Belinfante エネルギー運動量テンソル

中嶋 慧

2026 年 1 月 7 日

概 要

正準エネルギー運動量テンソルと Belinfante エネルギー運動量テンソルについて解説する。このノートでは特殊相対論の範囲で考える。

1 Belinfante エネルギー運動量テンソル

1.1 一般論

大域的な微小ローレンツ変換

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}, \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \tag{1.1}$$

のもとで、場 ψ^A が、

$$\delta\psi^A = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^A{}_B\psi^B, \quad (S^{\mu\nu})^A{}_B = -(S^{\nu\mu})^A{}_B \tag{1.2}$$

と変化するとき、$\partial_\lambda\psi^A$ は、

$$\delta(\partial_\lambda\psi^A) = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^A{}_B\partial_\lambda\psi^B + \omega_\lambda{}^\rho\partial_\rho\psi^A \tag{1.3}$$

と変化し、ラグランジアン密度 $\mathfrak{L}$ は、

$$\begin{aligned}
\delta\mathfrak{L} &= \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\psi^A}\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^A{}_B\psi^B + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\lambda\psi^A)}\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^A{}_B\partial_\lambda\psi^B \\
&\quad + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\lambda\psi^A)}\omega_\lambda{}^\rho\partial_\rho\psi^A \\
&= \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\Big[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\psi^A}(S^{\mu\nu})^A{}_B\psi^B + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\lambda\psi^A)}(S^{\mu\nu})^A{}_B\partial_\lambda\psi^B \\
&\quad + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\lambda\psi^A)}\big[\delta^\mu_\lambda\partial^\nu\psi^A - \delta^\nu_\lambda\partial^\mu\psi^A\big]\Big]
\end{aligned} \tag{1.4}$$

と変化する。いま、

$$[\mathfrak{L}]_A := \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\psi^A} - \partial_\lambda\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\lambda\psi^A)}, \tag{1.5}$$

$$\Theta^\mu{}_\nu := \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}\partial_\nu\psi^A - \delta^\mu_\nu\mathfrak{L} \tag{1.6}$$

と置く。$\Theta^{\mu}{}_{\nu}$ は正準エネルギー運動量テンソルである。この記号で、

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{L} &= \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\Big([\mathfrak{L}]_A (S^{\mu\nu})^A{}_B \psi^B + \partial_\lambda \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\lambda\psi^A)}(S^{\mu\nu})^A{}_B\psi^B + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\lambda\psi^A)}(S^{\mu\nu})^A{}_B\partial_\lambda\psi^B \\ &\qquad + \Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\Big([\mathfrak{L}]_A (S^{\mu\nu})^A{}_B \psi^B + \partial_\lambda\Big\{\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\lambda\psi^A)}(S^{\mu\nu})^A{}_B\psi^B\Big\} + \Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu}\Big)\end{aligned} \tag{1.7}$$

となる。もし、微小ローレンツ変換でラグランジアン密度が不変 ($\delta\mathfrak{L} \equiv 0$) なら、

$$[\mathfrak{L}]_A (S^{\mu\nu})^A{}_B \psi^B + \partial_\lambda\Big\{\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\lambda\psi^A)}(S^{\mu\nu})^A{}_B\psi^B\Big\} + \Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu} \equiv 0 \tag{1.8}$$

となる。$\equiv$ はオイラー・ラグランジュ方程式を使わずに成り立つことを強調したいときに用いる。いま、Belinfante エネルギー運動量テンソル [1, 2]

$$T^{\mu\nu} := \Theta^{\mu\nu} - \partial_\sigma\Big\{\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}(S^{\sigma\nu})^A{}_B + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\sigma\psi^A)}(S^{\nu\mu})^A{}_B - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\nu\psi^A)}(S^{\mu\sigma})^A{}_B\Big)\psi^B\Big\} \tag{1.9}$$

