}_F, \tag{2.21}$$

$$d\pi = \{\pi, H\}_F \tag{2.22}$$

となる。一般に、ψ, π で微分可能な微分形式 F に対して、

$$dF = \{F, H\}_F \tag{2.23}$$

である。

今、微分形式の必要な公式は [9] を参照のこと。

3　重力場の共変解析力学

3.1　拘束条件

　重力場のラグランジアン形式は、

$$L = L_{\mathrm{G}}(q^A, dq^A) + L_{\mathrm{mat}}(q^A) \tag{3.1}$$

である。ただし、L_{G} は重力場のラグランジアン形式で、

$$L_{\mathrm{G}}(q^A, dq^A) = \frac{1}{2\kappa}\Omega^{ab} \wedge \eta_{ab} \tag{3.2}$$

である。ここで、

$$\eta^{a_1 \cdots a_p} := *(\theta^{a_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{a_p}) \tag{3.3}$$

である。
　q^A の共役形式は、

$$\pi_a := \frac{\partial L}{\partial d\theta^a}, \tag{3.4}$$
$$p_{ab} := \frac{\partial L}{\partial d\omega^{ab}} \tag{3.5}$$

である。具体的には、

$$\pi_a = 0 \equiv \phi_a(q^A), \tag{3.6}$$
$$p_{ab} = \frac{1}{2\kappa}\eta_{ab} \equiv \phi_{ab}(q^A) \tag{3.7}$$

である。ここで、

$$\Phi_A := (\Phi_a, 2\Phi_{ab}), \tag{3.8}$$
$$\Phi_a := \pi_a (= 0), \tag{3.9}$$
$$\Phi_{ab} := p_{ab} - \frac{1}{2\kappa}\eta_{ab} (= 0) \tag{3.10}$$

と置く。また、

$$H_{\mathrm{tot}} := H + \Phi_A \wedge \Lambda^A, \tag{3.11}$$
$$H := d\theta^a \wedge \phi_a + d\omega^{ab} \wedge \phi_{ab} - L \tag{3.12}$$

とする。Λ^A は未定乗数 2 形式である。
　運動方程式は、

$$dq^A = \{q^A, H_{\mathrm{tot}}\}_F = \frac{\partial H_{\mathrm{tot}}}{\partial \pi_A}, \tag{3.13}$$
$$d\Phi_A = \{\Phi_A, H_{\mathrm{tot}}\}_F \tag{3.14}$$

である。

3.2　未定乗数の決定

$$\frac{\partial \Phi_A}{\partial \pi_B} = \delta_A^B \tag{3.15}$$

である。ただし、

$$\delta^{ab}{}_{cd} = 2\delta_c^{[a}\delta_d^{b]} = \delta_c^a\delta_d^b - \delta_d^a\delta_c^b \tag{3.16}$$

である。よって、

$$d\theta^A = \Lambda^A \tag{3.17}$$

を得る。これと (1.16) より、

$$\Lambda^A = \frac{1}{2}\Lambda^A{}_{BC} q^B \wedge q^C \equiv \tilde{\Lambda}^A \tag{3.18}$$

である。

3.3　拘束条件の全微分

今、

$$\tilde{H} := H_{\mathrm{tot}}\big|_{\Lambda^A = \tilde{\Lambda}^A} \tag{3.19}$$

とおくと、

$$\begin{aligned}\{\Phi_A, \tilde{H}\}_F &= \frac{\partial H}{\partial q^B} \wedge \frac{\partial \Phi_A}{\partial \pi_B} + \frac{\partial H}{\partial \pi_B} \wedge \frac{\partial \Phi_A}{\partial q^B} + \tilde{\Lambda}^B \wedge \{\Phi_A, \Phi_B\}_F + \Phi_B \wedge \{\Phi_A, \tilde{\Lambda}^B\} \\ &\equiv W_A + \Phi_B \wedge \{\Phi_A, \tilde{\Lambda}^B\}_F \end{aligned} \tag{3.20}$$

である。ただし、

$$\frac{\partial F}{\partial q^A} \wedge \frac{\partial G}{\partial \pi_A} = \frac{\partial F}{\partial \theta^a} \wedge \frac{\partial G}{\partial \pi_a} + \frac{\partial F}{\partial \omega^{ab}} \wedge \frac{\partial G}{\partial p_{ab}} \tag{3.21}$$

