4次元回転：SO(4), $\mathrm{SO}_+(3,1)$, 四元数

中嶋 慧

May 9, 2023

Abstract

この記事は、数理物理 Advent Calendar 2020 の 3 日目の記事である。4 次元の回転について書く。各章は独立に読むことができる。

Contents

1　SO(4) と四元数

1.1　四元数

$i_1.i_2, i_3$ を四元数の虚数単位とする。このとき、

$$i_a i_b = -\delta_{ab} + \varepsilon^c{}_{ab} i_c \tag{1.1}$$

である。ここで、$\varepsilon^c{}_{ab} = \varepsilon_{cab}$ であり、ε_{abc} は完全反対称で $\varepsilon_{123} = 1$ である。$i_0 \overset{\text{def}}{=} 1$ とし、ギリシャ文字の添え字を 0 から 3 とすると、$i_\mu i_\nu$ は、

$$i_\mu i_\nu = f^\lambda{}_{\mu\nu} i_\lambda \tag{1.2}$$

の形で書ける。

さて、

$$q = q^\mu i_\mu, \quad a = a^\mu i_\mu \tag{1.3}$$

とすると、

$$\begin{aligned} aq &= a^\nu q^\mu i_\nu i_\mu \\ &= a^\nu q^\mu f^\lambda{}_{\nu\mu} i_\lambda \\ &= (L[a])^\lambda{}_\mu q^\mu i_\lambda, \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$(L[a])^\lambda{}_\mu := a^\nu f^\lambda{}_{\nu\mu} \tag{1.5}$$

である。また、

$$qa = (R[a])^\lambda{}_\mu q^\mu i_\lambda, \tag{1.6}$$

$$(R[a])^\lambda{}_\mu := a^\nu f^\lambda{}_{\mu\nu} \tag{1.7}$$

である。四元数の結合性

$$a(qb) = (aq)b \tag{1.8}$$

より、

$$L[a]R[b] = R[b]L[a] \tag{1.9}$$

である。また、

$$L[ab] = L[a]L[b], \quad R[ab] = R[b]R[a] \tag{1.10}$$

である。

1.2　SO(4)

さて、変換

$$x = x^\mu i_\mu \to x' = e^A x e^B =: \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu i_\mu \tag{1.11}$$

を考える。ここで、A, B は純四元数である。上の Λ は、

$$\Lambda = L[e^A]R[e^B] = e^{L[A]}e^{R[B]} = e^{L[A]+R[B]} \tag{1.12}$$

と書ける。§ 2.3 によると、SO(4) の任意の元 Λ は上式の形で書ける。ここではそれを別の形で確かめる。

さて、

$$L[a] = \begin{pmatrix} a^0 & -a^1 & -a^2 & -a^3 \\ a^1 & a^0 & -a^3 & a^2 \\ a^2 & a^3 & a^0 & -a^1 \\ a^3 & -a^2 & a^1 & a^0 \end{pmatrix}, \quad R[a] = \begin{pmatrix} a^0 & -a^1 & -a^2 & -a^3 \\ a^1 & a^0 & a^3 & -a^2 \\ a^2 & -a^3 & a^0 & a^1 \\ a^3 & a^2 & -a^1 & a^0 \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

である。また、

$$J_1 \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

は空間 3 次元回転の生成子で、

$$K_1 \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

は、「ブースト」の生成子である。これを使うと、

$$L[A] = A^i K_i + A^i J_i, \tag{1.16}$$

$$R[B] = B^i K_i - B^i J_i \tag{1.17}$$

と書ける。よって、

$$\Lambda = \exp\Big((A^i + B^i)K_i + (A^i - B^i)J_i\Big) \tag{1.18}$$

となる。

SO(4) の任意の元は、

$$\Lambda = \exp\Big(\varphi^i K_i + \theta^i J_i\Big) \tag{1.19}$$

と書ける。この時、

$$A^i = \frac{\varphi^i + \theta^i}{2}, \tag{1.20}$$

$$B^i = \frac{\varphi^i - \theta^i}{2} \tag{1.21}$$

とすれば良い。

1.3　3次元回転

空間3次元回転は、

$$x \to x' = e^{\boldsymbol{\theta}/2} x e^{-\boldsymbol{\theta}/2}, \quad \boldsymbol{\theta} = \theta^k i_k \tag{1.22}$$

となる。また、「ブースト」回転は、

$$x \to x' = e^{\boldsymbol{\varphi}/2} x e^{\boldsymbol{\varphi}/2}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \varphi^k i_k \tag{1.23}$$

となる。これをまとめて、

$$x \to x' = e^{\boldsymbol{A}/2} x e^{\varepsilon \boldsymbol{A}/2}, \quad \varepsilon = \mp 1 \tag{1.24}$$

と書く。この時、

$$\Lambda = \exp\Big(|A|K\Big), \quad K = \frac{L[n_A] + \varepsilon R[n_A]}{2} \tag{1.25}$$

である。ただし、$\boldsymbol{A} = |A| n_A$, $n_A^2 = -1$ と書いた。さて、

$$\begin{aligned}
K^3 &= \frac{1}{8}(L[n_A]^3 + 3\varepsilon L[n_A]^2 R[n_A] + 3\varepsilon^2 L[n_A] R[n_A]^2 + \varepsilon^3 R[n_A]^3) \\
&= -\frac{1}{8}(L[n_A] + 3\varepsilon R[n_A] + 3L[n_A] + \varepsilon R[n_A]) \\
&= -\frac{1}{2}(L[n_A] + \varepsilon R[n_A]) \\
&= -K
\end{aligned} \tag{1.26}$$

