共変解析力学のレビュー

S. Nakajima, EJTP **13**, 95 (2016) (arXiv:1510.09048)
, arXiv:1602.04849
, arXiv:1909.06779
http://physnakajima.html.xdomain.jp/CAM_rev.pdf (レビュー論文)

中嶋 慧

http://physnakajima.html.xdomain.jp/

自己紹介

興味：原理的なこと

非平衡統計（M2〜）（D論）

- 非平衡でのエントロピー

S. Nakajima and Y. Tokura, J. Stat. Phys. 169, 902 (2017).

- 量子（断熱）ポンプ

S. Nakajima, *et al*., PRB **92**, 195420 (2015).

- 博士論文

S. Nakajima, arXiv:1710.05646

量子（連続）測定（D1）

測定, 波束の収縮とは何か

- Mensky制限経路積分のnon-Markovへ拡張

共変解析力学（D2〜）

時間と空間を平等に扱う解析力学。微分形式が基本変数。

S. Nakajima, EJTP **13**, 95 (2016) (arXiv:1510.09048)
, arXiv:1602.04849
, arXiv:1909.06779
http://physnakajima.html.xdomain.jp/CAM_rev.pdf

目次

(1)導入, 背景

(2)共変解析力学

(3)文献, 歴史

(4)重力場への適用

(5)ポアソン括弧, 正準変換

(6)ゲージ変換の生成子

(7)ディラック場の共変解析力学

(1)導入, 背景

背景(1)

解析力学

ラグランジュ形式

$$L = L(q, \dot{q})$$

ハミルトン形式

$$H = p\dot{q} - L = H(q, p) \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

量子力学

$$\{q, p\} = 1 \to [q, p] = i\hbar$$

量子力学はハミルトン形式と相性が良い

場の解析力学

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) \quad \partial_\mu \psi = (\partial_0 \psi, \nabla \psi)}$$

ラグランジュ形式

相対論はラグランジュ形式と相性が良い

ハミルトン形式

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \psi}$$

$$\mathcal{H} = \pi \partial_0 \psi - \mathcal{L} = \mathcal{H}(\psi, \nabla \psi, \pi)$$

相対論

[問題1]時間を特別扱いし、相対論的共変性が自明でない

背景(2):ゲージ固定

電磁場のラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + A_\mu J^\mu$$

電磁場 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

スカラーポテンシャルの正準共役運動量:

$$\pi^\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 A_0} = 0$$

[問題2] 正準運動量は独立ではない

→ ゲージ固定 ゲージ変換 $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \Lambda$ のもとで、$F_{\mu\nu}$ は不変

ポアソン括弧の代わりにDirac括弧

問題1,2は、重力の量子化(ハミルトン形式)の際に特に問題となる。

微分形式(1)

1形式(ベクトルポテンシャル)

$$A = A_\mu dx^\mu$$

2形式(電磁場)

$$\begin{aligned} F &= dA \\ &= \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned}$$

磁場についてのガウス則, ファラデー則

$$dF = ddA = 0$$

$$\Longleftrightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \ \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$$

微分形式は座標系に依らない

外微分

$$d\bullet = dx^\mu \wedge \partial_\mu \bullet$$

外積(反対称化積)

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$$

$$\begin{aligned} dd\bullet &= \frac{1}{2} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge (\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\bullet \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

微分形式(2)

p形式(p=0,1,…,D)

$$\omega = \underline{\omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}} dx^{\mu_1}\wedge dx^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}$$

完全反対称テンソル

Dualな(D-p)=r形式

$$*\omega = \frac{1}{r!}E^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_r}\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}dx^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_r}$$

$E_{\mu_1\cdots\mu_D}$ は完全反対称テンソルで、$E_{0\cdots D-1}=\sqrt{-g}$

$$**\omega = -(-1)^{p(D-p)}\omega$$

ガウス則, アンペール・マクスウェル則

$$\boxed{d*F=J} \qquad J = *(J_\mu dx^\mu)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \partial_\mu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = -\sqrt{-g}J^\nu$$

$$\Longleftrightarrow \quad \nabla\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{E}=\rho,\ \nabla\times\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0\boldsymbol{E}=\boldsymbol{i}$$

微分形式は座標系に依らないため、微分形式での定式化は相対論の精神(物理学の座標系からの解放)を最も完全な形で表している。

(2)共変解析力学

共変解析力学(一般論)

微分形式が基本変数(実体)。微分形式の微分形式による微分を使って、解析力学を再構成する。

Lagrangian *D*-form

Action $S = \int_V L$ $L(\psi, d\psi) = \mathcal{L}\eta, \quad \eta = *1 = \sqrt{-g}dx^0 \wedge dx^1 \ldots \wedge dx^{D-1}$

p-form $d\psi = \partial_{[\mu}\psi_{\mu_1\cdots\mu_p]}dx^{\mu} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$

基本的な場の理論は、すべてこの形で書ける。

$$\delta L = \delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial \psi} + \delta d\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\psi} \qquad d\delta = \delta d$$

微分の定義

$$\delta L = \delta\psi \wedge \left(\frac{\partial L}{\partial \psi} - (-1)^p d\frac{\partial L}{\partial d\psi}\right) + d\left(\delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\psi}\right)$$

Euler-Lagrange equation

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \psi} - (-1)^p d\frac{\partial L}{\partial d\psi} = 0.}$$

ここまでは遅くても1972年から知られている。

正準形式

ここからが新しい

Conjugate form $\pi \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\partial L}{\partial d\psi}$ (*D*-*p*-1)=*q*-form

Hamilton *D*-form

時間と空間が平等。座標系によらない。

問題1は解決。

$$H = H(\psi, \pi) \overset{\text{def}}{=} d\psi \wedge \pi - L$$

$$\begin{aligned}\delta H &= \delta d\psi \wedge \pi + d\psi \wedge \delta\pi - \delta L \\ &= \cancel{\delta d\psi \wedge \pi} + (-1)^{(p+1)q}\delta\pi \wedge d\psi - \delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial \psi} - \cancel{\delta d\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\psi}} \\ &= (-1)^{(p+1)q}\delta\pi \wedge d\psi - \delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial \psi}\end{aligned}$$

恒等式 $\dfrac{\partial H}{\partial \pi} = (-1)^{(p+1)q} d\psi, \quad \dfrac{\partial H}{\partial \psi} = -\underline{\dfrac{\partial L}{\partial \psi}}.$

Euler-Lagrange equation

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - (-1)^p d\frac{\partial L}{\partial d\psi} = 0.$$

正準方程式

$$\boxed{d\psi = (-1)^{(p+1)q}\frac{\partial H}{\partial \pi}, \quad d\pi = -(-1)^p \frac{\partial H}{\partial \psi}.}$$

D=1で通常の質点の解析力学

2つのルジャンドル変換

共変解析力学

$$H(\psi,\pi) = d\psi \wedge \pi - L,\ \pi = \frac{\partial L}{\partial d\psi}$$

$(p+1)$ 形式 $d\psi$ を $(D-p-1)$ 形式 π で表す。

$$d\psi = \partial_{[\mu}\psi_{\mu_1\cdots\mu_p]}dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$$

通常の解析力学

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \partial_0\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}\boldsymbol{\pi}^{\mu_1\cdots\mu_p} - \boldsymbol{\mathcal{L}},\ \boldsymbol{\pi}^{\mu_1\cdots\mu_p} = \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_0\psi_{\mu_1\cdots\mu_p})} \qquad \boldsymbol{\mathcal{L}} = \sqrt{-g}\mathcal{L}$$