である。以下、

$$\partial_A \bullet := (\frac{\partial \bullet}{\partial \theta^a}, 2\frac{\partial \bullet}{\partial \omega^{ab}}) \tag{3.22}$$

と置く。

まず、

$$W_a = -\frac{1}{2\kappa}\Omega^{bc} \wedge \eta_{abc} - \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial \theta^a}, \tag{3.23}$$

$$W_{ab} = -\frac{1}{\kappa}\Theta^c \wedge \eta_{abc} - 2\frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial \omega^{ab}} \tag{3.24}$$

を示す。運動方程式は、$W_A = 0$ である。
　さて、

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2\kappa}\omega^{ac} \wedge \omega_c{}^b \wedge \eta_{ab} - L_{\mathrm{mat}} \\ &= -\omega^{ac} \wedge \omega_c{}^b \wedge \phi_{ab} - L_{\mathrm{mat}} \equiv H_{\mathrm{G}} - L_{\mathrm{mat}} \end{aligned} \tag{3.25}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{G}} &= -\omega^{ac} \wedge \omega_c{}^b \wedge \phi_{ab} \\ &= \frac{1}{2}C^{ab}{}_{BC}q^B \wedge q^C \wedge \phi_{ab} \\ &= C^A{}_{BC}q^B \wedge q^C \wedge \phi_A, \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\phi_A := (\frac{1}{2}\phi_a, \phi_{ab}) \tag{3.27}$$

である。

$$\frac{\partial H_{\mathrm{G}}}{\partial \pi_B} = 0, \tag{3.28}$$

$$\partial_B H_{\mathrm{G}} = 2C^A{}_{BC}q^C \wedge \phi_A + C^A{}_{DC}q^D \wedge q^C \wedge \Xi_{AB}, \tag{3.29}$$

$$\Xi_{AB} := \partial_B \phi_A \tag{3.30}$$

であり、

$$\frac{\partial H}{\partial \pi_B} = 0, \tag{3.31}$$

$$\partial_B H = 2C^A{}_{BC}q^C \wedge \phi_A + C^A{}_{DC}q^D \wedge q^C \wedge \Xi_{AB} - \partial_B L_{\mathrm{mat}}, \tag{3.32}$$

$$\tag{3.33}$$

である。一方、

$$\frac{\partial \Phi_A}{\partial \pi_B} = \delta^B_A \tag{3.34}$$

なので、

$$W_A = 2C^D{}_{AC}q^C \wedge \phi_D + C^D{}_{BC}q^B \wedge q^C \wedge \Xi_{DA} - \partial_A L_{\mathrm{mat}} + \Lambda^B \wedge \{\Phi_A, \Phi_B\}_F \tag{3.35}$$

である。また、

$$\Phi_A = (\pi_a - \phi_a, 2(p_{ab} - \phi_{ab})) \equiv \underline{\pi}_A - 2\phi_A \tag{3.36}$$

なので、

$$\begin{aligned} \{\Phi_A, \Phi_B\}_F &= \{\underline{\pi}_A, \underline{\pi}_B\}_F - \{\underline{\pi}_A, 2\phi_B\}_F - \{2\phi_A, \underline{\pi}_B\}_F + \{2\phi_A, 2\phi_B\}_F \\ &= -\{\underline{\pi}_A, 2\phi_B\}_F - \{2\phi_A, \underline{\pi}_B\}_F \\ &= -2(\Xi_{AB} + \Xi_{BA}) \end{aligned} \tag{3.37}$$

である。よって、

$$W_A = 2C^D{}_{AC}q^C \wedge \phi_D + C^D{}_{BC}q^B \wedge q^C \wedge \Xi_{DA} - \partial_A L_{\mathrm{mat}} - 2\Lambda^B \wedge (\Xi_{AB} + \Xi_{BA}) \tag{3.38}$$

となる。さて、Ξ_{AB} の 0 でない成分は、

$$\begin{aligned} \Xi_{ab,c} &= \frac{1}{2\kappa}\frac{\partial \eta_{ab}}{\partial \theta^c} \\ &= \frac{1}{2\kappa}\eta_{abc} \end{aligned} \tag{3.39}$$

