4次元回転と四元数

中嶋 慧

November 8, 2020

Abstract

この記事では、4 次元ローレンツ変換および 4 次元ユークリッド空間の回転の四元数による表式を証明する。

Contents

1　4 次元回転と四元数

i_1, i_2, i_3 を四元数の虚数単位とする。h を $h^2 = -1$ で、i_k と可換な数とする[1)]。4 次元ミンコフスキー空間の点は、

$$q = q^0 + q^k h i_k \quad (q^\mu \in \mathbb{R}) \tag{1.1}$$

と表される。このとき、

$$q\tilde{q} = (q^0)^2 - (q^k)^2 \tag{1.2}$$

である。$\tilde{X}$ は X の四元数としての共役を表す。h についての複素共役は X^* とする。X が、

$$X = x^0 + x^k i_k, \quad x^\mu = y^\mu + h z^\mu, \quad y^\mu, z^\mu \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

1) ラテン (小) 文字の添え字は $1, 2, 3$ を表し、ギリシャ(小) 文字の添え字は $0, 1, 2, 3$ を表す。

のとき、X を双四元数という。ローレンツ変換は、A を双四元数として、

$$q' = Aq\tilde{A}^*, \quad A\tilde{A} = 1 \tag{1.4}$$

と書ける (§ 2)。特に、$\tilde{A}^* = A$ の場合がローレンツブーストで、$A^* = A$ の場合が 3 次元空間回転である。

4 次元ユークリッド空間の点は、

$$q = q^0 + q^k i_k \quad (q^\mu \in \mathbb{R}) \tag{1.5}$$

で表される。4 次元回転は、A, B を単位四元数 ($A\tilde{A} = 1 = B\tilde{B}$) として、

$$q' = AqB \tag{1.6}$$

となる (§ 3)。

2 ローレンツ変換：$\mathrm{SO}(3,1)$

e_μ を、

$$e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = 2\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1) \tag{2.1}$$

を満たす数とする。4 次元ミンコフスキー空間の点は、

$$Q = q^0 e_0 + q^k e_k \tag{2.2}$$

と表現される。付録 A より、ローレンツ変換 ($\mathrm{SO}_+(1,3)$ の元) は、

$$Q' = AQA^{-1}, \quad A = e^{X_1}e^{X_2}\cdots e^{X_n}, \quad X_k = \sum_{\mu<\nu} c^{\mu\nu}_{(k)} e_\mu e_\nu \tag{2.3}$$

と書ける。$c^{\mu\nu}_{(k)}$ は実数である。ところで、

$$h = -e_0e_1e_2e_3, \tag{2.4}$$

$$hi_k = e_0e_k, \tag{2.5}$$

$$i_1 = e_2e_3, \quad i_2 = e_3e_1, \quad i_3 = e_1e_2 \tag{2.6}$$

という同一視が出来る。よって、X_k は双 (純) 四元数とみなせる。また、

$$q \overset{\mathrm{def}}{=} e_0 Q = q^0 + q^k hi_k \tag{2.7}$$

であり、

$$\begin{aligned} AQA^{-1} &= Ae_0qA^{-1} \\ &= e_0A^*qA^{-1} \end{aligned} \tag{2.8}$$

である。実際、

$$Ae_0 = e_0B \tag{2.9}$$

と置くと、

$$\begin{aligned} B &= e_0Ae_0 = e_0e^{X_1}e_0e_0e^{X_2}e_0\cdots e_0e^{X_n}e_0 \\ &= e^{e_0X_1e_0}e^{e_0X_2e_0}\cdots e^{e_0X_ne_0} \\ &= e^{X_1^*}e^{X_2^*}\cdots e^{X_n^*} = A^* \end{aligned} \tag{2.10}$$