となる。ここで、$L[n_A]^2 = L[n_A^2] = L[-1] = -1$ などを用いた。よって、

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|A|^n K^n}{n!} \\
&= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n |A|^{2n+1}}{(2n+1)!} K + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} |A|^{2n}}{(2n)!} K^2 \\
&= 1 + \sin|A| K + \big(1 - \cos|A|\big) K^2
\end{aligned} \tag{1.27}$$

を得る。空間3次元回転に対しては、これはロドリゲスの回転公式とも言われる。

1.4　オイラーの研究

さて、SO(4) の任意の元 Λ は、Q, P を単位四元数として、

$$\Lambda = L[Q] R[P] \tag{1.28}$$

と書けるのであった。今、

$$Q = a + b i_1 + c i_2 + d i_3, \quad P = p + q i_1 + r i_2 + s i_3 \tag{1.29}$$

とすると、

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -q & -r & -s \\ q & p & s & -r \\ r & -s & p & q \\ s & r & -q & p \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

である。また、a を $-a$ に置き換えると、

$$\begin{aligned} \Lambda &= \begin{pmatrix} -a & -b & -c & -d \\ b & -a & -d & c \\ c & d & -a & -b \\ d & -c & b- & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -q & -r & -s \\ q & p & s & -r \\ r & -s & p & q \\ s & r & -q & p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -ap-bq-cr-ds & aq-bp+cs-dr & ar-bs-cp+dq & sa+br-cq-dp \\ -(aq-bp-cs+dr) & -ap-bq+cr+ds & -as-br-cq-dp & ar-bs+cp-dq \\ -(ar+bs-cp-dq) & as-br-cq+dp & -ap+bq-cr+ds & -aq-bp-cs-dr \\ -(as-br+cq-dp) & -ar-bs-cp-dq & aq+bp-cs-dr & -ap+bq+cr-ds \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.31}$$

を得る。

オイラーは、 1771 年の論文 E407 で、3, 4, 5 次元の回転行列[1]を研究し[2]、それぞれの次元でのオイラー角を導入した[3] 。更に、4 次元回転行列は、

$$\begin{pmatrix} ap-bq-cr-ds & aq-bp+cs-dr & ar-bs-cp+dq & sa+br-cq-dp \\ aq-bp-cs+dr & -ap-bq+cr+ds & -as-br-cq-dp & ar-bs+cp-dq \\ ar+bs-cp-dq & as-br-cq+dp & -ap+bq-cr+ds & -aq-bp-cs-dr \\ as-br+cq-dp & -ar-bs-cp-dq & aq+bp-cs-dr & -ap+bq+cr-ds \end{pmatrix} \tag{1.32}$$

と書けるとした。ここで、

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = 1 = p^2+q^2+r^2+s^2 \tag{1.33}$$

である。(1.32) は (1.31) の第 1 列の赤字の負符号を+にしたものである。(1.32) は正しくはないが、ハミルトンにより四元数が発見される 70 年以上前にこの式を書いているオイラーは何者なのだろうか。(1.31) は、その 126 年後、1897 年に Van Elfrinkhof によって示された。

---

[1] その時代には行列という概念はないが。

[2] その時代には 4 次元以上の高次元空間はほとんど研究されていない。

[3] これがオイラー角が導入された論文である。オイラーは、人類が 3 次元回転もよく分かっていない時代に 4, 5 次元の回転を研究し、以下で解説する驚くべき結果を得た。

なお、現在ロドリゲスの回転公式と呼ばれる公式を最初に得たのはオイラーのようである。

2 SO(4), $\mathrm{SO}_+(3,1)$ と四元数

2.1 概要

i_1, i_2, i_3 を四元数の虚数単位とする。h を $h^2 = -1$ で、i_k と可換な数とする[4)]。4 次元ミンコフスキー空間の点は、

$$q = q^0 + q^k h i_k \quad (q^\mu \in \mathbb{R}) \tag{2.1}$$

と表される。このとき、

$$q\tilde{q} = (q^0)^2 - (q^k)^2 \tag{2.2}$$

である。$\tilde{X}$ は X の四元数としての共役を表す。h についての複素共役は X^* とする。X が、

$$X = x^0 + x^k i_k, \quad x^\mu = y^\mu + h z^\mu, \quad y^\mu, z^\mu \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

のとき、X を双四元数という。ローレンツ変換[5)]は、A を双四元数として、

$$q' = A q \tilde{A}^*, \quad A\tilde{A} = 1 \tag{2.4}$$

と書ける (§2.2)。特に、$\tilde{A}^* = A$ の場合がローレンツブーストで、$A^* = A$ の場合が 3 次元空間回転である。

4 次元ユークリッド空間の点は、

$$q = q^0 + q^k i_k \quad (q^\mu \in \mathbb{R}) \tag{2.5}$$

で表される。4 次元回転 (SO(4) の元) は、A, B を単位四元数 ($A\tilde{A} = 1 = B\tilde{B}$) として、

$$q' = AqB \tag{2.6}$$

となる (§2.3)。

2.2 ローレンツ変換：$\mathrm{SO}_+(3,1)$

e_μ を、

$$e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = 2\mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{2.7}$$