$\partial_0\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}$ は $\boldsymbol{\pi}^{\mu_1\cdots\mu_p}$ で表せない事がある。

$$\boldsymbol{\pi}^\mu = \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -\sqrt{-g}F^{0\mu}$$

　通常の解析力学のルジャンドル変換は、電磁場, ゲージ場, 重力場では上手く出来ない。
　共変解析力学のルジャンドル変換は、電磁場, ゲージ場, 重力場でも上手くできる。

逆ルジャンドル変換

Lagrangian formのルジャンドル変換

$$H(\psi,\pi) = d\psi \wedge \pi - L(\psi, d\psi),\ \pi = \frac{\partial L}{\partial d\psi}$$

の逆ルジャンドル変換は、

$$L'(\psi,\nu) \overset{\mathrm{def}}{=} \pi \wedge \nu - H(\psi,\pi),\ \nu \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial H}{\partial \pi}$$

恒等式(正準方程式) $\nu = (-1)^{(p+1)q} d\psi$ より、

$$\begin{aligned} L'(\psi,\nu) &= \pi \wedge (-1)^{(p+1)q} d\psi - H \\ &= d\psi \wedge \pi - H \\ &= L(\psi, d\psi) \end{aligned}$$

元に戻る

電磁場(1)

Lagrangian form $L(A, dA) = -\frac{1}{2}F \wedge *F + A \wedge J = \mathcal{L}\eta$ $\qquad J = *(J_\mu dx^\mu)$, $\quad F = dA$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\mu A_\nu) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + A_\mu J^\mu$$

導関数(微分形式) $\dfrac{\partial L}{\partial A} = J, \quad \dfrac{\partial L}{\partial dA} = - * F$

オイラー・ラグランジュ方程式 $\dfrac{\partial L}{\partial A} + d\dfrac{\partial L}{\partial dA} = 0$

は、$\boxed{d * F = J}$

電磁場 (2)

共役微分形式 $\pi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial dA} = \underline{-*F}$ cf. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 A_0} = 0$

独立！ $dA = *\pi$

問題2も解決!

Hamilton *D*-form (not (*D*-1)-form)

$$H(A,\pi) = \underline{\frac{1}{2}\pi \wedge *\pi} - A \wedge J$$

$$= -\frac{1}{2}F \wedge *F \qquad L = \underline{-\frac{1}{2}F \wedge *F} + A \wedge J$$

ゲージ共変

正準方程式 $dA = \frac{\partial H}{\partial \pi},\ d\pi = \frac{\partial H}{\partial A}$ は、$\boxed{dA = *\pi,\ d\pi = -J}$

美しい！

[中村], [神長2012]

文献は第3部で。

De Donder-Weyl理論(1)

[問題1]ハミルトン形式は、時間を特別扱いし、相対論的共変性が自明でない。

$$\pi^{0,\mu_1\cdots\mu_p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \psi_{\mu_1\cdots\mu_p}} \qquad \mathcal{L} = \sqrt{-g}\mathcal{L}(\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}, \partial_\mu \psi_{\mu_1\cdots\mu_p})$$

$$g = \det g_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{H}(\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}, \nabla\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}, \pi^{0,\mu_1\cdots\mu_p}) = \pi^{0,\mu_1\cdots\mu_p}\partial_0\psi_{\mu_1\cdots\mu_p} - \mathcal{L}$$

De Donder-Weyl理論

https://en.wikipedia.org/wiki/De_Donder%E2%80%93Weyl_theory

De Donder(ド・ドンデ) (1930), H. Weyl (1934)

$$\pi^{\underline{\mu},\mu_1\cdots\mu_p} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\underline{\mu}} \psi_{\mu_1\cdots\mu_p}}$$

時間と空間を平等に扱う

$$\mathcal{H}_{\mathrm{DW}}(\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}, \pi^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}) \overset{\text{def}}{=} \pi^{\underline{\mu},\mu_1\cdots\mu_p}\partial_{\underline{\mu}}\psi_{\mu_1\cdots\mu_p} - \mathcal{L}$$

De Donder-Weyl理論(2)

$$\delta\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{DW}} = \delta\pi^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}\partial_\mu\psi_{\mu_1\cdots\mu_p} + \cancel{\pi^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}\delta\partial_\mu\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}} - \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}}\delta\psi_{\mu_1\cdots\mu_p} - \cancel{\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial\partial_\mu\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}}\delta\partial_\mu\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}}$$

$$= \delta\pi^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}\partial_\mu\psi_{\mu_1\cdots\mu_p} - \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}}\delta\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{DW}}}{\partial\pi^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}} = \partial_\mu\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}, \quad \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{DW}}}{\partial\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}} = \underline{-\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}}}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}} - \partial_\mu\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial\partial_\mu\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}} = 0$$

De Donder-Weyl方程式

$$\boxed{\partial_\mu\psi_{\mu_1\cdots\mu_p} = \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{DW}}}{\partial\pi^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}}, \quad \underline{\partial_\mu\pi^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}} = -\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{DW}}}{\partial\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}}}$$

通常の正準方程式

$$\frac{\partial\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}}{\partial t} = \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial\pi^{0,\mu_1\cdots\mu_p}},$$

$$\frac{\partial\pi^{0,\mu_1\cdots\mu_p}}{\partial t} = -\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}} + \partial_i\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial\partial_i\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}}$$

De Donder-Weyl理論の問題点

$$\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial \partial_\mu \psi_{\mu_1\cdots\mu_p}}$$

一般に独立ではない。

$$\partial_\mu \psi_{\mu_1\cdots\mu_p} = \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{DW}}}{\partial \boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}}, \quad \partial_\mu \boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p} = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{DW}}}{\partial \psi_{\mu_1\cdots\mu_p}}$$

スカラー場以外では、一般には成立しない。

例：電磁場

$$\pi^{\mu,\nu} = \boldsymbol{\pi}^{\mu,\nu}/\sqrt{-g} = -F^{\mu\nu}$$

D^2成分のうち独立なのは*D*(*D*-1)/2成分

$$\mathcal{H}_{\mathrm{DW}} = \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{DW}}/\sqrt{-g} = -\frac{1}{4}\pi_{\mu,\nu}\pi^{\mu,\nu} - A_\mu J^\mu$$

$$\partial_\mu A_\nu = -\frac{1}{2}\pi_{\mu,\nu}\left(= \frac{1}{2}F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}A_{\nu]}\right), \quad \partial_\mu(\sqrt{-g}\pi^{\mu,\nu}) = \sqrt{-g}J^\nu$$

不成立

次にDe Donder-Weyl理論の修正版が共変解析力学と等価だと示す。

微分形式による導関数

D-formの微分は常に存在する：

$$\frac{\partial L}{\partial \psi^A} = \frac{1}{p!}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial \psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}} * dx_{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\mu_p} \qquad dx_\mu = g_{\mu\nu}dx^\nu$$

$$\begin{aligned}\pi_A &= \frac{1}{(p+1)!}\pi_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p} * dx_\mu \wedge dx_{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\mu_p} \\ &= \frac{1}{(p+1)!q!}\boldsymbol{\pi}_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}\frac{1}{\sqrt{-g}}E_{\mu\mu_1\cdots\mu_p\nu_1\cdots\nu_q}dx^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_q}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \psi^A} = \frac{1}{p!}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{DW}}}{\partial \psi^A_{\mu_1\cdots\mu_p}} * dx_{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\mu_p}$$

$$d\pi_A = \frac{(-1)^p}{p!}\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu \boldsymbol{\pi}_A^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p} * dx_{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\mu_p}$$