である。よって、ローレンツ変換は、

$$q' = A^*qA^{-1} = A^*q\tilde{A} = Bq\tilde{B}^* \tag{2.11}$$

となる。$B\tilde{B} = BB^{-1} = 1$ である。

3　ユークリッド 4 次元回転：SO(4)

e_μ を、

$$e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = 2\mathrm{diag}(1,1,1,1) \tag{3.1}$$

を満たす数とする。4 次元ミンコフスキー空間の点は、

$$Q = q^0e_0 + q^ke_k \tag{3.2}$$

と表現される。付録 A より、4 次元回転 (SO(4) の元) は、

$$Q' = AQA^{-1}\,,\quad A = e^X\,,\quad X = \sum_{\mu<\nu} c^{\mu\nu}e_\mu e_\nu \tag{3.3}$$

と書ける。$c^{\mu\nu}$ は実数である。ところで、

$$j \stackrel{\mathrm{def}}{=} e_0e_1e_2e_3, \tag{3.4}$$

$$ji_k = e_0e_k, \tag{3.5}$$

$$i_1 = -e_2e_3\,,\quad i_2 = -e_3e_1\,,\quad i_3 = -e_1e_2 \tag{3.6}$$

という同一視が出来る。$j^2 = 1$ である。よって、X は分解型双 (純) 四元数とみなせる[2)]。また、

$$q \stackrel{\mathrm{def}}{=} e_0Q = q^0 + q^kji_k \tag{3.7}$$

であり、

$$\begin{aligned} AQA^{-1} &= Ae_0qA^{-1} \\ &= e_0A^*qA^{-1} \end{aligned} \tag{3.8}$$

である。A^* は j についての共役である。よって、4 次元回転は、

$$q' = A^*qA^{-1} \tag{3.9}$$

[2)] $x = x^0 + x^ki_k$ で $x^\mu = y^\mu + jz^\mu(y^\mu, z^\mu \in \mathbb{R})$ の形の数 x を分解型双四元数という。

となる。

さて、X', X'' を四元数とするとき、

$$T(X' + jX'') = X' + X'' \tag{3.10}$$

とすると、分解型双四元数 X, Y に対して、

$$T(XY) = T(X)T(Y) \tag{3.11}$$

である。よって、(3.9) より、

$$T(q') = e^{T(X^*)}T(q)e^{-T(X)} \tag{3.12}$$

である。今、$p = T(q)$, $A = e^{T(X^*)}$, $B = e^{-T(X)}$ とすると、

$$p' = ApB \tag{3.13}$$

であり、A, B は単位四元数である ($T(X^*)$, $-T(X)$ は純四元数である)。p と q とは 1 対 1 に対応する。

4　パウリ行列と 4 次元ローレンツ変換

　パウリ行列

$$\sigma_1 \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

を使って 4 次元ローレンツ変換を表す。今、2 次元単位行列 I を用いて、

$$X \overset{\mathrm{def}}{=} x^0 I + x^k \sigma_k \tag{4.2}$$

と置く。X は $x^\mu = (x^0, x_k)$ と 1 対 1 に対応する。X はエルミート行列

$$X^\dagger = X \tag{4.3}$$

であり、また、その行列式は、

$$\det(X) = (x^0)^2 - (x^k)^2 \tag{4.4}$$

となる。

　さて、T を $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の元とし、

$$X' \overset{\mathrm{def}}{=} T X T^\dagger \tag{4.5}$$

とすると、

$$(X')^\dagger = X', \tag{4.6}$$

$$\det(X') = \det(X) \tag{4.7}$$

である。よって、$X' = x'^0 I + x'^k \sigma_k$ と書くと、$x^\mu \to x'^\mu$ はローレンツ変換である。

　今、$T \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ を、

$$T = e^H \tag{4.8}$$

と置く。2 次行列 H は一般に、

$$H = (\theta^k + i\varphi^k)\sigma_k + (\theta^0 + i\varphi^0) I \quad (\theta^\mu, \varphi^\mu \in \mathbb{R}) \tag{4.9}$$