を満たす数とする。4 次元ミンコフスキー空間の点は、

$$Q = q^0 e_0 + q^k e_k \tag{2.8}$$

と表現される。付録 A より、ローレンツ変換 ($\mathrm{SO}_+(1,3)$ の元) は、

$$Q' = AQA^{-1}, \quad A = e^{X_1} e^{X_2} \cdots e^{X_n}, \quad X_k = \sum_{\mu<\nu} c^{\mu\nu}_{(k)} e_\mu e_\nu \tag{2.9}$$

---

4) ラテン (小) 文字の添え字は $1, 2, 3$ を表し、ギリシャ(小) 文字の添え字は $0, 1, 2, 3$ を表す。

5) $\mathrm{SO}_+(3,1)$((A.3) で定義される) の元。

と書ける。$c^{\mu\nu}_{(k)}$ は実数である。ところで、

$$h = -e_0 e_1 e_2 e_3, \tag{2.10}$$

$$h i_k = e_0 e_k, \tag{2.11}$$

$$i_1 = e_2 e_3\,, \quad i_2 = e_3 e_1\,, \quad i_3 = e_1 e_2 \tag{2.12}$$

という同一視が出来る。よって、X_k は双 (純) 四元数とみなせる。また、

$$q := e_0 Q = q^0 + q^k h i_k \tag{2.13}$$

であり、

$$\begin{aligned} AQA^{-1} &= A e_0 q A^{-1} \\ &= e_0 A^* q A^{-1} \end{aligned} \tag{2.14}$$

である。実際、

$$A e_0 = e_0 B \tag{2.15}$$

と置くと、

$$\begin{aligned} B &= e_0 A e_0 = e_0 e^{X_1} e_0 e_0 e^{X_2} e_0 \cdots e_0 e^{X_n} e_0 \\ &= e^{e_0 X_1 e_0} e^{e_0 X_2 e_0} \cdots e^{e_0 X_n e_0} \\ &= e^{X_1^*} e^{X_2^*} \cdots e^{X_n^*} = A^* \end{aligned} \tag{2.16}$$

である。よって、ローレンツ変換は、

$$q' = A^* q A^{-1} = A^* q \tilde{A} = B q \tilde{B}^* \tag{2.17}$$

となる。$B\tilde{B} = BB^{-1} = 1$ である。

2.3　ユークリッド 4 次元回転：SO(4)

e_μ を、

$$e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = 2\mathrm{diag}(1,1,1,1) \tag{2.18}$$

を満たす数とする。4 次元ミンコフスキー空間の点は、

$$Q = q^0 e_0 + q^k e_k \tag{2.19}$$

と表現される。付録 A より、4 次元回転 (SO(4) の元) は、

$$Q' = AQA^{-1}\,, \quad A = e^X\,, \quad X = \sum_{\mu<\nu} c^{\mu\nu} e_\mu e_\nu \tag{2.20}$$

と書ける。$c^{\mu\nu}$ は実数である。ところで、

$$j := e_0 e_1 e_2 e_3, \tag{2.21}$$

$$j i_k \;=\; e_0 e_k, \tag{2.22}$$

$$i_1 \;=\; -e_2 e_3\,, \quad i_2 = -e_3 e_1\,, \quad i_3 = -e_1 e_2 \tag{2.23}$$

という同一視が出来る。$j^2 = 1$ である。よって、X は分解型双 (純) 四元数とみなせる[6)] 。また、

$$q := e_0 Q = q^0 + q^k j i_k \tag{2.24}$$

であり、

$$\begin{aligned} AQA^{-1} &= Ae_0 q A^{-1} \\ &= e_0 A^* q A^{-1} \end{aligned} \tag{2.25}$$

である。A^* は j についての共役である。よって、4 次元回転は、

$$q' \;=\; A^* q A^{-1} \tag{2.26}$$

となる。

さて、X', X'' を四元数とするとき、

$$T(X' + jX'') = X' + X'' \tag{2.27}$$

とすると、分解型双四元数 X, Y に対して、

$$T(XY) = T(X)T(Y) \tag{2.28}$$

である。よって、(2.26) より、

$$T(q') \;=\; e^{T(X^*)} T(q) e^{-T(X)} \tag{2.29}$$

である。今、$p = T(q)$, $A = e^{T(X^*)}$, $B = e^{-T(X)}$ とすると、

$$p' \;=\; ApB \tag{2.30}$$

であり、A, B は単位四元数である ($T(X^*)$, $-T(X)$ は純四元数である)。p と q とは 1 対 1 に対応する。

[6)] $x = x^0 + x^k i_k$ で $x^\mu = y^\mu + jz^\mu (y^\mu, z^\mu \in \mathbb{R})$ の形の数 x を分解型双四元数という。

3　ワイルスピノール：$\mathrm{SO}_+(3,1)$ の表現

3.1　クリフォード代数とローレンツ変換

$\{e_\mu\}$ をクリフォード代数の基底とする。ただし、

$$e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu \;=\; 2\eta_{\mu\nu}, \tag{3.1}$$

$$\eta_{\mu\nu} := \mathrm{diag}(-1,1,\ldots,1) \tag{3.2}$$

とする。このとき、

$$T := 1 + \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu}e_{\mu\nu}\,,\quad e_{\mu\nu} \overset{\mathrm{def}}{=} e_{[\mu}e_{\nu]} = \frac{1}{2}(e_\mu e_\nu - e_\nu e_\mu)\,,\quad \varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu} \tag{3.3}$$