一般のformの微分は存在するとは限らない(*D*=1なら存在する)。

$$\frac{\partial * \pi_A}{\partial \pi_B} = ?$$

De Donder-Weylとの関係(1)

$$\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial \partial_\mu \psi_{\mu_1\cdots\mu_p}} \qquad d\psi = \partial_{[\mu}\psi_{\mu_1\cdots\mu_p]} dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$$

$$\boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p} = \boldsymbol{\pi}^{[\mu,\mu_1\cdots\mu_p]}$$

上の拘束の下での変分：

$$\delta\boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{DW}} = \delta\boldsymbol{\pi}^{[\mu,\mu_1\cdots\mu_p]}\underline{\partial_{[\mu}\psi_{\mu_1\cdots\mu_p]}} - \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial \psi_{\mu_1\cdots\mu_p}}\delta\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}$$

De Donder-Weyl方程式の修正版

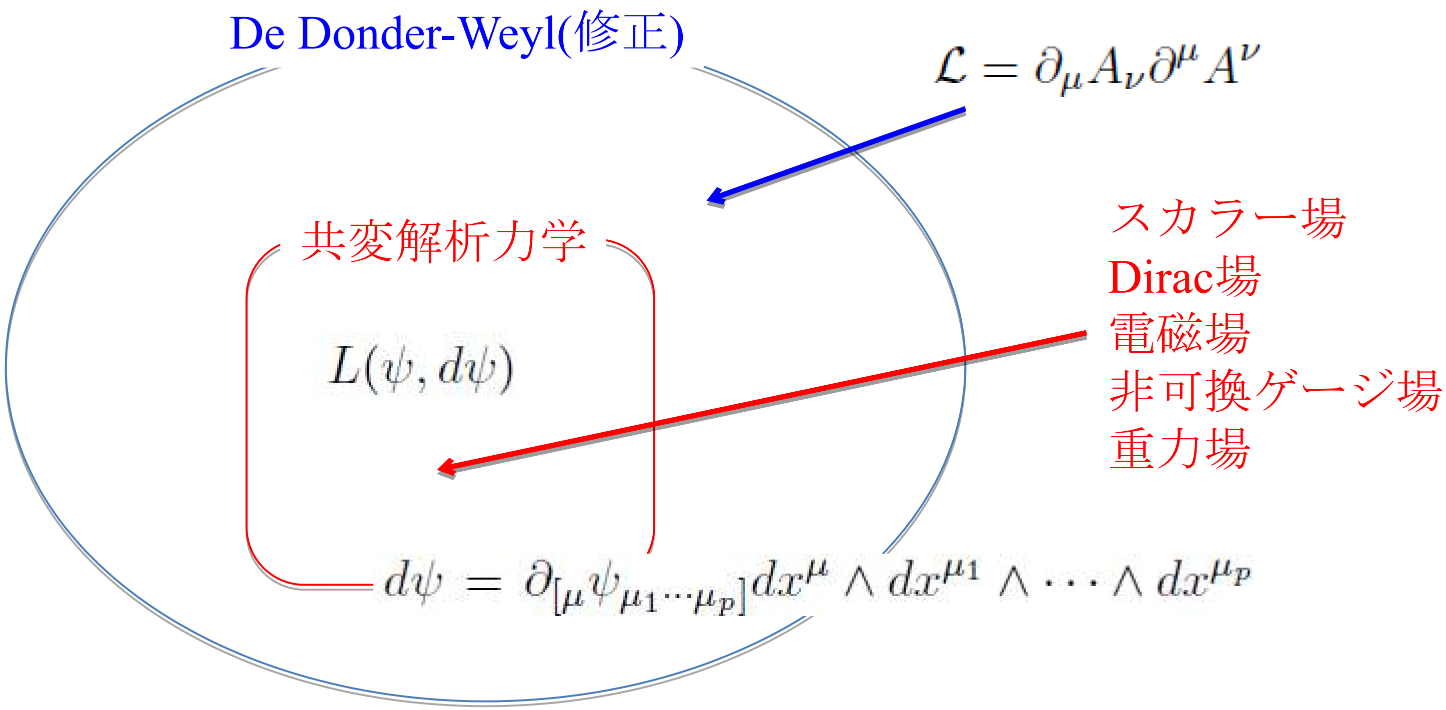
反対称化

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\partial_{[\mu}\psi_{\mu_1\cdots\mu_p]}} &= \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{DW}}}{\partial \boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}} \\ \partial_\mu \boldsymbol{\pi}^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p} &= -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{DW}}}{\partial \psi_{\mu_1\cdots\mu_p}} \end{aligned}}
\quad \begin{aligned} &\Longleftrightarrow d\psi = (-1)^{(p+1)q}\frac{\partial H}{\partial \pi} \\ &\Longleftrightarrow d\pi = -(-1)^p \frac{\partial H}{\partial \psi} \end{aligned}$$

$$H = \boldsymbol{\mathcal{H}}_{\mathrm{DW}} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{D-1}$$

[中嶋2016b]

De Donder-Weylとの関係(2)



[1]で初めてDe Donder-Weyl theoryのポアソン括弧が導出された。
これは共変解析力学のものと近いが異なる。

ポアソン括弧の量子化への応用可能性は不明である。
しかし、Kanatchikovは、Dirac括弧に基づいたPrecanonical quantizationを提案[2].

[1] I. V. Kanatchikov, Rept. Math. Phys. **41**, 49 (1998).
[2] I. V. Kanatchikov, J. Phys.: Conf. Ser. **442**, 012041 (2013).

量子化の困難

通常の正準量子化

$$\{q^A, p_B\} = \delta^A_B \to [q^A, p_B] = i\hbar\delta^A_B$$

共変解析力学のポアソン括弧 (電磁場)

$$\{A, \pi\} = (-1)^D$$

$A \wedge \pi$ は $D-1 = 3$-form.

$$A = A_\mu dx^\mu \ (4\text{ 成分}),$$
$$\pi = -*dA \ (6\text{ 成分}).$$

位置と共役量の成分の数が異なる

Precanonical quantization

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\hat{C}, \ C = \{A, B\}^{\text{Dirac}}_{\text{De Donder-Weyl}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_{\mu_1 \cdots \mu_p}} = \pi^{\mu, \mu_1 \cdots \mu_p} \to -i\frac{\hbar}{k}\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial \psi_{\mu_1 \cdots \mu_p}}$$

$$\underline{\omega_\mu} \to k\gamma_\mu, \quad [k] = L^{D-1}$$

(D-1)-form

$$dx^\mu \wedge \underline{\omega_\nu} = \delta^\mu_\nu dx^0 \wedge dx^1 \ldots \wedge dx^{D-1}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \ \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, \cdots, +)$$

(3)文献, 歴史

文献(1)

[中村]中村匡「微分形式で見た電磁気学〜あるいは2+1次元人の電磁気学と時空平等解析力学について〜」，物性研究**79**, 2 (2002).

[神長2012]神長保仁, “Covariant Analytic Mechanics with Differential Forms and Its Application to Gravity”, EJTP **9**, 199 (2012).