である [9]。また、

$$\begin{aligned} X_A &:= -2\Lambda^B \wedge (\Xi_{AB} + \Xi_{BA}) \\ &= -2\Lambda^b \wedge \Xi_{Ab} - \Lambda^{bc} \wedge \Xi_{bc,A} \end{aligned} \tag{3.40}$$

であり、

$$X_a = -\frac{1}{2\kappa}\Lambda^{bc} \wedge \eta_{abc}, \tag{3.41}$$

$$X_{ab} = -\frac{1}{\kappa}\Lambda^c \wedge \eta_{abc} \tag{3.42}$$

となる。また、

$$Y_A := C^D{}_{BC}q^B \wedge q^C \wedge \Xi_{DA} \tag{3.43}$$

とすると、

$$\begin{aligned} Y_a &= \frac{1}{2}C^{bc}{}_{BC}q^B \wedge q^C \wedge \Xi_{bc,a} \\ &= -\frac{1}{2\kappa}\omega^{bd} \wedge \omega_d{}^c \wedge \eta_{abc}, \end{aligned} \tag{3.44}$$

$$Y_{ab} = 0 \tag{3.45}$$

である。なお、

$$Z_A := 2C^D{}_{AC}q^C \wedge \phi_D = C^{bc}{}_{AC}q^C \wedge \phi_{bc} \tag{3.46}$$

は、

$$Z_a = 0, \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned} Z_{ab} &= C^{cd}{}_{ab,C}q^C \wedge \phi_{cd} \\ &= 4\omega_{[a}{}^c \wedge \phi_{b]c} \end{aligned} \tag{3.48}$$

となる。ところで、

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{ab} &:= -2\omega^c{}_d \wedge \theta^d \wedge \Xi_{bc,a} \\ &= -\frac{1}{\kappa}\omega^c{}_d \wedge \theta^d \wedge \eta_{abc} \end{aligned} \tag{3.49}$$

を考えると、

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_{ab} &= -\frac{1}{\kappa}\omega^c{}_d \wedge (\delta^d_a\eta_{bc} - \delta^d_b\eta_{ac} + \delta^d_c\eta_{ab}) \\ &= -\frac{2}{\kappa}\omega^c{}_{[a} \wedge \eta_{b]c} \\ &= Z_{ab}\end{aligned} \tag{3.50}$$

となる [9]。よって、

$$W_a = -\frac{1}{2\kappa}\Omega^{bc} \wedge \eta_{abc} - \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial\theta^a}, \tag{3.51}$$

$$W_{ab} = -\frac{1}{\kappa}\Theta^c \wedge \eta_{abc} - 2\frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial\omega^{ab}} \tag{3.52}$$

となる。ただし、(3.17) を用いた。

$\Lambda^A{}_{BC}$ の q^A, π_A での微分が 0 とする[1)]と、

$$\begin{aligned}\{\Phi_A, \tilde{\Lambda}^B\}_F &= (-1)^D\partial_A\tilde{\Lambda}^B \\ &= \frac{(-1)^D}{2}\Lambda^B{}_{CE}\partial_A(q^C \wedge q^E) \\ &= (-1)^D(-1)^D\Lambda^B{}_{AC}q^C\end{aligned} \tag{3.53}$$

である。さて、

$$\Phi_B \wedge \{\Phi_A, \tilde{\Lambda}^B\}_F = \lambda^B{}_{AC}q^C \wedge \Phi_B \tag{3.54}$$

である。よって、

$$d\Phi_A = W_A + \lambda^B{}_{AC}q^C \wedge \Phi_B \tag{3.55}$$

を得る。運動方程式 $W_A = 0$ を使うと、

$$d\Phi_A = \lambda^B{}_{AC}q^C \wedge \Phi_B \tag{3.56}$$

となり、これは 2 次拘束条件はない事を意味する。

3.4 別の Lagrangian form

$$L' = L'_{\mathrm{G}} + L_{\mathrm{mat}}, \tag{3.57}$$

$$L'_{\mathrm{G}} = \frac{1}{2\kappa}N', \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}N' &= \Omega^{ab} \wedge \eta_{ab} - d(\omega^{ab} \wedge \eta_{ab}) \\ &= \omega^a{}_c \wedge \omega^{cb} \wedge \eta_{ab} + \omega^{ab} \wedge d\eta_{ab} \\ &= \omega^a{}_c \wedge \omega^{cb} \wedge \eta_{ab} + \omega^{ab} \wedge d\theta^c \wedge \eta_{abc}\end{aligned} \tag{3.59}$$

