# 4次元ベクトル解析

中嶋 慧

May 4, 2019

## 1　4次元のベクトル解析

このノートは [1] を参考にした。

4次元のユークリッド空間 $\{x^\mu\}_{\mu=0}^3$ を考える。1形式の基底 $\{t^\mu\}$, 2形式の基底 $\{p^A\}_{A=1}^6$, 3形式の基底 $\{n^\mu\}$, 4形式の基底 $dK$ を以下で定義する：

$$t^\mu \stackrel{\text{def}}{=} dx^\mu, \tag{1.1}$$
$$p^i \stackrel{\text{def}}{=} dx^0 \wedge dx^i \quad (i = 1, 2, 3), \tag{1.2}$$
$$p^4 \stackrel{\text{def}}{=} dx^2 \wedge dx^3, \tag{1.3}$$
$$p^5 \stackrel{\text{def}}{=} dx^3 \wedge dx^1, \tag{1.4}$$
$$p^6 \stackrel{\text{def}}{=} dx^1 \wedge dx^2, \tag{1.5}$$
$$n^\mu \stackrel{\text{def}}{=} *dx^\mu, \tag{1.6}$$
$$dK \stackrel{\text{def}}{=} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \tag{1.7}$$

$n^\mu$ は詳しくは、

$$n^0 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \tag{1.8}$$
$$n^1 = -dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \tag{1.9}$$
$$n^2 = -dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1, \tag{1.10}$$
$$n^3 = -dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \tag{1.11}$$

である。

さて、$\omega^{(n)}$ を任意の $n$ 形式とすると、

$$\omega^{(1)} = (\tilde{F}_4)_\mu t^\mu, \tag{1.12}$$
$$\omega^{(2)} = \sum_{A=1}^{6} (F_6)_A p^A, \tag{1.13}$$
$$\omega^{(3)} = (F_4)_\mu n^\mu, \tag{1.14}$$
$$\omega^{(4)} = F dK \tag{1.15}$$

と書ける。

今、$F$ を 0 形式とし、

$$dF \equiv (\mathrm{Grad}F)_\mu t^\mu \tag{1.16}$$

と置く。また、$\omega^{(1)}$ を (1.12) とし、

$$d\omega^{(1)} \equiv \sum_{A=1}^{6}[\mathrm{Rot}(\tilde{F}_4)]_A p^A \tag{1.17}$$

と置く。更に、$\omega^{(2)}$ を (1.13) とし、

$$d\omega^{(2)} \equiv [\mathrm{Med}(F_6)]_\mu n^\mu \tag{1.18}$$

と置く。最後に、$\omega^{(3)}$ を (1.14) とし、

$$d\omega^{(3)} \equiv \mathrm{Div}(F_4)dK \tag{1.19}$$

と置く。

このとき、

$$\mathrm{Grad}F \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} (\mathrm{Grad}F)_0 \\ (\mathrm{Grad}F)_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_0 F \\ \mathrm{grad}F \end{pmatrix}, \tag{1.20}$$

$$\mathrm{Rot}(\tilde{F}_4) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathrm{Rot}(\tilde{F}_4)_i \\ \mathrm{Rot}(\tilde{F}_4)_{i+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{grad}F + \partial_0 \boldsymbol{G} \\ \mathrm{rot}\boldsymbol{G} \end{pmatrix}, \tag{1.21}$$

$$F \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\tilde{F}_4)_0, \quad G_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\tilde{F}_4)_i, \tag{1.22}$$

$$\mathrm{Med}(F_6) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} [\mathrm{Med}(F_6)]_0 \\ [\mathrm{Med}(F_6)]_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{div}\boldsymbol{G} \\ \mathrm{rot}\boldsymbol{F} - \partial_0 \boldsymbol{G} \end{pmatrix}, \tag{1.23}$$

$$F_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} (F_6)_i, \quad G_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} (F_6)_{i+3}, \tag{1.24}$$

$$\mathrm{Div}(F_4) = \partial_0 F + \mathrm{div}\boldsymbol{G}, \tag{1.25}$$

$$F \stackrel{\mathrm{def}}{=} (F_4)_0, \quad G_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} (F_4)_i \tag{1.26}$$

となる。

# References


[1] 島田 義弘『四次元の幾何学一回転, 積分, 微分』(プレアデス出版, 2017 年)