を定義する。これの反対称部分は、

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} &= \Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu} \\ &\qquad - \partial_\sigma\Big\{\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}(S^{\sigma\nu})^A{}_B + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\sigma\psi^A)}(S^{\nu\mu})^A{}_B - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\nu\psi^A)}(S^{\mu\sigma})^A{}_B\Big)\psi^B\Big\} \\ &\qquad + \partial_\sigma\Big\{\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\nu\psi^A)}(S^{\sigma\mu})^A{}_B + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\sigma\psi^A)}(S^{\mu\nu})^A{}_B - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}(S^{\nu\sigma})^A{}_B\Big)\psi^B\Big\} \\ &= \Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu} - \partial_\sigma\Big\{\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\sigma\psi^A)}(S^{\nu\mu})^A{}_B\psi^B\Big\} \\ &= -[\mathfrak{L}]_A (S^{\mu\nu})^A{}_B\psi^B\end{aligned} \tag{1.10}$$

であり、ラグランジアン密度のオイラー・ラグランジュ微分 $[\mathfrak{L}]_A$ に比例する。

いま、

$$f^{\mu\sigma\nu} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^A)}(S^{\sigma\nu})^A{}_B + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\sigma\psi^A)}(S^{\nu\mu})^A{}_B - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\nu\psi^A)}(S^{\mu\sigma})^A{}_B\Big)\psi^B \tag{1.11}$$

と置くと、

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} - \partial_\sigma f^{\mu\sigma\nu}, \tag{1.12}$$

$$f^{\mu\sigma\nu} = -f^{\sigma\mu\nu} \tag{1.13}$$

であるから、

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} \tag{1.14}$$

を得る。

1.2 電磁場

電磁場

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \tag{1.15}$$

を考える。この場合、

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}, \tag{1.16}$$

$$\Theta^\mu{}_\nu = -F^{\mu\rho}\partial_\nu A_\rho + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\delta^\mu_\nu \tag{1.17}$$

となる。また、

$$f^{\mu\sigma\nu} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu A_\lambda)}(S^{\sigma\nu})_\lambda{}^\rho + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\sigma A_\lambda)}(S^{\nu\mu})_\lambda{}^\rho - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\nu A_\lambda)}(S^{\mu\sigma})_\lambda{}^\rho\Big)A_\rho, \tag{1.18}$$

$$(S^{\mu\nu})_\lambda{}^\rho = \delta^\mu_\lambda\eta^{\nu\rho} - \delta^\nu_\lambda\eta^{\mu\rho} \tag{1.19}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} f^{\mu\sigma\nu} &= -\frac{1}{2}\Big(F^{\mu\lambda}(\delta^\sigma_\lambda\eta^{\nu\rho} - \delta^\nu_\lambda\eta^{\sigma\rho})A_\rho + F^{\sigma\lambda}(-\delta^\mu_\lambda\eta^{\nu\rho} + \delta^\nu_\lambda\eta^{\mu\rho})A_\rho \\ &\quad - F^{\nu\lambda}(\delta^\mu_\lambda\eta^{\sigma\rho} - \delta^\sigma_\lambda\eta^{\mu\rho})A_\rho\Big) \\ &= -\frac{1}{2}\Big(F^{\mu\sigma}A^\nu - F^{\mu\nu}A^\sigma - F^{\sigma\mu}A^\nu + F^{\sigma\nu}A^\mu - F^{\nu\mu}A^\sigma + F^{\nu\sigma}A^\mu\Big) \\ &= -F^{\mu\sigma}A^\nu \end{aligned} \tag{1.20}$$

となる。Belinfante エネルギー運動量テンソルは、

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= -F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} + \partial_\sigma(F^{\mu\sigma}A^\nu) \\ &= -F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} + \partial_\sigma F^{\mu\sigma}A^\nu + F^{\mu\sigma}\partial_\sigma A^\nu \\ &= F^\mu{}_\sigma F^{\sigma\nu} + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} + \partial_\sigma F^{\mu\sigma}A^\nu \end{aligned} \tag{1.21}$$

である。その反対称部分は、

$$T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = \partial_\sigma F^{\mu\sigma}A^\nu - \partial_\sigma F^{\nu\sigma}A^\mu \tag{1.22}$$

である。

参考文献

[1] ワインバーグ (著), 青山秀明・有末宏明 (翻訳)『ワインバーグ 場の量子論 2 巻』吉岡書店, 1997 年。

[2] 高橋 康, 柏 太郎『量子場を学ぶための場の解析力学入門 増補第 2 版』講談社, 2005 年。