[1)] 要確認。

とする [9]。このとき、

$$\begin{aligned}\pi'_a &:= \frac{\partial L'}{\partial d\theta^a} \\ &= \frac{1}{2\kappa}\omega^{bc}\wedge\eta_{abc} \equiv \psi_a, \end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}p'_{ab} &:= \frac{\partial L'}{\partial d\omega^{ab}} \\ &= 0 \equiv \psi_{ab} \end{aligned} \tag{3.61}$$

である。また、

$$\Psi_A := (\pi'_a - \psi_a, 2(p'_{ab} - \psi_{ab})) \tag{3.62}$$

とし、

$$H'_{\text{tot}} := H' + \Psi_A \wedge \Lambda^A, \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}H' &:= d\theta^a \wedge \psi_a + d\omega^{ab}\wedge\psi_{ab} - L \\ &= H'_{\text{G}} - L_{\text{mat}} \end{aligned} \tag{3.64}$$

とする。ここで、

$$H'_{\text{G}} = -\frac{1}{2\kappa}\omega^{ac}\wedge\omega_c{}^b\wedge\eta_{ab} = H_{\text{G}} \tag{3.65}$$

である。

Λ^A は (3.17) となる。

また、

$$\tilde{H}' := H'_{\text{tot}}\big|_{\Lambda^A = \tilde{\Lambda}^A} \tag{3.66}$$

とすると、

$$\begin{aligned}\{\Psi_A, \tilde{H}'\}_F &= \frac{\partial H}{\partial q^B}\wedge\frac{\partial \Psi_A}{\partial \pi_B} + \frac{\partial H}{\partial \pi_B}\wedge\frac{\partial \Psi_A}{\partial q^B} + \tilde{\Lambda}^B\wedge\{\Psi_A,\Psi_B\}_F + \Psi_B\wedge\{\Psi_A,\tilde{\Lambda}^B\} \\ &\equiv W'_A + \Psi_B\wedge\{\Psi_A,\tilde{\Lambda}^B\}_F \end{aligned} \tag{3.67}$$

となる。

$$\Xi'_{AB} := \partial_B\psi_A, \quad \psi_A := (\psi_a, 2\psi_{ab}) \tag{3.68}$$

とすると、

$$W'_A = 2C^D{}_{AC}q^C\wedge\phi_D + C^D{}_{BC}q^B\wedge q^C\wedge\Xi_{DA} - \partial_A L_{\text{mat}} - \Lambda^B\wedge(\Xi'_{AB} + \Xi'_{BA}) \tag{3.69}$$

となる[2)]。Ξ'_{AB} の 0 でない成分は、

$$\Xi'_{a,bc} = \frac{1}{\kappa}\eta_{abc}, \tag{3.70}$$

$$\Xi'_{a,b} = -\frac{1}{2\kappa}\omega^{cd}\wedge\eta_{abcd} \tag{3.71}$$

[2)] W'_A の最初の 3 項は、W_A の最初の 3 項と一致する。

である。今、

$$\begin{aligned} X'_A &:= -\Lambda^B \wedge (\Xi'_{AB} + \Xi'_{BA}) \\ &= -\Lambda^b \wedge \Xi'_{Ab} - \frac{1}{2}\Lambda^{bc} \wedge \Xi'_{A,bc} - \Lambda^b \wedge \Xi'_{bA} \end{aligned} \tag{3.72}$$

とすると、

$$X'_a = -\frac{1}{2\kappa}\Lambda^{bc} \wedge \eta_{abc} = X_a, \tag{3.73}$$

$$X'_{ab} = -\frac{1}{\kappa}\Lambda^c \wedge \eta_{abc} = X_{ab} \tag{3.74}$$

である。よって、

$$W'_A = W_A \tag{3.75}$$

となる。

以上より、

$$d\Psi_A = W_A + \Lambda^B{}_{AC} q^C \wedge \Psi_B \tag{3.76}$$

となる。

4　重力場の従来の解析力学との関係 [2]