に対して、

$$Te_\mu T^{-1} = \Lambda^\nu{}_\mu e_\nu\,,\quad \Lambda^\nu{}_\mu = \delta^\nu_\mu + \varepsilon^\nu{}_\mu \tag{3.4}$$

となることを示す。上式より、

$$Te_\mu T^{-1} = e_\mu + \frac{1}{4}\varepsilon^{\alpha\beta}[e_{\alpha\beta}, e_\mu] \tag{3.5}$$

である。ここで、$[A,B] \overset{\mathrm{def}}{=} AB - BA$。ところで、(B.21), (B.22) より、

$$e_{\alpha\beta}e_\mu = e_{\alpha\beta\mu} + e_\alpha\eta_{\beta\mu} - e_\beta\eta_{\alpha\mu}, \tag{3.6}$$

$$e_\mu e_{\alpha\beta} = e_{\mu\alpha\beta} + e_\beta\eta_{\alpha\mu} - e_\alpha\eta_{\beta\mu} \tag{3.7}$$

である。ここで、$e_{\alpha\beta\mu} = e_{[\alpha}e_\beta e_{\mu]}$ である[7)]。よって、

$$[e_{\alpha\beta}, e_\mu] = 2(e_\alpha\eta_{\beta\mu} - \eta_{\alpha\mu}e_\beta) \tag{3.8}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} Te_\mu T^{-1} &= e_\mu + \varepsilon^\alpha{}_\mu e_\alpha \\ &= (\delta^\nu_\mu + \varepsilon^\nu{}_\mu)e_\nu \end{aligned} \tag{3.9}$$

となり、(3.4) が示される。

有限変換では、

$$T := \exp\left(\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu}e_{\mu\nu}\right) \tag{3.10}$$

に対して、

$$Te_\mu T^{-1} = \Lambda^\nu{}_\mu e_\nu\,,\quad \Lambda^\nu{}_\mu = \left[\exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}\right)\right]^\nu{}_\mu, \tag{3.11}$$

$$(M_{\mu\nu})^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\mu\eta_{\nu\beta} - \delta^\alpha_\nu\eta_{\mu\beta} \tag{3.12}$$

となる。

---

7) [ ] は反対称化記号であり、$A_{[\alpha\beta\gamma]} = \frac{1}{6}(A_{\alpha\beta\gamma} - A_{\alpha\gamma\beta} - A_{\beta\alpha\gamma} + A_{\beta\gamma\alpha} + A_{\gamma\alpha\beta} - A_{\gamma\beta\alpha})$ である。

3.2　4 次元の場合

以下では 4 次元時空を考える。この時、

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu}M_{\mu\nu} = \varepsilon^{0k}M_{0k} + \varepsilon^{23}M_{23} + \varepsilon^{31}M_{31} + \varepsilon^{12}M_{12} \tag{3.13}$$

である。また。

$$(M_{0k})^0{}_i = \delta_{ik} = (M_{0k})^i{}_0\,, \quad (M_{0k})^l{}_m = 0 \tag{3.14}$$

および、

$$(M_{ik})^l{}_m = \delta^l_i\delta_{km} - \delta^l_k\delta_{im}\,, \quad (M_{ik})^0{}_\mu = 0 = (M_{ik})^\mu{}_0 \tag{3.15}$$

である。今、

$$\varphi^k := -\varepsilon^{0k}, \tag{3.16}$$

$$\varepsilon^{ik} =: \varepsilon^{ik}{}_l\theta^l \tag{3.17}$$

とする[8)]と、

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu}M_{\mu\nu} \;=\; i\varphi^k K_k + i\theta^k J_k, \tag{3.18}$$

$$K_k := iM_{0k}, \tag{3.19}$$

$$J_k := -\frac{i}{2}\varepsilon^{il}{}_k M_{il} \tag{3.20}$$

となる。なお、

$$(K_k)^0{}_l = i\delta_{lk} = (K_k)^l{}_0\,, \quad (K_k)^l{}_m = 0, \tag{3.21}$$

$$(J_k)^l{}_m = -i\varepsilon^l{}_{mk}\,, \quad (J_k)^0{}_\mu = 0 = (J_k)^\mu{}_0 \tag{3.22}$$

である。

よって、

$$\Lambda^\nu{}_\mu = \Big[\exp\Big(i\varphi^k K_k + i\theta^k J_k\Big)\Big]^\nu{}_\mu \tag{3.23}$$

3.3　四元数とローレンツ変換

今、

$$e_0 T = T^* e_0\,, \quad T = e^X\,, \quad T^* = e^{X^*} \tag{3.24}$$

と置くと、

$$T^*(-e_0e_\mu)T^{-1} = \Lambda^\nu{}_\mu(-e_0e_\nu) \tag{3.25}$$

---

8) $\varepsilon^{ik}{}_l$ はレビ=チビタ記号である。

となる。ここで、

$$X = \frac{1}{2}(-\varphi^k e_0 e_k + \theta^1 e_2 e_3 + \theta^2 e_3 e_1 + \theta^3 e_1 e_2), \tag{3.26}$$
$$X^* = \frac{1}{2}(\varphi^k e_0 e_k + \theta^1 e_2 e_3 + \theta^2 e_3 e_1 + \theta^3 e_1 e_2) \tag{3.27}$$