[中嶋2016a]中嶋 慧, “Application of covariant analytic mechanics with differential forms to gravity with Dirac field”, EJTP **13**, 95 (2016). (arXiv:1510.09048)

[中嶋2016b]中嶋 慧, “Reconsideration of De Donder-Weyl theory by covariant analytic mechanics”, arXiv:1602.04849

[神長2018]神長保仁, “Poisson Bracket and Symplectic Structure of Covariant Canonical Formalism of Fields” , EJTP **14**, 55 (2018). (arXiv:1703.06718)

[中嶋2019]中嶋 慧, “Generators of local gauge transformations in the covariant canonical formalism of fields”, arXiv:1909.06779

[中嶋rev]中嶋 慧「共変解析力学のレビュー」
http://physnakajima.html.xdomain.jp/CAM_rev.pdf

文献(2)

[1985a]A. D'Adda, J. E. Nelson and T. Regge, "Covariant canonical formalism for the group manifold", Annals of Physics **165**, 384 (1985).

[1985b]A. Lerda, J. E. Nelson and T. Regge, "Covariant Canonical Formalism for Supergravity", Phys. Lett. **161**, 294 (1985).

[1985c]A. Lerda, J. E. Nelson and T. Regge, "The Group Manifold Hamiltonian for Supergravity", Phys. Lett. **161**, 297 (1985).

[1986]J. E. Nelson and T. Regge, "Covariant Canonical Formalism for Gravity", Annals of Physics **166**, 234 (1986).

[Castellani2019]L. Castellani and A. D'Adda, "Covariant hamiltonian for gravity coupled to *p*-forms", arXiv:1906.11852.

歴史

・1985年にA. D'Addaら[1985a]が正準形式を始めて考える。
1階形式の重力場を研究する。
ポアソン括弧の性質を公理として与える。

・2002年に中村[中村]が共変解析力学を再発見し、電磁場に適用。

・2012年に神長[神長2012]がディラック場がない場合の重力場(2階形式)に適用。
ただし、4次元のみ。

・[中嶋2016a]で、ディラック場ある場合の重力場(2階形式)が調べられる。
ただし、4次元のみ。[中嶋2019]で任意の次元に。

・[神長2018]で、ポアソン括弧とシンプレクティック理論が発見される。

・[Castellani2019]で、1階形式の重力場の局所ゲージ変換の生成子が研究される。

・[中嶋2019]で、物質場, ゲージ場, 2階形式の重力場に対する局所ゲージ変換の生成子が研究される。

(4)重力場への適用

重力場とDirac場への適用

従来の解析力学では、時空を(3+1)分解し、計量を位置変数と考える。
この結果、第1種拘束系となり、ゲージ固定(座標系の制限)が必要となる。

→ 共変解析力学では(3+1)分解は不要。ゲージ固定も不要。
2階形式では非拘束系となる。1階形式では第2種拘束系となる。

ゲージ場, 重力場(2階形式)という第1種拘束系は、非拘束系となり、
ゲージ固定は不要となる。
第1種拘束系は、通常の解析力学が時間を特別視したことによって生じた困難。

Dirac場は、共変解析力学でも第2種拘束系。未定乗数法を使う必要がある。

第1種拘束系：未定乗数が決まらない拘束系。
第2種拘束系：未定乗数が決まる拘束系。

1階形式：4脚場(計量)と接続(ゲージ場)が独立変数。
2階形式：4脚場だけが独立変数。

多脚場

時空の各点に接空間(ミンコフスキー空間)を考える。
各点ごとに接空間のフレームを与えるのが多脚場θ^a(a=0,1,.., D-1)である。

計量テンソル $g = \mathring{g}_{ab}\theta^a \otimes \theta^b$

$$\theta^a = \underbrace{\theta^a{}_\mu}_{\text{多脚場}} dx^\mu$$

$$\mathring{g}_{ab} = \mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1)$$

$$g_{\mu\nu} = \mathring{g}_{ab}\theta^a{}_\mu \theta^b{}_\nu$$

Dirac場はローレンツ群に対するスピン1/2表現。
→ 一般座標変換に対してでなく、ローレンツ変換に対しての変換に意味がある。

Dirac場を記述するためには、時空の各点に接ミンコフスキー時空を考えて、
その空間でのローレンツ変換の表現としてDirac場を扱う必要がある。
よって、4脚場が必要である(時空が平坦でも)。

Dirac場

$$\bar{\psi} = i\psi^\dagger\gamma^0 \qquad \gamma_{ab} = \gamma_{[a}\gamma_{b]} \quad \gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2\overset{\circ}{g}{}^{ab}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{D}}^{\beta} = -\frac{1+\beta}{2}\bar{\psi}\gamma_c\underline{\theta^{c\mu}}(\partial_\mu\psi + \frac{1}{4}\gamma_{ab}\underline{\omega^{ab}{}_\mu}\psi) + \frac{1-\beta}{2}\theta^{c\mu}(\partial_\mu\bar{\psi} - \frac{1}{4}\bar{\psi}\gamma_{ab}\omega^{ab}{}_\mu)\gamma_c\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{\beta}{2}\underline{C_a}\bar{\psi}\gamma^a\psi$$

$$\eta^a = *\theta^a,\ \ \theta^a = \underline{\theta^a{}_\mu}dx^\mu \qquad \omega^{ab} = \underline{\omega^{ab}{}_\mu}dx^\mu = -\omega^{ba}$$

接続, ゲージ場(局所ローレンツ変換の)

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{D}}^{\beta} = &-\frac{1+\beta}{2}\bar{\psi}\gamma_c(d\psi + \frac{1}{4}\gamma_{ab}\underline{\omega^{ab}}\psi)\wedge\underline{\eta^c} + \frac{1-\beta}{2}(d\bar{\psi} - \frac{1}{4}\bar{\psi}\gamma_{ab}\omega^{ab})\gamma_c\psi\wedge\eta^c - m\bar{\psi}\psi\eta \\ &-\frac{\beta}{2}C_a\bar{\psi}\gamma^a\psi\eta \\ = &\ L_{\mathrm{D}}^{\beta=0} - \frac{\beta}{2}d(\eta^a\bar{\psi}\gamma_a\psi) \end{aligned}$$

Torsion(捩率) $\Theta^a = d\theta^a + \omega^a{}_b\wedge\theta^b = \frac{1}{2}C^a{}_{bc}\theta^b\wedge\theta^c,\ \ \underline{C_a} = C^b{}_{ab}$

重力場の方程式から決まる。
重力場ともDirac場とも独立とみなす。

重力場(2階形式)

$$L(\theta, d\theta) = L_{\mathrm{G}}(\theta, d\theta) + L_{\mathrm{mat}}(\theta, \underline{\omega}(\theta, d\theta)),$$

スカラー場, ゲージ場は接続 ω を含まない。

$$L_{\mathrm{G}}(\theta, d\theta) = \frac{1}{2\kappa}\underline{N'}, \quad N' \stackrel{\mathrm{def}}{=} *R - \underline{d(\omega^{ab} \wedge e_{ab})}.$$

κ: アインシュタイン定数

ゲージ不変でない　引かないと扱えない。

$d\omega^{ab}(\theta, d\theta)$ は θ^a の 2 階微分を含む。

高次曲率項は扱えない。

$$*R = \Omega^{ab} \wedge \eta_{ab}$$

$$\Omega^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = \frac{1}{2}R^a{}_{bcd}\theta^c \wedge \theta^d \qquad R_{ab} = R^c{}_{acb},\ R = R^a{}_a.$$

$$\eta^a = *\theta^a,\ \eta^{ab} = *(\theta^a \wedge \theta^b),\ \eta^{abc} = *(\theta^a \wedge \theta^b \wedge \theta^c),\ \eta^{abcd} = *(\theta^a \wedge \theta^b \wedge \theta^c \wedge \theta^d)$$