この章では、物質のない場合を考える。

時刻 $x^0 = t = \text{const.}$ で決まる超平面 Σ_t を考える。微分形式 X と外微分演算子 d の Σ_t への制限を、それぞれ $\tilde{X}, \tilde{d}$ と書く。また、d 次元空間 Σ_t の体積形式を $d^d x$ と書く。このとき、

$$H_A d^d x := \tilde{W}_A - \tilde{D}\tilde{\Psi}_A, \tag{4.1}$$

$$\tilde{D}\tilde{\Psi}_A := \tilde{d}\tilde{\Psi}_A - C^D{}_{AB}\tilde{q}^B \wedge \tilde{\Psi}_D \tag{4.2}$$

で 0 形式 H_A を定めると、その通常のポアソン括弧は、

$$\{H_A(\boldsymbol{x},t), H_B(\boldsymbol{y},t)\}_P = -\Lambda^C{}_{AB}(\boldsymbol{x},t)H_C(\boldsymbol{x},t)\delta^d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{4.3}$$

となる3)[2]。ここで、

$$\Lambda^C{}_{AB}(\boldsymbol{x},t) = C^C{}_{AB} + R^C{}_{AB}(\boldsymbol{x},t) \tag{4.4}$$

であった。また、

$$\begin{aligned} H_{\text{ex}}(t) &:= \int_{\Sigma_t} d^d x\ q^A{}_0 H_A(\boldsymbol{x},t) \\ &= \int_{\Sigma_t} d^d x\ [\theta^a{}_0 H_a + \frac{1}{2}\omega^{ab}{}_0 H_{ab}] \end{aligned} \tag{4.5}$$

とすると、これは拡張ハミルトニアンとなる。場の量 $F(\boldsymbol{x},t)$ に対しいて、

$$\{H_{\text{ex}}(t), F(\boldsymbol{x},t)\}_P \approx \frac{dF(\boldsymbol{x},t)}{dt} \tag{4.6}$$

となる。$\approx$ は拘束条件の下での等号である。

通常のポアソン括弧は、

$$\{\theta^a{}_i(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{\pi}_a{}^k(\boldsymbol{y},t)\}_P = \delta^a_b \delta^k_i \delta^d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \tag{4.7}$$

$$\{\omega^{ab}{}_i(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{p}_{cd}{}^k(\boldsymbol{y},t)\}_P = \frac{1}{2}(\delta^a_c\delta^b_d - \delta^a_d\delta^b_c)\delta^k_i\delta^d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{4.8}$$

で定義される。ここで、

$$\boldsymbol{\pi}_a{}^i := \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'}{\partial(\partial_0 \theta^a{}_i)}, \tag{4.9}$$

$$\boldsymbol{p}_{cd}{}^i := \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}'}{\partial(\partial_0 \omega^{ab}{}_i)}, \tag{4.10}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}' := \det(\theta^a{}_\mu)\mathcal{L}', \quad L' = \mathcal{L}'\eta \tag{4.11}$$

である。

また、

$$\{\tilde{q}^A(\boldsymbol{x},t), \tilde{\underset{\sim}{\pi}}_B(\boldsymbol{y},t)\}_P = \delta^A_B \delta^d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) d^d x \tag{4.12}$$

となる (本当に？)。ここで、$\underset{\sim}{\pi}_A = (\pi'_a, 2p'_{ab})$ である。

---

3)

$$\int_{\Sigma_t} d^d x\ f(\boldsymbol{x},t)\delta^d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y},t)$$

である。$\delta^d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は t にも依存する。

5　H_A に対応する d 形式

今、

$$h_A := W_A - d\Psi_A + C^D{}_{AB} q^B \wedge \Psi_D \tag{5.1}$$

とすると、(3.76) より、

$$\begin{aligned} h_A &= (C^D{}_{AB} - \Lambda^D{}_{AB}) q^B \wedge \Psi_D \\ &\equiv E^D{}_{AB} q^B \wedge \Psi_D \end{aligned} \tag{5.2}$$