と書ける。ところで、

$$1 = \det(T) = \exp\left[\mathrm{Tr}(H)\right] \tag{4.10}$$

なので、$\theta^0 = \varphi^0 = 0$ となる。よって、

$$T = \exp\left[(\theta^k + i\varphi^k)\sigma_k\right] \tag{4.11}$$

となる。

ローレンツ変換

$$X' = TXT^\dagger, \quad T = \exp\left[(\theta^k + i\varphi^k)\sigma_k\right] \tag{4.12}$$

は、§ 2 の議論からも導ける。実際、

$$\sigma_k \Longleftrightarrow hi_k, \quad 1 \Longleftrightarrow I \tag{4.13}$$

の対応があるので、

$$q = q^0 + q^k hi_k \Longleftrightarrow X = x^0 I + x^k \sigma_k \tag{4.14}$$

である。また、Y を (2.3) の X_k とすると、

$$e^{Y^*} \Longleftrightarrow T = \exp\left[(\theta^k + i\varphi^k)\sigma_k\right], \tag{4.15}$$

$$e^{-Y} \Longleftrightarrow T^\dagger = \exp\left[(\theta^k - i\varphi^k)\sigma_k\right] \tag{4.16}$$

である。

A　スピン群

A.1　$\mathrm{O}(p,q)$ 群

0 以上の整数 p,q $(p+q\geq 1)$ に対して、

$$\mathrm{O}(p,q) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\Lambda^a{}_b \in \mathrm{M}(p+q,\mathbb{R}) | \overset{\circ}{g}{}^{(q,p)}_{ab} = \Lambda^i{}_a \Lambda^j{}_b \overset{\circ}{g}{}^{(q,p)}_{ij}\} \tag{A.1}$$

とする[3)]。ただし、$\overset{\circ}{g}{}^{(q,p)}_{ab}$ は $(q+p)$ 次の対角行列で、その最初の q 成分が -1 で、残りの p 成分が 1 である[4)5)]。$a,b=0,1,\cdots,p+q-1$ である。また、

$$\mathrm{SO}(p,q) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\Lambda^a{}_b \in \mathrm{O}(p,q) | \det(\Lambda^a{}_b) = 1\} \tag{A.2}$$

とする。$d\geq 1$ に対して、$\mathrm{O}(d,1)$ をローレンツ群と呼ぶ。また、

$$\mathrm{SO}_+(d,1) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\Lambda^a{}_b \in \mathrm{SO}(d,1) | \Lambda^0{}_0 > 0\} \tag{A.3}$$

を狭義ローレンツ群と呼ぶ。

A.2　ピン群

この節では、ピン群について解説する。ピン群は、(すぐ後で定義する) クリフォード代数を用いて定義される。

今、

$$e_a e_b + e_b e_a = 2\overset{\circ}{g}{}^{(q,p)}_{ab} \tag{A.4}$$

を満たす量の組 $\{e_a\}_{a=0,1,\cdots,q+p-1}$ を考える。e_a は時空点によらないとする $(\partial_\mu e_a = 0)$。クリフォード代数と呼ばれる集合 $\mathcal{C}^{(p,q)}$ を、

$$\mathcal{C}^{(p,q)} \overset{\mathrm{def}}{=} \{a^0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{0\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq q+p-1} a^{i_1 i_2\cdots i_k} e_{i_1} e_{i_2}\cdots e_{i_k} | a^0\in\mathbb{R},\ a^{i_1 i_2\cdots i_k}\in\mathbb{R}\} \tag{A.5}$$

で定義する。さらに、

$$\mathcal{C}^{(p,q)}_* \overset{\mathrm{def}}{=} \{\boldsymbol{S}\in\mathcal{C}^{(p,q)} | {}^\exists \boldsymbol{U}\in\mathcal{C}^{(p,q)},\ \boldsymbol{SU} = 1 = \boldsymbol{US}\} \tag{A.6}$$