オイラー・ラグランジュ方程式

$$\delta\eta_{ab} = \delta\theta^c \wedge \eta_{abc}$$

$$\delta L(\theta, d\theta) = \delta\theta^c \wedge \left(\frac{1}{2\kappa}[\Omega^{ab}\wedge\eta_{abc} - d(\omega^{ab}\wedge\eta_{abc})] + *T_c\right) + \delta d\theta^c \wedge \frac{1}{2\kappa}\omega^{ab}\wedge\eta_{abc}$$
$$+\delta\omega^{ab}(\theta, d\theta)\wedge\underline{\left(\frac{1}{2\kappa}[d\eta_{ab} - \omega^c{}_a\wedge\eta_{cb} - \omega^c{}_b\wedge\eta_{ac}] + \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial\omega^{ab}}\right)}$$

=0を要請. Torsionを決める式。

1階形式のωのオイラー・ラグランジュ方程式と一致。

$$*T_a \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}(\theta,\omega)}{\partial\theta^a} \qquad T_a = T_{ab}\theta^b$$

オイラーラグランジュ方程式 $\partial L/\partial\theta^c + d(\partial L/\partial d\theta^c) = 0$ は、

$$-\frac{1}{2\kappa}\Omega^{ab}\wedge\eta_{abc} = *T_c \longleftrightarrow R^a{}_b - \frac{1}{2}R\delta^a_b = \kappa T_b{}^a$$

N'の変形

$$N' = \omega^{a}{}_{c} \wedge \omega^{cb} \wedge \eta_{ab} + \omega^{ab} \wedge d\eta_{ab}$$
$$= N + \Theta^{a} \wedge \omega^{bc} \wedge \eta_{abc}$$

第1式に $\frac{1}{2\kappa}\left(de_{ab} - \omega^{c}{}_{a} \wedge e_{cb} - \omega^{c}{}_{b} \wedge e_{ac}\right) + \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial \omega^{ab}} = 0$ を代入して、

$$N' = N - 2\kappa\omega^{ab} \wedge \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial \omega^{ab}}$$

比べて、

$$\omega^{ab} \wedge \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial \omega^{ab}} = -\frac{1}{2\kappa}\Theta^{a} \wedge \omega^{bc} \wedge \eta_{abc}$$

ところで、

$$N = d\theta^{a} \wedge \frac{1}{2}\omega^{bc} \wedge \eta_{abc} - \Theta^{a} \wedge \frac{1}{2}\omega^{bc} \wedge \eta_{abc}$$

と書ける。

$$d\theta^{a} + \omega^{a}{}_{b} \wedge \theta^{b} = \Theta^{a}$$
$$\theta^{a} \wedge \eta_{bcd} = \delta^{a}_{b}\eta_{cd} - \delta^{a}_{c}\eta_{bd} + \delta^{a}_{d}\eta_{bc}$$

正準形式

共役形式 $\pi_a = \frac{1}{2\kappa}\omega^{bc} \wedge \eta_{abc}$ Nester-Witten form

$$H(\theta,\pi) = d\theta^a \wedge \pi_a - L = H_{\mathrm{G}}(\theta,\pi) - L_{\mathrm{mat}}(\theta,\pi),$$

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{G}}(\theta,\pi) &= d\theta^a \wedge \pi_a - \left[d\theta^a - \Theta^a\right] \wedge \frac{1}{2}\pi_a - \Theta^a \wedge \pi_a \\ &= \underbrace{\left[d\theta^a - \Theta^a\right]}_{= -\omega^a{}_b \wedge \theta^b} \wedge \frac{1}{2}\pi_a = \frac{1}{2\kappa}N \end{aligned}$$

$$N \stackrel{\mathrm{def}}{=} \omega^a{}_c \wedge \omega^{cb} \wedge \eta_{ba}$$

ωをπで表せば良い

電磁場の場合と同様に、H_{G}=L_{G} (Θ=0のとき).

L_{G}は$d\theta$の2次式

重力場は、非可換ゲージ場より、電磁場に似ている。

正準方程式

$$d\theta^a = \frac{\partial H_{\rm G}}{\partial \pi_a} - \frac{\partial L_{\rm mat}}{\partial \pi_a}, \quad d\pi_a = \frac{\partial H_{\rm G}}{\partial \theta^a} - \frac{\partial L_{\rm mat}}{\partial \theta^a}.$$

$$-\frac{\partial L_{\rm mat}}{\partial \pi_a} = -\frac{\partial}{\partial \pi_a}\left[\omega^{bc} \wedge \frac{\partial L_{\rm mat}}{\partial \omega^{bc}}\right] = \frac{\partial}{\partial \pi_a}[\Theta^b \wedge \pi_b] = \Theta^a$$

$$d\theta^a \doteq \frac{\partial H_{\rm G}}{\partial \pi_a} + \Theta^a$$

後で示す

$$\frac{\partial H_{\rm G}}{\partial \theta^c} = \frac{1}{2\kappa}\left[\omega^d{}_b \wedge \omega^{ab} \wedge \eta_{adc} + \omega^d{}_c \wedge \omega^{ab} \wedge \eta_{abd}\right]$$

Sparling's form

$$= \frac{1}{2\kappa}[-\Omega^{ab} \wedge \eta_{abc} + d(\omega^{ab} \wedge \eta_{abc})] + \omega^{ab} \wedge \underline{B_{c,ab}}$$

$$-\frac{\partial L_{\rm mat}}{\partial \theta^c} = - * T_c - \underline{t_c}$$

Dirac場がないなら0

$\omega^{ab} \wedge B_{c,ab} = t_c$ が示せる

$$d\cancel{\pi}_c = \frac{1}{2\kappa}[-\Omega^{ab} \wedge \eta_{abc} + d(\omega^{ab} \cancel{\wedge} \eta_{abc})] - *T_c$$

アインシュタイン方程式

ωをπで表す

$$N = (\omega_{abc}\omega^{bca} + \omega_a\omega^a)\eta \qquad \omega_{ab} = \omega_{abc}\theta^c \qquad \omega_a \overset{\text{def}}{=} \omega^b{}_{ab}$$

$$\omega_{abc} = \kappa\left[v_{c,ab} + \frac{1}{D-2}(\mathring{g}_{ac}v_b - \mathring{g}_{bc}v_a)\right] \qquad v_a = v^b{}_{ab}$$

$$v_{c,ab} \overset{\text{def}}{=} *(-\pi_c \wedge \theta_a \wedge \theta_b) \equiv - * V_{c,ab}. \qquad \mathring{g}_{ab} = \mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1)$$

$$\delta v_{c,ab}\eta = \delta V_{c,ab} - v_{c,ab}\delta\eta$$

πでの変分

$$\delta H_{\mathrm{G}} = A_{abc}\omega^{c[ab]} + A_a\omega^a \qquad A_a \stackrel{\mathrm{def}}{=} A^b{}_{ab}$$

$$A_{abc} = \delta\pi_c \wedge \theta_a \wedge \theta_b + \delta\pi_d \wedge \frac{1}{D-2}(\mathring{g}_{ac}\theta_b \wedge \theta^d - \mathring{g}_{bc}\theta_a \wedge \theta^d)$$

$$\begin{aligned}\delta H_{\mathrm{G}} &= \delta\pi_c \wedge \theta_a \wedge \theta_b\omega^{c[ab]}, \\ \frac{\partial H_{\mathrm{G}}}{\partial \pi_c} &= \theta^a \wedge \theta^b\omega^c{}_{[ab]} \\ &= -\omega^c{}_a \wedge \theta^a.\end{aligned}$$