である。

今、

$$h = -e_0 e_1 e_2 e_3, \tag{3.28}$$
$$h i_k = -e_0 e_k, \tag{3.29}$$
$$i_1 = -e_2 e_3\,, \quad i_2 = -e_3 e_1\,, \quad i_3 = -e_1 e_2 \tag{3.30}$$

とすると、i_k は四元数の虚数単位とみなせる。h は i_k と可換で、$h^2 = -1$ である。よって、

$$q := q^0 + q^k h i_k \quad (q^\mu \in \mathbb{R}) \tag{3.31}$$

とすると、

$$e^{X^*} q e^{-X} = q' = q'^0 + q'^k h i_k\,, \quad q'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu q^\nu \tag{3.32}$$

となる。ここで、

$$X^* = -\frac{1}{2}(\varphi^k h i_k + \theta^k i_k), \tag{3.33}$$
$$-X = \frac{1}{2}(-\varphi^k h i_k + \theta^k i_k) \tag{3.34}$$

なので、$A \overset{\mathrm{def}}{=} e^{X^*}$ とすると、$e^{-X} = \tilde{A}^*$ である：

$$A q \tilde{A}^* = q'. \tag{3.35}$$

ここで、* は h についての複素共役で、$\tilde{\bullet}$ は $\bullet$ の四元共役 (i_k を $-i_k$ にする) である。

(3.32) の複素共役より、

$$e^X q^* e^{-X^*} = (q^*)', \tag{3.36}$$
$$q^* = q^0 - q^k h i_k\,, \quad (q^*)' = q'^0 - q'^k h i_k\,, \quad q'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu q^\nu \tag{3.37}$$

を得る。

3.4 パウリ行列とローレンツ変換

さて、四元数の 2 次複素行列による表現 ρ を考える。h を i と書き[9)]、

$$\rho(i_k) = -i\sigma_k \tag{3.38}$$

9) または、ρ を双四元数の表現と思い、$\rho(h) = i$ とする。ここで、双四元数とは、

$$X = x^0 + x^k i_k\,, \quad x^\mu = y^\mu + h z^\mu\,, \quad y^\mu, z^\mu \in \mathbb{R}$$

の形の数 X のことである。双四元数の表現を、

$$\rho(X) \;=\; \rho(x^0) + \rho(x^k)\rho(i_k)\,, \quad \rho(x^\mu) = y^\mu + i z^\mu$$

とし、$\rho(i_k)$ を (3.38) で定める。

と置く。σ_k はパウリ行列である。よって、

$$\rho(q) = q^0 + q^k\sigma_k \tag{3.39}$$

である。これを再び q と書くと、(3.32) より、

$$\begin{aligned} e^{X^*}qe^{-X} &= q', && (3.40)\\ X^* &= -\varphi^k\frac{\sigma_k}{2} + i\theta^k\frac{\sigma_k}{2}, && (3.41)\\ -X &= -\varphi^k\frac{\sigma_k}{2} - i\theta^k\frac{\sigma_k}{2} && (3.42) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$D := \exp\left(i\theta^k\frac{\sigma_k}{2} - \varphi^k\frac{\sigma_k}{2}\right) \tag{3.43}$$

とすると、

$$DqD^\dagger = q' \tag{3.44}$$

である。$X^\dagger$ は X のエルミート共役である。今、

$$\sigma_\mu := (1_2, \sigma_k) \tag{3.45}$$

とすると、(3.44) は、

$$D\sigma_\mu D^\dagger = \Lambda^\nu{}_\mu\sigma_\nu \tag{3.46}$$

を意味する。

また、

$$C := \exp\left(i\theta^k\frac{\sigma_k}{2} + \varphi^k\frac{\sigma_k}{2}\right) \tag{3.47}$$

とすると、(3.36) は、

$$\begin{aligned} C\bar{\sigma}_\mu C^\dagger &= \Lambda^\nu{}_\mu\bar{\sigma}_\nu, && (3.48)\\ \bar{\sigma}_\mu &:= (1_2, -\sigma_k) && (3.49) \end{aligned}$$

である。C は、

$$C = (D^\dagger)^{-1} = (D^{-1})^\dagger \tag{3.50}$$

である。

3.5　ワイルスピノール

ローレンツ群の $(\frac{1}{2}, 0)$ 表現 η と $(0, \frac{1}{2})$ 表現 ξ は、

$$\eta' = C\eta, \tag{3.51}$$

$$\xi' = D\xi \tag{3.52}$$

と変換する。これらをワイルスピノールという。

(3.46), (3.48) より、

$$\mathcal{L}_\eta := \eta^\dagger \sigma_\mu \partial^\mu \eta, \tag{3.53}$$

$$\mathcal{L}_\xi := \xi^\dagger \bar{\sigma}_\mu \partial^\mu \xi \tag{3.54}$$

はローレンツ不変である。

A　スピン群

A.1　$\mathrm{O}(p,q)$ 群

0 以上の整数 p,q $(p+q\geq 1)$ に対して、

$$\mathrm{O}(p,q) := \{\Lambda^a{}_b \in \mathrm{M}(p+q,\mathbb{R}) | \eta^{(q,p)}_{ab} = \Lambda^i{}_a \Lambda^j{}_b \eta^{(q,p)}_{ij}\} \tag{A.1}$$