とし、クリフォード群 $\Gamma^{(p,q)}$ を、

$$\Gamma^{(p,q)} \overset{\mathrm{def}}{=} \{\boldsymbol{S}\in\mathcal{C}^{(p,q)}_* | {}^\exists\Lambda^a{}_b \in \mathrm{M}(p+q,\mathbb{R}),\ \boldsymbol{S} e_a \boldsymbol{S}^{-1} = \Lambda^b{}_a e_b\} \tag{A.7}$$

で定義する。$\boldsymbol{S}\in\Gamma^{(p,q)}$ に対して、

$$e'_a \overset{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{S} e_a \boldsymbol{S}^{-1} = [\rho(\boldsymbol{S})]^b{}_a e_b =: \rho^b{}_a e_b \tag{A.8}$$

3) $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ に対して、成分が $\mathbb{K}$ に属する n 次正方行列全体を $\mathrm{M}(n,\mathbb{K})$ と書く。

4) $\mathrm{O}(p,q)$ の定義において、$\overset{\circ}{g}{}^{(q,p)}_{ab}$ は最初の p 成分が 1 で、残りの q 成分が -1 の対角行列とされることが多い。

5) $\overset{\circ}{g}{}^{(q,p)}_{ab} = \Lambda^i{}_a \Lambda^j{}_b \overset{\circ}{g}{}^{(q,p)}_{ij}$ の両辺の行列式を計算すると、$[\det(\Lambda^a{}_b)]^2 = 1$ を得る。

で $\rho(\boldsymbol{S})$ を定める。$\rho(\boldsymbol{S}) \in \mathrm{O}(p,q)$ であることは、次のようにして分かる。まず、

$$
\begin{aligned}
e'_a e'_b + e'_b e'_a &= \boldsymbol{S}(e_a e_b + e_b e_a)\boldsymbol{S}^{-1} \\
&= 2\mathring{g}^{(q,p)}_{ab}
\end{aligned} \tag{A.9}
$$

である。また、

$$
\begin{aligned}
e'_a e'_b + e'_b e'_a &= \rho^c{}_a \rho^d{}_b (e_c e_d + e_d e_c) \\
&= 2\rho^c{}_a \rho^d{}_b g^{(q,p)}_{cd}
\end{aligned} \tag{A.10}
$$

である。上 2 式より、$\rho(\boldsymbol{S}) \in \mathrm{O}(p,q)$ が分かる。$\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}' \in \Gamma^{(p,q)}$ に対して、$\rho(\boldsymbol{S}'\boldsymbol{S}) = \rho(\boldsymbol{S}')\rho(\boldsymbol{S})$ であるから、ρ は $\mathrm{O}(p,q)$ の表現である。また、0 でない実数 a に対して、$\rho(a\boldsymbol{S}) = \rho(\boldsymbol{S})$ である。$\mathrm{Spin}(p,q)$ と書かれる、$\Gamma^{(p,q)}$ の部分群が存在し、

$$
\rho(\mathrm{Spin}(p,q)) = \mathrm{SO}(p,q) \tag{A.11}
$$

となる [1, 2]。$\mathrm{Spin}(p,q)$ の定義は、すぐ後の (A.16) である。$\mathrm{Spin}(p,q)$ はスピン群と呼ばれる。$\mathrm{Spin}(p,q)$ は、すぐ後で定義されるピン群 $\mathrm{Pin}(p,q)$ の部分群であり、$\mathrm{SO}(p,q)$ の二重被覆群である[6]