θの正準方程式 $d\theta^a = \dfrac{\partial H_{\mathrm{G}}}{\partial \pi_a} + \Theta^a$ は、

$$d\theta^a = -\omega^a{}_b \wedge \theta^b + \Theta^a \qquad \text{第1造方程式}$$

θでの変分

公式 $\dfrac{\partial H}{\partial \theta^a} = e_a \rfloor H - (e_a \rfloor \pi_b) \wedge \dfrac{\partial H}{\partial \pi_b}$ $\qquad e_a \rfloor \theta^b = \delta^b_a$

を使う。

内部積

$$e_a \rfloor H = \frac{1}{2\kappa}(\omega^d{}_{ca}\omega^{cb} \wedge \eta_{bd} - \omega^{cb}{}_a \omega^d{}_c \wedge \eta_{bd} + \omega^d{}_c \wedge \omega^{cb} \wedge \eta_{bda})$$

$$-(e_a \rfloor \pi_b) \wedge \frac{\partial H}{\partial \pi_b} = \frac{1}{2\kappa}(\omega^{cd}{}_a \omega^b{}_e \wedge \theta^e \wedge \eta_{cdb} - \omega^{cd} \wedge \omega^b{}_e \wedge \theta^e \wedge \eta_{cdba})$$

$$\theta^a \wedge \eta_{bcd} = \delta^a_b \eta_{cd} - \delta^a_c \eta_{bd} + \delta^a_d \eta_{bc}$$

$$\theta^a \wedge \eta_{bcde} = -\delta^a_b \eta_{cde} + \delta^a_c \eta_{bde} - \delta^a_d \eta_{bce} + \delta^a_e \eta_{bcd}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta^a} = \frac{1}{2\kappa}(\omega^{cd} \wedge \omega^b{}_c \wedge \eta_{dba} + \omega^b{}_a \wedge \omega^{cd} \wedge \eta_{cdb})$$

重力場の正準方程式

$d\theta^a = \partial H / \partial \pi_a$ は、

πの1次

$$d\theta^a = -\omega^a{}_b \wedge \theta^b + \Theta^a$$

$$\omega_{abc} = \kappa \left[v_{c,ab} + \frac{1}{D-2} (\mathring{g}_{ac} v_b - \mathring{g}_{bc} v_a) \right]$$
$$v_{c,ab} = *(-\pi_c \wedge \theta_a \wedge \theta_b)$$

$d\pi_a = \partial H / \partial \theta^a$ は、

$$d\pi_c = \frac{1}{2\kappa} (\omega^d{}_b \wedge \omega^{ab} \wedge \eta_{adc} + \omega^d{}_c \wedge \omega^{ab} \wedge \eta_{abd}) - *T_c - t_c$$

πの2次

アインシュタイン方程式と等価

$d\theta^a = f^a(\theta, \pi), \ d\pi_c = g_c(\theta, \pi)$ という構造

中嶋[2019]

公式集

$$\theta^a \wedge \eta_{bcde} = -\delta^a_b \eta_{cde} + \delta^a_c \eta_{bde} - \delta^a_d \eta_{bce} + \delta^a_e \eta_{bcd},$$
$$\theta^a \wedge \eta_{bcd} = \delta^a_b \eta_{cd} - \delta^a_c \eta_{bd} + \delta^a_d \eta_{bc},$$
$$\theta^a \wedge \eta_{bc} = -\delta^a_b \eta_c + \delta^a_c \eta_b,$$
$$\theta^a \wedge \eta_b = \delta^a_b \eta.$$

$$\eta_a = e_a \rfloor \eta,$$
$$\eta_{ab} = e_b \rfloor \eta_a,$$
$$\eta_{abc} = e_c \rfloor \eta_{ab},$$
$$\eta_{abcd} = e_d \rfloor \eta_{abc}$$

$$\theta^a \wedge \theta^b \wedge \eta_{cd} = (\delta^a_c \delta^b_d - \delta^a_d \delta^b_c)\eta$$

$$\theta^a \wedge \theta^b \wedge \eta_{cde} = (\delta^a_d \delta^b_e - \delta^a_e \delta^b_d)\eta_c - (\delta^a_c \delta^b_e - \delta^a_e \delta^b_c)\eta_d + (\delta^a_c \delta^b_d - \delta^a_d \delta^b_c)\eta_e$$

$$\delta\eta_{ab} = \delta\theta^c \wedge \eta_{abc},$$
$$\delta\eta_a = \delta\theta^b \wedge \eta_{ab},$$
$$\delta\eta = \delta\theta^a \wedge \eta_a.$$

$$d\eta_{abc} = \omega^d{}_a \wedge \eta_{dbc} + \omega^d{}_b \wedge \eta_{adc} + \omega^d{}_c \wedge \eta_{abd} + \Theta^d \wedge \eta_{abcd},$$
$$d\eta_{ab} = \omega^c{}_a \wedge \eta_{cb} + \omega^c{}_b \wedge \eta_{ac} + \Theta^c \wedge \eta_{abc},$$
$$d\eta_a = \omega^b{}_a \wedge \eta_b + \Theta^b \wedge \eta_{ab} = (\omega_a + C_a)\eta.$$

(5)ポアソン括弧, 正準変換

ポアソン括弧(1)

微分形式fの、位置形式ψおよび共役形式πによる導関数が存在することを、f は**メタ微分可能**であると言う事にする。

$Z^a = \psi^A, \pi_A$ でのメタ微分 $\partial f / \partial Z^a$ は、$\tilde{\partial}/\tilde{\partial} Z^a$というメタ微分演算が$f$に作用した結果であると考える。

メタ・ベクトル場

$$\boldsymbol{X} = X^a \wedge \frac{\tilde{\partial}}{\tilde{\partial} Z^a}$$

はメタ・微分可能なFに、

$$\boldsymbol{X} F = X^a \wedge \frac{\tilde{\partial} F}{\tilde{\partial} Z^a}$$

と作用する。

[神長2018]

ポアソン括弧(2)

$$\langle \frac{\tilde{\partial}}{\tilde{\partial} Z^a}; \tilde{d}Z^b \rangle = \tilde{d}Z^b(\frac{\tilde{\partial}}{\tilde{\partial} Z^a}) = \delta_a^b$$

で、双対基底 $\tilde{d}Z^a$ を定義する。

$$\tilde{d}Z^a(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X} Z^a = X^a$$

である。

$\tilde{d}\psi^A$, $\tilde{d}\pi_A$ は微分 p_A, q_A 形式 (z_a 形式と書く) で、メタ微分 1 形式

メタ2形式を、

$$\tilde{d}Z^a \wedge \tilde{d}Z^b = \tilde{d}Z^a \otimes \tilde{d}Z^b - (-1)^{z_a z_b} \tilde{d}Z^b \otimes \tilde{d}Z^a$$

で定義する。

$$\tilde{d}Z^a \wedge \tilde{d}Z^b = -(-1)^{z_a z_b} \tilde{d}Z^b \wedge \tilde{d}Z^a$$