である[4)]。今、

$$f_{AB} := \{h_A, h_B\}_F \tag{5.3}$$

とする。これは、

$$f_{AB} = -f_{BA} \tag{5.4}$$

を満たす。$E^D{}_{AB}$ はポアソン括弧をすり抜けると仮定する[5)]と、

$$\begin{aligned} f_{AB} &= E^D{}_{AC} E^F{}_{BE} \{q^C \wedge \Psi_D, q^E \wedge \Psi_F\}_F \\ &\equiv E^D{}_{AC} E^F{}_{BE} F^{CD,EF} \end{aligned} \tag{5.5}$$

となる。

$$\begin{aligned} F^{CD,EF} &= q^E \wedge \{q^C \wedge \Psi_D, \Psi_F\}_F + \{q^C \wedge \Psi_D, q^E\}_F \wedge \Psi_F \\ &= q^E \wedge \{q^C, \Psi_F\}_F \wedge \Psi_D - q^E \wedge q^C \wedge \{\Psi_D, \Psi_F\}_F \\ &\quad + \{q^C, q^E\}_F \wedge \Psi_D \wedge \Psi_F - q^C \wedge \{\Psi_D, q^E\}_F \wedge \Psi_F \\ &= q^E \wedge \{q^C, \Psi_F\}_F \wedge \Psi_D - q^E \wedge q^C \wedge \{\Psi_D, \Psi_F\}_F + q^C \wedge \{\Psi_D, q^E\}_F \wedge \Psi_F \end{aligned} \tag{5.6}$$

である。ここで、

$$\{q^C, \Psi_F\}_F = (-1)^D \delta^C_F, \tag{5.7}$$

$$\{\Psi_D, q^E\}_F = -(-1)^D \delta^E_D, \tag{5.8}$$

$$\{\Psi_D, \Psi_F\}_F \equiv M_{DF} \tag{5.9}$$

なので、

$$F^{CD,EF} = (-1)^D [\delta^C_F q^E \wedge \Psi_D - \delta^E_D q^C \wedge \Psi_F] - q^E \wedge q^C \wedge M_{DF} \tag{5.10}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} f_{AB} &= (-1)^D [E^F{}_{AE} E^E{}_{BC} - E^E{}_{AC} E^F{}_{BE}] q^C \wedge \Psi_F - E^D{}_{AC} E^F{}_{BE} q^E \wedge q^C \wedge M_{DF} \\ &\equiv f^{(1)}_{AB} + f^{(2)}_{AB} \end{aligned} \tag{5.11}$$

---

4) $E^A{}_{BC} = -R^A{}_{BC}$ である。
5) 要確認

である。$f^{(2)}_{AB}=0$ かも知れない。また、$f^{(1)}_{AB}$ は、

$$\begin{aligned} f^{(1)}_{AB} &= D^C{}_{AB}h_C \\ &= D^E{}_{AB}E^D{}_{EC}q^C \wedge \Psi_D \end{aligned} \tag{5.12}$$