$\mathrm{Pin}(p,q)$, $\mathrm{Spin}(p,q)$ は次のように定義される[7]。今、$\mathcal{C}^{(p,q)}$ の元に作用する演算子 r を、

$$
r(a e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} a(-1)^{(p+1)k} e_{i_k} \cdots e_{i_2} e_{i_1}, \tag{A.12}
$$

$$
r(a) \stackrel{\mathrm{def}}{=} a \tag{A.13}
$$

によって定義する。ここで、a は実数であり、$i_1, i_2, \cdots, i_k = 0, 1, \cdots, p+q-1$ である。また、$\boldsymbol{S} \in \mathcal{C}^{(p,q)}$ に対して、

$$
N(\boldsymbol{S}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{S} r(\boldsymbol{S}) \tag{A.14}
$$

と定義する。$\boldsymbol{S} \in \Gamma^{(p,q)}$ のとき、$N(\boldsymbol{S}) = a$ となる、0 でない実数 a が存在する。$\mathrm{Pin}(p,q)$ は、

$$
\mathrm{Pin}(p,q) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\boldsymbol{S} \in \Gamma^{(p,q)} | N(\boldsymbol{S}) = \pm 1\} \tag{A.15}
$$

で定義される[8] 。また、

$$
\mathrm{Spin}(p,q) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pin}(p,q) \cap \mathcal{C}^{(p,q)}_0, \tag{A.16}
$$

$$
\mathrm{Spin}_+(p,q) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\boldsymbol{S} \in \mathrm{Spin}(p,q) | N(\boldsymbol{S}) = 1\} \tag{A.17}
$$

である。ここで、$\mathcal{C}^{(p,q)}_0$ は $\mathcal{C}^{(p,q)}$ の元のうち、$\{e_a\}$ の偶数次のみからなる元の集合である。なお、$\mathcal{C}^{(p,q)}_1$ は $\mathcal{C}^{(p,q)}$ の元のうち、$\{e_a\}$ の奇数次のみからなる元の集合である。

---

[6] また、$d \geq 1$ に対して、$\mathrm{Spin}(d,1)$ の部分群 $\mathrm{Spin}_+(d,1)$ が存在し、それは $\mathrm{SO}_+(d,1)$ の二重被覆群である。$\mathrm{Spin}_+(p,q)$ は (A.17) で定義される。

[7] この段落の記述は、[1, 2] を参考にした。

[8] $\mathrm{Pin}(p,q)$ の任意の元は、$v_1 v_2 \cdots v_n$ の形に書ける。ただし、$v_\alpha (\alpha = 1, 2, \cdots, n)$ は、$v_\alpha = \sum_{j=0}^{p+q-1} a_\alpha{}^j e_j$ ($a_\alpha{}^j \in \mathbb{R}$) の形の $\mathcal{C}^{(p,q)}_*$ の元である。

$(p+q)$ が偶数の時は、

$$\rho(\mathrm{Pin}(p,q)) = \mathrm{O}(p,q) \tag{A.18}$$

となり、$\mathrm{Pin}(p,q)$ は $\mathrm{O}(p,q)$ の二重被覆群である [1, 2, 3]。

$\mathrm{Spin}_+(p,q)$ のリー代数は、

$$\mathrm{spin}(p,q) = \{\sum_{a<b} c_{ab} e_a e_b | c_{ab} \in \mathbb{R}\} \tag{A.19}$$

である。$\mathrm{Spin}_+(p,q)$ の任意の元 $\boldsymbol{S}$ は、

$$\boldsymbol{S} = \exp(X_1)\exp(X_2)\cdots\exp(X_k), \quad X_i \in \mathrm{spin}(p,q) \tag{A.20}$$

と書ける。特に $q=0$ なら $k=1$ となる。

References

[1] M. Rausch de Traubenberg, “Clifford Algebras in Physics”, arXiv:hep-th/0506011.

[2] 志村五郎『数学をいかに使うか』(筑摩書房, 2010 年).

[3] M. Berg, C. DeWitt-Morette, S. Gwo and E. Kramer, “The Pin Groups in Physics: C, P, and T”, Rev. Math. Phys. **13**, 953 (2001). [arXiv:math-ph/0012006]