ポアソン括弧(3)

メタ・シンプレクティック形式：

$$\tilde{\omega} \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\tilde{d}\psi^A \wedge \tilde{d}\pi_A$$

内部積

$$\tilde{d}f = I_{\boldsymbol{X}_f}\tilde{\omega}$$

メタ・ハミルトンベクトル場

ポアソン括弧：

$$\begin{aligned}\{f, g\} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle \boldsymbol{X}_f, \boldsymbol{X}_g; \tilde{\omega}\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{X}_f; I_{\boldsymbol{X}_g}\tilde{\omega}\rangle \\ &= I_{\boldsymbol{X}_f} I_{\boldsymbol{X}_g}\tilde{\omega} = I_{\boldsymbol{X}_f}\tilde{d}g = \boldsymbol{X}_f g \\ &= \tilde{\omega}(\boldsymbol{X}_g, \boldsymbol{X}_f)\end{aligned}$$

ポアソン括弧(4)

F形式

メタ・ハミルトンベクトル場：

$$\boldsymbol{X}_f = (-1)^{p_A(F+D+1)}\frac{\partial f}{\partial \psi^A}\wedge\frac{\tilde{\partial}}{\tilde{\partial}\pi_A} - (-1)^{(D+p_A-1)(F+1)}\frac{\partial f}{\partial \pi_A}\wedge\frac{\tilde{\partial}}{\tilde{\partial}\psi^A}$$

ポアソン括弧：

f 形式

$$\{F, G\} = (-1)^{p_A(f+D+1)}\frac{\partial F}{\partial \psi^A}\wedge\frac{\partial G}{\partial \pi_A} - (-1)^{(D+p_A-1)(f+1)}\frac{\partial F}{\partial \pi_A}\wedge\frac{\partial G}{\partial \psi^A}$$

基本ポアソン括弧：

$$\{\psi^A, \psi^B\} = 0,\ \{\pi_A, \pi_B\} = 0,$$
$$\{\psi^A, \pi_B\} = \delta^A_B(-1)^{Dp_A},$$
$$\{\pi_A, \psi^A\} = -\delta^B_A$$

このポアソン括弧は、通常の場の解析力学のものよりも、質点系のものに近い。
質点系では、通常のポアソン括弧に帰着する。

ポアソン括弧の性質

運動方程式：

$$dF = -\{H, F\}$$

Hamiltion formであり、その積分ではない。

ポアソン括弧の引数は、**同じ点での**微分形式である。

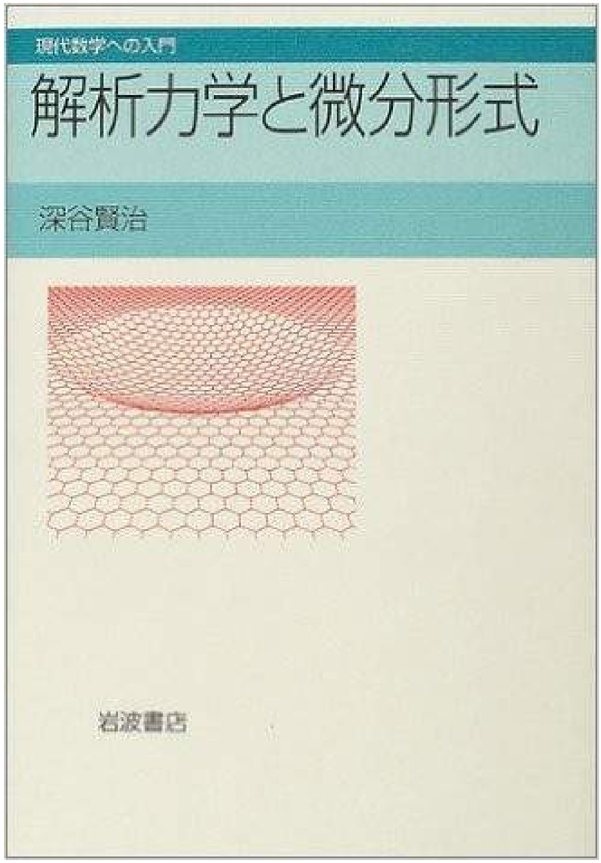
$$\{G, F\} = -(-1)^{(f+D+1)(g+D+1)}\{F, G\}$$

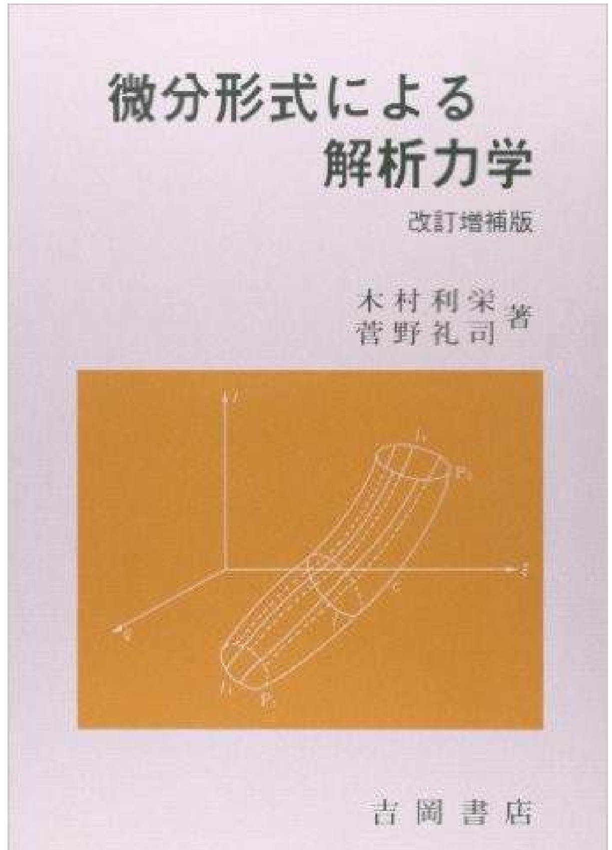
$$\{F, G \wedge H\} = \{F, G\} \wedge H + (-1)^{(f+D+1)g} G \wedge \{F, H\}$$

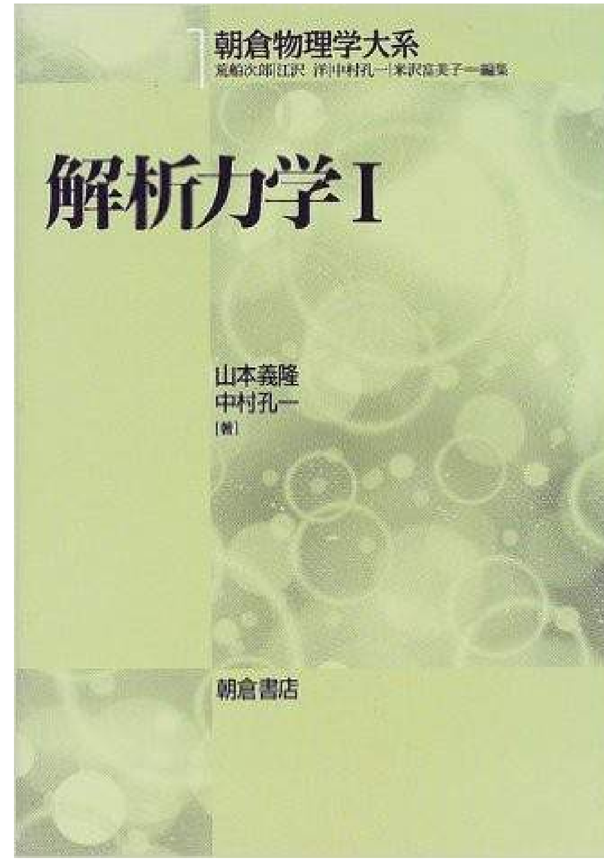
$$\{G \wedge H, F\} = (-1)^{(f+D+1)h}\{G, F\} \wedge H + \mathrm{G} \wedge \{H, F\}$$