とする[10)]。ただし、$\eta^{(q,p)}_{ab}$ は $(q+p)$ 次の対角行列で、その最初の q 成分が -1 で、残りの p 成分が 1 である[11)][12)]。$a,b=0,1,\cdots,p+q-1$ である。また、

$$\mathrm{SO}(p,q) := \{\Lambda^a{}_b \in \mathrm{O}(p,q) | \det(\Lambda^a{}_b) = 1\} \tag{A.2}$$

とする。$d\geq 1$ に対して、$\mathrm{O}(d,1)$ をローレンツ群と呼ぶ。また、

$$\mathrm{SO}_+(d,1) := \{\Lambda^a{}_b \in \mathrm{SO}(d,1) | \Lambda^0{}_0 > 0\} \tag{A.3}$$

を狭義ローレンツ群と呼ぶ。

A.2　ピン群

今、

$$e_a e_b + e_b e_a = 2\eta^{(q,p)}_{ab} \tag{A.4}$$

を満たす量の組 $\{e_a\}_{a=0,1,\cdots,q+p-1}$ を考える。e_a は時空点によらないとする $(\partial_\mu e_a = 0)$。クリフォード代数と呼ばれる集合 $\mathcal{C}^{(p,q)}$ を、

$$\mathcal{C}^{(p,q)} := \{a^0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{0\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq q+p-1} a^{i_1 i_2\cdots i_k} e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} | a^0 \in \mathbb{R},\ a^{i_1 i_2 \cdots i_k} \in \mathbb{R}\} \tag{A.5}$$

で定義する。さらに、

$$\mathcal{C}^{(p,q)}_* \overset{\mathrm{def}}{=} \{\boldsymbol{S} \in \mathcal{C}^{(p,q)} | {}^\exists \boldsymbol{U} \in \mathcal{C}^{(p,q)},\ \boldsymbol{SU} = 1 = \boldsymbol{US}\} \tag{A.6}$$

とし、クリフォード群 $\Gamma^{(p,q)}$ を、

$$\Gamma^{(p,q)} := \{\boldsymbol{S} \in \mathcal{C}^{(p,q)}_* | {}^\exists \Lambda^a{}_b \in \mathrm{M}(p+q,\mathbb{R}),\ \boldsymbol{S} e_a \boldsymbol{S}^{-1} = \Lambda^b{}_a e_b\} \tag{A.7}$$

で定義する。$\boldsymbol{S} \in \Gamma^{(p,q)}$ に対して、

$$e'_a \overset{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{S} e_a \boldsymbol{S}^{-1} = [\rho(\boldsymbol{S})]^b{}_a e_b =: \rho^b{}_a e_b \tag{A.8}$$

---

10) $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ に対して、成分が $\mathbb{K}$ に属する n 次正方行列全体を $\mathrm{M}(n,\mathbb{K})$ と書く。
11) $\mathrm{O}(p,q)$ の定義において、$\eta^{(q,p)}_{ab}$ は最初の p 成分が 1 で、残りの q 成分が -1 の対角行列とされることが多い。
12) $\eta^{(q,p)}_{ab} = \Lambda^i{}_a \Lambda^j{}_b \eta^{(q,p)}_{ij}$ の両辺の行列式を計算すると、$[\det(\Lambda^a{}_b)]^2 = 1$ を得る。

で $\rho(\boldsymbol{S})$ を定める。$\rho(\boldsymbol{S}) \in \mathrm{O}(p,q)$ であることは、次のようにして分かる。まず、

$$\begin{aligned} e'_a e'_b + e'_b e'_a &= \boldsymbol{S}(e_a e_b + e_b e_a)\boldsymbol{S}^{-1} \\ &= 2\eta^{(q,p)}_{ab} \end{aligned} \tag{A.9}$$

である。また、

$$\begin{aligned} e'_a e'_b + e'_b e'_a &= \rho^c{}_a \rho^d{}_b (e_c e_d + e_d e_c) \\ &= 2\rho^c{}_a \rho^d{}_b \eta^{(q,p)}_{cd} \end{aligned} \tag{A.10}$$

である。上 2 式より、$\rho(\boldsymbol{S}) \in \mathrm{O}(p,q)$ が分かる。$\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}' \in \Gamma^{(p,q)}$ に対して、$\rho(\boldsymbol{S}'\boldsymbol{S}) = \rho(\boldsymbol{S}')\rho(\boldsymbol{S})$ であるから、ρ は $\mathrm{O}(p,q)$ の表現である。また、0 でない実数 a に対して、$\rho(a\boldsymbol{S}) = \rho(\boldsymbol{S})$ である。