と書けるかも知れない。そのためには、

$$D^E{}_{AB}E^D{}_{EC} = (-1)^D[E^E{}_{BC}E^F{}_{AE} - E^E{}_{AC}E^F{}_{BE}] \tag{5.13}$$

であれば良い。上式は、

$$E^E{}_{BC}E^F{}_{AE} - E^E{}_{AC}E^F{}_{BE} + (-1)^D D^E{}_{AB}E^D{}_{CE} = 0 \tag{5.14}$$

である。ところで、

$$C^E{}_{BC}C^F{}_{AE} - C^E{}_{AC}C^F{}_{BE} + C^E{}_{AB}C^D{}_{CE} = 0 \tag{5.15}$$

である。もしも、

$$E^E{}_{BC}E^F{}_{AE} - E^E{}_{AC}E^F{}_{BE} + E^E{}_{AB}E^D{}_{CE} = 0 \tag{5.16}$$

ならば、

$$D^E{}_{AB} = (-1)^D E^E{}_{AB} \tag{5.17}$$

とすれば良い。

もしも、$f^{(2)}_{AB}=0$ であり、(5.12) が成立するなら、

$$\{h_A, h_B\}_F = D^C{}_{AB}h_C \tag{5.18}$$

となる。

さて、M_{AB} の 0 でない成分は、

$$M_{a,bc} = -\frac{1}{\kappa}\eta_{abc} \tag{5.19}$$

のみである。よって、

$$\begin{aligned} f^{(2)}_{AB} &= -E^D{}_{AC}E^F{}_{BE}q^E \wedge q^C \wedge M_{DF} \\ &= \frac{1}{2\kappa}E^a{}_{AC}E^{bc}{}_{BE}q^E \wedge q^C \wedge \eta_{abc} \end{aligned} \tag{5.20}$$

となる。さて、$f^{(2)}_{AB} = -f^{(2)}_{BA}$ なので、

$$F^{(2)} := q^A \wedge q^B \wedge f^{(2)}_{AB} \tag{5.21}$$

が考えられる。これは、

$$F^{(2)} = \frac{1}{2\kappa}E^a{}_{AC}E^{bc}{}_{BE}q^A \wedge q^C \wedge q^B \wedge q^E \wedge \eta_{abc} \tag{5.22}$$

であり、

$$E^A := \frac{1}{2} E^A{}_{BC} q^B \wedge q^C \tag{5.23}$$

とすると、

$$F^{(2)} = \frac{2}{\kappa} E^a \wedge E^{bc} \wedge \eta_{abc} \tag{5.24}$$

となる。

さて、$E^A{}_{BC} = -R^A{}_{BC}$ のとき、

$$F^{(2)} = \frac{2}{\kappa} \Theta^a \wedge \Omega^{bc} \wedge \eta_{abc} \tag{5.25}$$

であるが、アインシュタイン方程式より (今は物質がないので)、

$$\Omega^{bc} \wedge \eta_{abc} = 0 \tag{5.26}$$

である。よって、

$$f^{(2)}_{AB} = 0 \tag{5.27}$$

となる。

また、このとき、

$$D^C{}_{AB} = -(-1)^D R^C{}_{AB} \tag{5.28}$$

なので[6)]、

$$\{h_A, h_B\}_F = -(-1)^D R^C{}_{AB} h_C \tag{5.29}$$

となる。

[6)] α を実パラメーターとし、

$$\Lambda^C{}_{AB}(\alpha) := C^C{}_{AB} + \alpha R^C{}_{AB}$$

とすると、

$$\Lambda^E{}_{[AB}(\alpha) \Lambda^F{}_{C]E}(\alpha) = 0$$

となる。これが任意の α で成り立つので、

$$R^E{}_{[AB} R^F{}_{C]E} = 0$$

も成り立つ。

References

[1] A. D'Adda, J. E. Nelson, and T. Regge, "Covariant canonical formalism for the group manifold", Annals of Physics **165**, 384 (1985).

[2] J. E. Nelson and T. Regge, "Covariant Canonical Formalism for Gravity", Annals of Physics **166**, 234 (1986).

[3] A. Lerda, J. E. Nelson, and T. Regge, "Covariant Canonical Formalism for Supergravity", Phys. Lett. **161B**, 294 (1985).

[4] A. Lerda, J. E. Nelson, and T. Regge, "The Group Manifold Hamiltonian for Supergravity", Phys. Lett. **161B**, 297 (1985).

[5] Y. Kaminaga, "Poisson Bracket and Symplectic Structure of Covariant Canonical Formalism of Fields", EJTP **14**, 55 (2018).

[6] A. D'Adda, R. D'Auria, P. Fré, and T. Regge, "Geometrical Formulation of Supergravity Theories on Orthosymplectic Supergroup Manifolds", Riv. Nuovo Cim. **3N6**, 1 (1980).

[7] L. Castellani, "Group geometric methods in supergravity and superstring theories", Int. J. Mod. Phys. A **7**, 1583 (1992).

[8] Leonardo Castellani and Alessandro D'Adda, "Covariant hamiltonian for gravity coupled to p-forms", arXiv:1906.11852.

[9] 中嶋 慧「共変解析力学のレビュー」
`http://physnakajima.html.xdomain.jp/CAM_rev.pdf`