[神長2018]

微分形式と解析力学







これらの本で出て来る微分形式は、メタ微分形式だと解釈すべきである。

正準変換

正準方程式を変えない変換を正準変換という。
正準変換は、メタ・シンプレクティック形式を変えない。

例1：位置形式と共役形式の入れ換え

$$\psi'^{A} = (a^{-1})^{AB}\pi_B,\ \pi'_A = -(-1)^{pq} a_{BA}\psi^B$$

a_{AB} は時空点の関数で良いが場に依らない
$p_A = p$ で、a_{AB} が 0 形式の場合

例2：位置形式の点変換

$$\psi'^{A} = u^A{}_B\psi^B + v^A,$$
$$\pi'_A = (u^{-1})^B{}_A\pi_B$$

$p_A = p$ で、$u^A{}_B$ は 0 形式で、v^A を p 形式とする。
これらは、時空点の関数で良いが場に依らない。

[中嶋rev]

(6)ゲージ変換の生成子

局所ゲージ変換の生成子(1)

Z^a を ψ^A とその共役形式 π_A の組とする。

微小変換 $Z^a \to Z^a + \delta Z^a$ に対して、

$$\delta Z^a = \{Z^a, G\}$$

を満たす(*D*-1)形式*G*が存在するとき、それを変換の生成子と呼ぶ。

上の微小変換に対して、*Z*^aで微分可能な*F*は、

$$\delta F = \{F, G\}$$

と変換される。

局所ゲージ変換の生成子(2)

微小な局所ゲージ変換の生成子は、

$$G = \varepsilon^r G_r + d\varepsilon^r \wedge F_r$$

無限小パラメーター

ネーターカレント(*D*-1)形式

$$\{G_r, G_s\} = f^t{}_{rs} G_t$$

構造定数

物質場では $F_r = 0$ であり、

ゲージ場，重力場では、

$$G_r = -\{F_r, H\}$$

[中嶋2019]

局所ゲージ変換の生成子(3)

物質場のLagrangian form

物質場

$$\delta\psi^A = \varepsilon^r (\boldsymbol{G}_r)^A{}_B \psi^B , \quad \delta L_0 = 0$$

$$\delta\pi_A = -\varepsilon^r (\boldsymbol{G}_r)^B{}_A \pi_B \quad [\boldsymbol{G}_r, \boldsymbol{G}_s] = f^t{}_{rs} \boldsymbol{G}_t$$

$$\boxed{G_r^{(0)} = (\boldsymbol{G}_r)^A{}_B \psi^B \wedge \pi_A \qquad F_r^{(0)} = 0}$$

ゲージ場

$$\delta A^r = \varepsilon^s f^r{}_{st} A^t - d\varepsilon^r , \quad \delta L_1 = 0$$

ゲージ場のLagrangian form

$$\delta\pi_r = -\varepsilon^s f^t{}_{sr} \pi_t$$

$$\boxed{G_s^{(1)} = f^r{}_{st} A^t \wedge \pi_r \qquad F_r^{(1)} = -\pi_r}$$

局所ゲージ変換の生成子(4)

$$\delta\theta^a = \varepsilon^a{}_b\theta^b \qquad \varepsilon^{ab} = -\varepsilon^{ba}$$

$$\delta\pi_a = \varepsilon^{bc}(-\mathring{g}_{a[c}\pi_{b]}) - d\varepsilon^{bc} \wedge \frac{1}{2\kappa}\eta_{abc}$$

$$\delta\omega^{ab} = \varepsilon^a{}_c\omega^{cb} + \varepsilon^b{}_c\omega^{ac} - d\varepsilon^{ab}$$

$$\pi_a = \frac{1}{2\kappa}\omega^{bc} \wedge \eta_{abc}$$

$$\boxed{G_{cd} = 2\theta_{[d} \wedge \pi_{c]} \qquad F_{bc} = -\frac{1}{\kappa}\eta_{bc}}$$

[中嶋2019]

(7)ディラック場の共変解析力学

ディラック場の正準形式

オイラー・ラグランジュ方程式から、Dirac方程式を得る：

$$(d\bar{\psi} - \frac{1}{4}\bar{\psi}\gamma_{ab}\omega^{ab})\gamma_c \wedge \eta^c - m\bar{\psi}\eta + \frac{1}{2}C_a\bar{\psi}\gamma^a\eta = 0,$$

$$\gamma_c(d\psi + \frac{1}{4}\gamma_{ab}\omega^{ab}\psi) \wedge \eta^c + m\psi\eta + \frac{1}{2}C_a\gamma^a\psi\eta = 0.$$

共役形式

β=1で0

$$\Pi^\beta_A = \frac{\partial L^\beta_{\mathrm{D}}}{\partial d\psi^A} = -\frac{1+\beta}{2}(\bar{\psi}\gamma_c)_A\eta^c, \quad \bar{\Pi}^{\beta A} = \frac{\partial L^\beta_{\mathrm{D}}}{\partial d\bar{\psi}_A} = \frac{1-\beta}{2}(\gamma_c\psi)^A\eta^c$$

位置変数と独立でない　この3-formの4つの成分も独立ではない

$$\pi^\mu_{(\beta)A} = -\frac{1+\beta}{2}(\bar{\psi}\gamma_c)_A\theta^{c\mu}, \quad \bar{\pi}^{A\mu}_{(\beta)} = \frac{1-\beta}{2}\theta^{c\mu}(\gamma_c\psi)^A$$

Hamilton form

未定乗数1-form

$$H^\beta_{\mathrm{D,tot}} = H^\beta_{\mathrm{D}} + \lambda^A \wedge \left[\Pi^\beta_A + \frac{1+\beta}{2}(\bar{\psi}\gamma_c)_A\eta^c\right] + \bar{\lambda}_A \wedge \left[\bar{\Pi}^{\beta A} - \frac{1-\beta}{2}(\gamma_c\psi)^A\eta^c\right],$$

$$\begin{aligned} H^\beta_{\mathrm{D}} &= d\psi^A \wedge \Pi^\beta_A + d\bar{\psi}_A \wedge \bar{\Pi}^{\beta A} - L^\beta_{\mathrm{D}} \\ &= \frac{1+\beta}{2}\bar{\psi}\gamma_c\frac{1}{4}\gamma_{ab}\omega^{ab}\psi \wedge \eta^c + \frac{1-\beta}{2}\frac{1}{4}\bar{\psi}\gamma_{ab}\omega^{ab}\gamma_c\psi \wedge \eta^c + m\bar{\psi}\psi\eta + \frac{\beta}{2}C_c\bar{\psi}\gamma^c\psi\eta. \end{aligned}$$

Dirac場の微分を含まない

ディラック括弧

[中嶋rev]でディラック場のディラック括弧が考察されたが不完全である。

[Castellani2019]で3次元の場合のみ、1階形式の重力場のディラック括弧が研究された。4次元では見付かっていない。