ピン群やスピン群を定義する[13)]。今、$\mathcal{C}^{(p,q)}$ の元に作用する演算子 r を、

$$r(ae_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}) := a(-1)^{(p+1)k} e_{i_k}\cdots e_{i_2}e_{i_1}, \tag{A.11}$$

$$r(a) := a \tag{A.12}$$

によって定義する。ここで、a は実数であり、$i_1, i_2, \cdots, i_k = 0, 1, \cdots, p+q-1$ である。また、$\boldsymbol{S} \in \mathcal{C}^{(p,q)}$ に対して、

$$N(\boldsymbol{S}) := \boldsymbol{S}r(\boldsymbol{S}) \tag{A.13}$$

と定義する。$\boldsymbol{S} \in \Gamma^{(p,q)}$ のとき、$N(\boldsymbol{S}) = a$ となる、0 でない実数 a が存在する。ピン群 $\mathrm{Pin}(p,q)$ は、

$$\mathrm{Pin}(p,q) := \{\boldsymbol{S} \in \Gamma^{(p,q)} | N(\boldsymbol{S}) = \pm 1\} \tag{A.14}$$

で定義される[14)]。また、

$$\mathrm{Spin}(p,q) := \mathrm{Pin}(p,q) \cap \mathcal{C}^{(p,q)}_0, \tag{A.15}$$

$$\mathrm{Spin}_+(p,q) := \{\boldsymbol{S} \in \mathrm{Spin}(p,q) | N(\boldsymbol{S}) = 1\} \tag{A.16}$$

である。ここで、$\mathcal{C}^{(p,q)}_0$ は $\mathcal{C}^{(p,q)}$ の元のうち、$\{e_a\}$ の偶数次のみからなる元の集合である。なお、$\mathcal{C}^{(p,q)}_1$ は $\mathcal{C}^{(p,q)}$ の元のうち、$\{e_a\}$ の奇数次のみからなる元の集合である。$\mathrm{Spin}(p,q)$ はスピン群と呼ばれる。さて、

$$\rho(\mathrm{Spin}(p,q)) = \mathrm{SO}(p,q) \tag{A.17}$$

となる [1, 2]。$\mathrm{Spin}(p,q)$ は、$\mathrm{SO}(p,q)$ の二重被覆群である[15)]。$(p+q)$ が偶数の時は、

$$\rho(\mathrm{Pin}(p,q)) = \mathrm{O}(p,q) \tag{A.18}$$

となり、$\mathrm{Pin}(p,q)$ は $\mathrm{O}(p,q)$ の二重被覆群である [1, 2, 3]。

---

13) この段落の記述は、[1, 2] を参考にした。

14) $\mathrm{Pin}(p,q)$ の任意の元は、$v_1 v_2 \cdots v_n$ の形に書ける。ただし、$v_\alpha (\alpha = 1, 2, \cdots, n)$ は、$v_\alpha = \sum_{j=0}^{p+q-1} a_\alpha{}^j e_j$ $(a_\alpha{}^j \in \mathbb{R})$ の形の $\mathcal{C}^{(p,q)}_*$ の元である。

15) また、$d \geq 1$ に対して、$\mathrm{Spin}_+(d,1)$ は $\mathrm{SO}_+(d,1)$ の二重被覆群である。

$\mathrm{Spin}_+(p,q)$ のリー代数は、

$$\mathrm{spin}(p,q) = \{\sum_{a<b} c^{ab} e_a e_b | c^{ab} \in \mathbb{R}\} \tag{A.19}$$

である。$\mathrm{Spin}_+(p,q)$ の任意の元 $\boldsymbol{S}$ は、

$$\boldsymbol{S} = \exp(X_1)\exp(X_2)\cdots\exp(X_k)\,, \quad X_i \in \mathrm{spin}(p,q) \tag{A.20}$$

と書ける。特に $q=0$ なら $k=1$ となる。

B　ガンマ行列とWickの定理

B.1　Wickの定理

$A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ は、

$$A_i = A_i^+ + A_i^- \tag{B.1}$$

と書け、A_i^+ は生成演算子の線形結合, A_i^- は消滅演算子の線形結合とする。このとき、正規積を、

$$N[A_1 A_2 \cdots A_n] := \sum_{B \in B_n} \varepsilon_{B,n} \prod_{i \in B} A_i^- \prod_{j \in N_n - B} A_j^+ \tag{B.2}$$

で定義する。ここで、$N_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ であり、B_n は N_n のべき集合であり、

$$B = \{i_1, \cdots, i_k\}, \quad i_\alpha < i_\beta \ (\alpha < \beta), \tag{B.3}$$

$$N_n - B = \{j_1, \cdots, j_{n-k}\}, \quad j_\alpha < j_\beta \ (\alpha < \beta) \tag{B.4}$$

と書くと、

$$\prod_{i \in B} A_i^- = A_{i_1}^- \cdots A_{i_k}^-, \tag{B.5}$$

$$\prod_{j \in N_n - B} A_j^+ = A_{j_1}^+ \cdots A_{j_{n-k}}^+ \tag{B.6}$$

であり、A_i がボソンなら $\varepsilon_{B,n} = 1$ で、A_i がフェルミオンなら、

$$\varepsilon_{B,n} = \mathrm{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 \cdots i_k j_1 & \cdots & j_{n-k} \end{pmatrix} \tag{B.7}$$

である。このとき、

$$A_1 \cdots A_n = N[A_1 \cdots A_n] + \sum_{p=1}^{[n/2]} \sum_{P \in p-\mathrm{pair}} N_P[A_1 \cdots A_n] \tag{B.8}$$

である [4]。ここで、$N_P[A_1 \cdots A_n]$ は、

$$N_P[A_1 \cdots A_n] = N[(A_1 \cdots A_n)\text{ からペア } P \text{ を除いたもの}] \times \prod C_{\text{ペア}} \tag{B.9}$$

である[16)] 。ここで、ペアを (i, j) $(i < j)$ とすると、

$$C_{(i,j)} = \begin{cases} [A_i^+, A_j^-] & \text{for ボソン} \\ \{A_i^+, A_j^-\} & \text{for フェルミオン} \end{cases} \tag{B.10}$$

である。

16) フェルミオンの場合、“$(A_1 \cdots A_n)$ からペア P を除いたもの” には符号が付くとする。符号は、ペアを作るときに飛び越えなければならない因子の数から決まる。例えば、$A_1 A_2 A_3$ からペア $(1, 2)$ を除いたものは $+A_3$ であり、ペア $(1, 3)$ を除いたものは $-A_2$ である。

B.2　クリフォード代数への応用

今、

$$\{e_\mu, e_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}\,, \quad \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(\eta_1, \cdots, \eta_D)\,, \quad \eta_\mu = \pm 1 \tag{B.11}$$

を満たす量 $\{e_\mu\}_{\mu=1}^{D}$ を考える。さらに、

$$\{e_A, e_B\} = 2\eta_{AB}\,, \quad \eta_{AB} = \mathrm{diag}(\eta_1, \cdots, \eta_{2D})\,, \quad \eta_{D+\mu} = \eta_\mu \tag{B.12}$$

を満たす量 $\{e_A\}_{\mu=1}^{2D}$ を考え、

$$e_\mu^\pm := \frac{1}{2}(e_\mu \pm i e_{D+\mu}) \tag{B.13}$$

とすると、

$$\{e_\mu^+, e_\nu^+\} = \{e_\mu^-, e_\nu^-\} = 0, \tag{B.14}$$
$$\{e_\mu^+, e_\nu^-\} = \eta_{\mu\nu} \tag{B.15}$$

となり、

$$e_\mu = e_\mu^+ + e_\mu^- \tag{B.16}$$

である。これで Wick の定理 (B.8) が使える。

ここで、

$$A(X_{\mu_1\cdots\mu_n}) := X_{[\mu_1\cdots\mu_n]} \overset{\text{def}}{=} \sum_{\sigma\in S_n} \frac{\mathrm{sgn}(\sigma)}{n!} X_{\mu_{\sigma(1)}\cdots\mu_{\sigma(n)}} \tag{B.17}$$

とすると、Wick の定理 (B.8) より、

$$A(e_{\mu_1}\dots e_{\mu_n}) = N[A(e_{\mu_1}\dots e_{\mu_n})] = A(N[e_{\mu_1}\dots e_{\mu_n}]) \tag{B.18}$$

を得る。一方、

$$N[e_{\mu_1}\dots e_{\mu_n}] = A(N[e_{\mu_1}\dots e_{\mu_n}]) \tag{B.19}$$

が示せる。よって、

$$N[e_{\mu_1}\dots e_{\mu_n}] = A(e_{\mu_1}\dots e_{\mu_n}) =: e_{\mu_1\cdots\mu_n} \tag{B.20}$$

となる。

これより、例えば、

$$e_\nu e_{\mu_1\cdots\mu_n} = e_{\nu\mu_1\cdots\mu_n} + n\eta_{\nu[\mu_1} e_{\mu_2\cdots\mu_n]}, \tag{B.21}$$
$$e_{\mu_1\cdots\mu_n} e_\nu = e_{\mu_1\cdots\mu_n\nu} + n e_{[\mu_1\cdots\mu_{n-1}}\eta_{\mu_n]\nu} \tag{B.22}$$

が得られる。また、

$$e_{\alpha\beta}e_{\mu\nu} = e_{\alpha\beta\mu\nu} - \eta_{\alpha\mu}e_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu}e_{\beta\mu} + \eta_{\beta\mu}e_{\alpha\nu} - \eta_{\beta\nu}e_{\alpha\mu} - \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\mu} \tag{B.23}$$

も得られる。よって、$G_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} e_{\alpha\beta}/2$ に対して、

$$[G_{\alpha\beta}, G_{\mu\nu}] = \eta_{\alpha\nu}G_{\beta\mu} - \eta_{\alpha\mu}G_{\beta\nu} - \eta_{\beta\nu}G_{\alpha\mu} + \eta_{\beta\mu}G_{\alpha\nu} \tag{B.24}$$

を得る。したがって、$G_{\alpha\beta}$ は $\mathrm{SO}(p,q)$ の生成子の表現である。ここで、p, q はそれぞれ、$\eta_1, \cdots, \eta_D$ の中の $+1$, -1 の個数である。

References

[1] M. Rausch de Traubenberg, “Clifford Algebras in Physics”, arXiv:hep-th/0506011.

[2] 志村五郎『数学をいかに使うか』(筑摩書房, 2010 年).

[3] M. Berg, C. DeWitt-Morette, S. Gwo and E. Kramer, “The Pin Groups in Physics: C, P, and T”, Rev. Math. Phys. **13**, 953 (2001). [arXiv:math-ph/0012006]

[4] `http://physicalpaprika.sakura.ne.jp/physics/Wick_theorem.pdf`